# MATEMÁTICA

## CIÊNCIA E APLICAÇÕES


**Gelson Iezzi**
Engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo
Professor da rede particular de ensino em São Paulo

**Osvaldo Dolce**
Engenheiro civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Professor da rede pública estadual de São Paulo

**David Degenszajn**
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo
Professor da rede particular de ensino em São Paulo

**Roberto Périgo**
Licenciado e bacharel em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Professor da rede particular de ensino e de cursos pré-vestibulares em São Paulo

**Nilze de Almeida**
Mestra em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Licenciada em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo
Professora da rede pública estadual de São Paulo


**Volume 2**

**Ensino Médio**


9ª edição
São Paulo, 2016

Matemática: ciência e aplicações – 2º ano (Ensino Médio)


Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Matemática : ciência e aplicações : ensino médio,
volume 2 / Gelson Iezzi. . . [et. al.] . – 9. ed. –
São Paulo : Saraiva, 2016.

Outros autores: Osvaldo Dolce, David
Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida
Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia.
ISBN 978-85-472-0537-9 (aluno)
ISBN 978-85-472-0538-6 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Iezzi, Gelson.
II. Dolce, Osvaldo. III. Degenszajn, David.
IV. Périgo, Roberto. V. Almeida, Nilze de.

16-02747 CDD – 510.7

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

**Diretora editorial** Lidiane Vivaldini Olo
**Gerente editorial** Luiz Tonolli
**Editor responsável** Viviane Carpegiani
**Editores** Juliana Grassmann dos Santos, Pedro Almeida do Amaral Cortez, Érica Lamas
**Gerente de produção editorial** Ricardo de Gan Braga
**Gerente de revisão** Hélia de Jesus Gonsaga
**Coordenador de revisão** Camila Christi Gazzani
**Revisores** Carlos Eduardo Sigrist, Luciana Azevedo, Patrícia Cordeiro, Raquel Alves Taveira
**Produtor editorial** Roseli Said
**Supervisor de iconografia** Sílvio Kligin
**Coordenador de iconografia** Cristina Akisino
**Pesquisa iconográfica** Fernando Cambetas
**Coordenador de artes** José Maria Oliveira
**Design e Capa** Sergio Cândido com imagens de Alex Sun/Shutterstock, Shutterstock, Sashkin/Shutterstock, Shutterstock
**Edição de artes** Marcos Zolezi
**Diagramação** Setup
**Assistente** Bárbara de Souza
**Ilustrações** Ari Nicolosi, BIS, Casa Paulistana de Comunicação, CJT/Zapt, Ilustra Cartoon, Luigi Rocco, Milton Rodrigues, Setup, [SIC] Comunicação, Wilson Jorge Filho/Zapt
**Tratamento de imagens** Emerson de Lima
**Protótipos** Magali Prado
**Impressão e acabamento**

732.756.009.001



SAC 0800-0117875
2ª a 6ª, das 8h às 18h
www.editorasaraiva.com.br/contato

Avenida das Nações Unidas, 7221 – 1º Andar – Setor C – Pinheiros – CEP 05425-902

# Apresentação

**Caros alunos**

É sempre um grande desafio para um autor definir o conteúdo a ser ministrado no Ensino Médio, distribuindo-o pelos três anos. Por isso, depois de consultar as sugestões da Secretaria de Educação Básica (entidade pertencente ao Ministério da Educação) e de ouvir a opinião de inúmeros professores, optamos pelo seguinte programa:

**Volume 1:** noções de conjuntos, conjuntos numéricos, noções gerais sobre funções, função afim, função quadrática, função modular, função exponencial, função logarítmica, progressões, semelhança e triângulos retângulos, áreas das principais figuras planas, trigonometria no triângulo retângulo e estatística descritiva.

**Volume 2:** trigonometria na circunferência, funções circulares, trigonometria em um triângulo qualquer, geometria espacial de posição, áreas e volumes dos principais sólidos, matrizes, sistemas lineares, determinantes, análise combinatória e probabilidades.

**Volume 3:** geometria analítica plana, estatística descritiva, matemática financeira, números complexos, polinômios e equações algébricas.

Ao tratar de alguns assuntos, procuramos apresentar um breve relato histórico sobre o desenvolvimento das descobertas associadas ao tópico em estudo. Já em capítulos como os que tratam de funções, matemática financeira e estatística descritiva, entre outros, recorremos a infográficos e matérias de jornais e revistas, como forma de mostrar a aplicação da Matemática em outras áreas do conhecimento e no cotidiano. São textos de fácil leitura, que despertam a curiosidade do leitor e que podem dialogar sobre temas transversais, como cidadania e meio ambiente.

No desenvolvimento teórico, procuramos, sempre que possível, apresentar os assuntos de forma contextualizada, empregando uma linguagem mais simples. Entretanto, ao formalizarmos os conceitos em estudo (os quais são abundantemente exemplificados), optamos por termos com maior rigor matemático.

Tivemos também a preocupação de mostrar as justificativas lógicas das propriedades apresentadas, omitindo apenas demonstrações exageradamente longas, incompatíveis com as abordagens feitas atualmente no Ensino Médio. Cada nova propriedade é seguida de exemplos e exercícios resolvidos, por meio dos quais é explicitada sua utilidade.

Quanto às atividades, tanto os exercícios como os problemas estão organizados em ordem crescente de dificuldade.

Cada capítulo do livro é encerrado com um desafio. Geralmente é um problema mais complexo, que exige maior raciocínio, articulação e criatividade do leitor na busca da solução. É mais uma oportunidade para vivenciar a resolução de problemas.

**Os autores**

# Conheça este livro

## Início do capítulo

O início do capítulo recebe destaque especial e, sempre que possível, é introduzido com situações do cotidiano.

## Um pouco de História

O trabalho com a história da Matemática coloca os alunos em contato com o processo de construção do conhecimento e a criatividade na resolução de problemas enfrentados pela humanidade no decorrer do tempo, situando também os acontecimentos na linha do tempo.

## Troque ideias

A seção propõe atividades que devem ser realizadas em grupo. Tais atividades buscam despertar a curiosidade e levar o leitor a construir novos conceitos, ou aprofundar conteúdos já apresentados, além de favorecer a autonomia e instigar a busca pelo conhecimento.

## Aplicações

Incluem textos que ilustram o emprego de conhecimentos matemáticos a outros campos, estabelecendo, por exemplo, um elo entre a Matemática e a Física ou entre a Matemática e a Economia. Os textos aprofundam alguns conceitos e auxiliam a construção de outros.

## Exercícios

Grande variedade de exercícios é proposta nesta seção, que tem por objetivo consolidar os conteúdos e conceitos abordados.

## Desafio

Ao final de cada capítulo é apresentado um desafio com o objetivo de, mais uma vez, permitir que o leitor vivencie a resolução de problemas, estimulando sua criatividade e seu raciocínio.

## Exemplos e Exercícios resolvidos

Todos os capítulos deste livro apresentam séries de exercícios intercaladas em meio ao texto. Muitas dessas séries são precedidas de exemplos ou exercícios resolvidos, que auxiliam o leitor a ampliar o repertório de exemplos apresentados no texto.

## Pense nisto

Chamadas curtas são intercaladas em meio ao texto convidando o leitor para refletir sobre algum detalhe do texto, alguma propriedade ou alguma solução para um problema.

## Um pouco mais sobre

Alguns conteúdos podem ser complementados ou aprofundados a partir da leitura de textos no final de determinados capítulos.

# SUMÁRIO

## Capítulo 8 – Poliedros



## Capítulo 9 – Corpos redondos



## Capítulo 10 – Análise Combinatória



## Capítulo 11 – Probabilidade

# A circunferência trigonométrica

## Arcos e ângulos

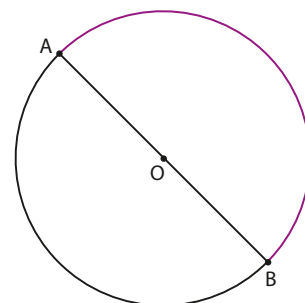
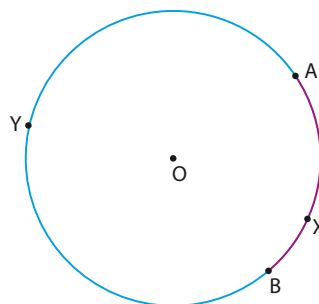
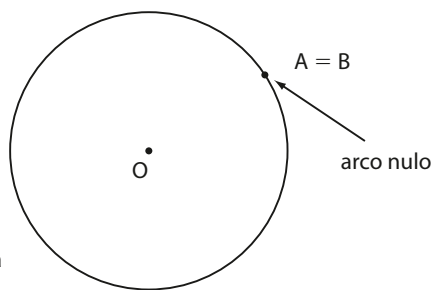
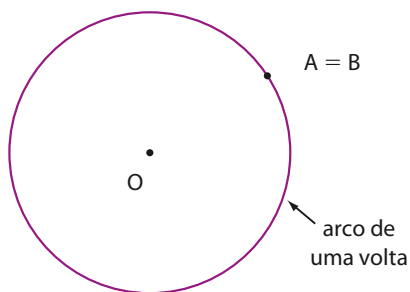
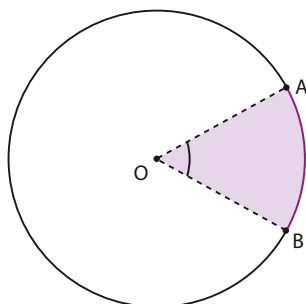
Seja uma circunferência de centro **O**, sobre a qual tomamos dois pontos distintos, **A** e **B**. A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um **arco de circunferência**.

Observe, na figura ao lado, que existem dois arcos determinados por **A** e **B**:

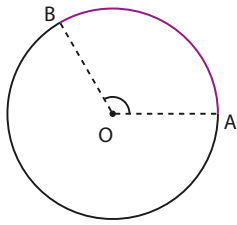
- O arco de extremidades **A** e **B** que contém o ponto **X** — representado por $\overset{\frown}{AXB}$.
- O arco de extremidades **A** e **B** que contém o ponto **Y** — representado por $\overset{\frown}{AYB}$.

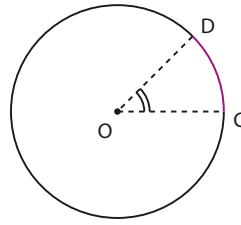
Quando não houver dúvidas em relação ao arco ao qual nos referimos, podemos escrever simplesmente $\overset{\frown}{AB}$ para representar o arco com extremidades **A** e **B**.

Vejamos agora dois casos particulares:

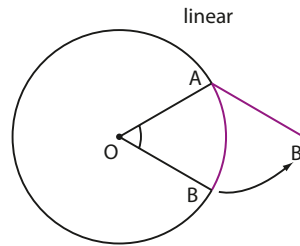
- Se **A** e **B** são simétricos em relação ao centro **O**, o segmento $\overline{AB}$ é um diâmetro e cada um dos arcos determina uma semicircunferência e é chamado **arco de meia-volta**. Veja a figura ao lado.
- No caso de **A** coincidir com **B**, dois arcos são determinados. Um deles é o **arco de uma volta** e o outro, o **arco nulo**. Observe-os nas figuras seguintes.

Observe que a todo arco $\overset{\frown}{AB}$ corresponde um ângulo central, isto é, um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

$A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao arco $\overset{\frown}{AB}$.

## Medida e comprimento de arco

A **medida angular de um arco** ou, simplesmente, **medida de um arco** é igual à medida do ângulo central correspondente. Observe estes exemplos:

med(AÔB) = 120°

Dizemos que o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 120°.

med(CÔD) = 45°

Dizemos que o arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 45°.

A **medida linear** de um arco refere-se ao seu **comprimento**. Quando retificamos um arco de circunferência, obtemos um segmento de reta cuja medida é igual ao **comprimento do arco**, que é medido em centímetros, metros, milímetros, quilômetros etc.

A medida angular do arco é a medida do ângulo central correspondente; e, assim, não depende da medida do raio; seu comprimento depende da medida do raio da circunferência. Professor, se desejar, use a figura da página 10 para ajudar os estudantes a compreenderem essa relação.

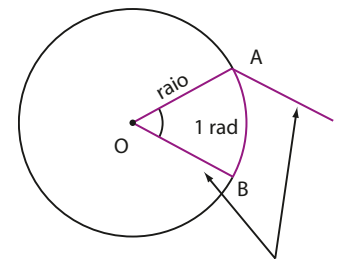
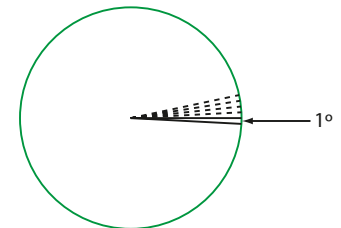
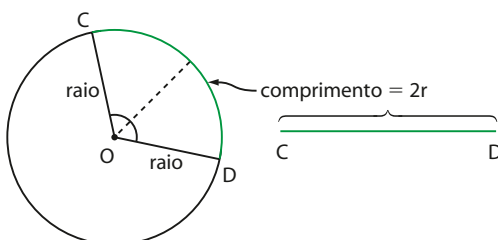
**PENSE NISTO:**

A medida angular de um arco depende da medida do raio da circunferência correspondente? E a medida do comprimento de um arco, depende?

## Unidades de medida de arcos e ângulos

Ao tratarmos da medida de um arco, adotamos o grau (°) ou radiano (rad).

- **1 grau** é a medida de um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência correspondente.
  Como sabemos, o grau possui submúltiplos importantes, como o **minuto** e o **segundo**.
  O arco de 1 minuto (indica-se 1′) corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1°; o arco de 1 segundo (indica-se 1″) corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1′.

- **1 radiano** é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência correspondente.
  O arco $\overset{\frown}{AB}$, ao lado, bem como seu ângulo correspondente AÔB, mede 1 rad.
  Já o arco $\overset{\frown}{CD}$ abaixo, bem como seu ângulo correspondente CÔD, mede 2 rad, pois seu comprimento é igual ao dobro da medida do raio.

Como sabemos, o comprimento **C** de uma circunferência de raio **r** é igual a $2\pi r$. Isso significa que o raio "cabe" $2\pi$ vezes nesse comprimento (aproximadamente 6,28 vezes).

Assim, um arco de comprimento igual a **r** mede 1 rad; um arco de comprimento igual a 2r mede 2 rad etc. Da mesma maneira, um arco de comprimento $2\pi r$ (volta completa) mede $2\pi$ rad. Concluímos, desse modo, que o arco de uma volta mede $2\pi$ rad ou 360°.

Observe as correspondências abaixo:

$$2\pi \text{ rad} \text{ ——— } 360°$$
$$\pi \text{ rad} \text{ ——— } 180°$$
$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} \text{ ——— } 90°$$
$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} \text{ ——— } 60°$$
$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} \text{ ——— } 45°$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

A relação "um arco de meia-volta mede 180° ou $\pi$ rad" servirá de base para efetuarmos as conversões de unidades de medidas de arcos, como mostram os exercícios resolvidos a seguir.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1** Um arco mede 30°. Qual é a medida desse arco em radianos?

**Solução:**

Podemos estabelecer a regra de três simples:

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} \text{ ——— } 180° \\ x \text{ ——— } 30° \end{cases}$$

Daí: $x = \dfrac{30° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$

**2** Em uma circunferência, um ângulo central mede $\frac{\pi}{4}$ radianos. Quanto mede esse ângulo em graus?

**Solução:**

Podemos estabelecer a regra de três simples:

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} \text{ ——— } 180° \\ \frac{\pi}{4} \text{ rad} \text{ ——— } x \end{cases}$$

Assim: $x = \dfrac{\frac{\pi}{4} \text{ rad} \cdot 180°}{\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = 45°$

**3** Quanto mede, em graus, um arco de 1 radiano?

**Solução:**

Como $\pi$ rad (ou 3,14 rad, aproximadamente) correspondem a 180°, podemos fazer:

$$\begin{cases} 3{,}14 \text{ rad} \text{ — } 180° \\ 1 \text{ rad} \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{180°}{3{,}14} \Rightarrow x \simeq 57{,}3° = 57°18'$$

1: Como 30° correspondem à 6ª parte de 180°, temos, em radianos, a sexta parte de $\pi$, que é $\frac{\pi}{6}$.
2: Como $\pi$ rad correspondem a 180°, $\frac{\pi}{4}$ rad correspondem a $\frac{180°}{4} = 45°$.
Professor, incentive o cálculo mental na transformação de graus para radianos (e vice-versa).

**PENSE NISTO:**

Como você poderia resolver mentalmente o exercício 1? E o exercício 2?

**PENSE NISTO:**

Explique por que 57,3° é igual a 57°18'.

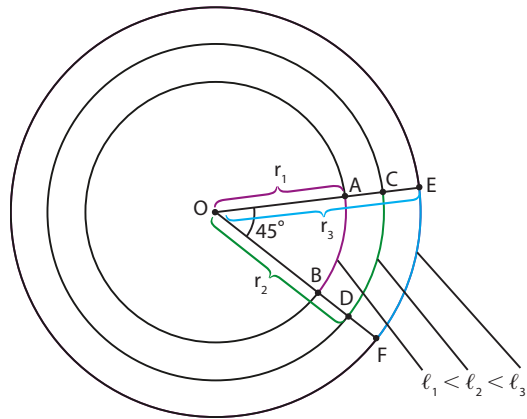
$57{,}3° = 57° + 0{,}3°$;
$0{,}3° = 0{,}3 \cdot 60' = 18'$ (18 minutos)

**OBSERVAÇÃO**

Quando a unidade de medida de um arco vier suprimida, fica convencionado que a medida deste arco é dada em radianos. Assim, por exemplo, quando dizemos que um arco $\overset{\frown}{AB}$ mede $\frac{\pi}{4}$, estamos dizendo que o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede $\frac{\pi}{4}$ radianos; se o arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 3, queremos dizer que o arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 3 radianos, e assim por diante.

## O comprimento de um arco

Quando medimos o comprimento de um arco, a unidade de medida utilizada é a mesma do raio: metro, centímetro, milímetro etc.

Observe que na figura ao lado o comprimento de um arco depende da medida do raio considerado: os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{EF}$ medem, cada um, 45° $\left(\text{ou } \frac{\pi}{4} \text{ rad}\right)$, mas seus comprimentos são diferentes.

Vamos calcular os comprimentos $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$ dos arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{EF}$, respectivamente:

- arco $\overset{\frown}{AB}$:

$$\begin{cases} 360° \text{ — } 2\pi r_1 \\ 45° \text{ — } \ell_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{360°}{45°} = \frac{2\pi r_1}{\ell_1} \Rightarrow 8 = \frac{2\pi r_1}{\ell_1} \Rightarrow \frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \ell_1 = \frac{\pi}{4} \cdot r_1$$

- arco $\overset{\frown}{CD}$:

$$\begin{cases} 360° \text{ — } 2\pi r_2 \\ 45° \text{ — } \ell_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{360°}{45°} = \frac{2\pi r_2}{\ell_2} \Rightarrow 8 = \frac{2\pi r_2}{\ell_2} \Rightarrow \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \ell_2 = \frac{\pi}{4} \cdot r_2$$

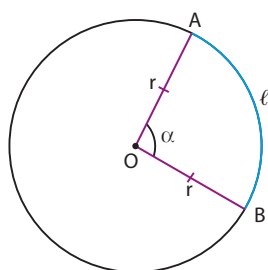
- arco $\overset{\frown}{EF}$:

$$\begin{cases} 360° \text{ — } 2\pi r_3 \\ 45° \text{ — } \ell_3 \end{cases} \Rightarrow \frac{360°}{45°} = \frac{2\pi r_3}{\ell_3} \Rightarrow 8 = \frac{2\pi r_3}{\ell_3} \Rightarrow \frac{\ell_3}{r_3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \ell_3 = \frac{\pi}{4} \cdot r_3$$

Mantida fixa a medida do ângulo central, o comprimento de um arco é diretamente proporcional ao raio da circunferência que o contém.

No exemplo, $\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\ell_3}{r_3} = \frac{\pi}{4}$.

Observe que a constante de proporcionalidade corresponde à medida do ângulo central, expressa em radianos. O ângulo central da figura mede 45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad.

Em geral, podemos escrever:

$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$ em que $\begin{cases} \alpha\text{: medida do arco em radianos} \\ \ell\text{: comprimento do arco} \\ r\text{: medida do raio da circunferência} \end{cases}$

O comprimento do arco coincide, numericamente, com a sua medida em radianos. É interessante já destacar esse fato, mostrando, antecipadamente, informações importantes para a apresentação da circunferência trigonométrica.

**PENSE NISTO:**

Na relação ao lado, o que acontece se r = 1?

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**4** Em uma circunferência de raio 3 cm, toma-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ de comprimento 4,5 cm. Qual é, em radianos, a medida desse arco?

**Solução:**

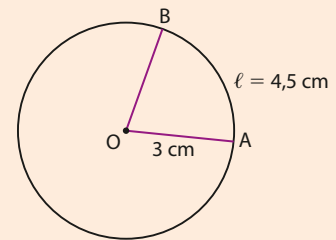
*1º modo*:

Podemos usar a relação $\alpha = \frac{\ell}{r}$, isto é: $\alpha = \frac{4,5}{3} = 1,5$ rad

*2º modo*:

Uma solução equivalente consiste em usar a definição da medida de 1 radiano, comparando a medida do arco com o seu comprimento:

$$\begin{array}{cc} \text{medida do arco} & \text{comprimento do arco} \end{array}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ rad} \text{ ——— } 3 \text{ cm} \\ x \text{ ——— } 4,5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow x = 1,5 \text{ rad}$$

**5** Qual é o comprimento de um arco de 72° sobre uma circunferência de raio 8 cm?

**Solução:**

*1º modo*:

- O comprimento da circunferência é $c = 2 \cdot \pi \cdot 8$ cm $= 16\pi$ cm.
  Podemos fazer:

$$\begin{cases} 16\pi \text{ cm} \text{ — } 360° \\ x \text{ — } 72° \end{cases} \Rightarrow x = \frac{16\pi}{5} \text{ cm (ou aproximadamente 10,05 cm)}$$

  Observe que $\frac{360°}{72°} = 5$; assim, o comprimento do arco é igual à quinta parte do comprimento da circunferência correspondente.

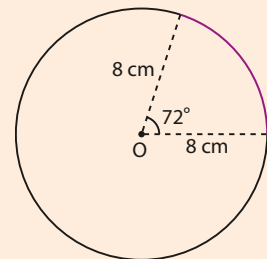
*2º modo*:

- Expressamos 72° em radianos:

$$\begin{cases} 180° \text{ — } \pi \text{ rad} \\ 72° \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

  Daí, usamos a relação:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} = \frac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = \frac{16\pi}{5}$$

  Portanto, o comprimento deste arco é $\frac{16\pi}{5}$ cm.

**6** Determine a medida do menor ângulo $\alpha$ formado entre os ponteiros de um relógio ao marcar 2 h 40 min.

**Solução:**

O ângulo pedido mede $\alpha$.

Observe que, entre duas marcas consecutivas de horas, tem-se um arco cujo ângulo central tem medida $\frac{360°}{12} = 30°$. Assim, considerando o deslocamento do "2 ao 8", temos que:

$$\alpha + x = 6 \cdot 30° \Rightarrow \alpha = 180° - x$$

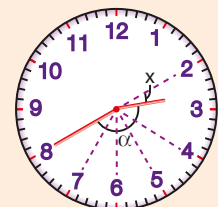
Em 1 hora (60 minutos), o ponteiro das horas percorre um arco de medida 30°.

Para calcular a medida **x** do ângulo percorrido pelo ponteiro das horas em 40 minutos, podemos estabelecer a proporção:

$$\begin{cases} 60 \text{ minutos} \text{ — } 30° \\ 40 \text{ minutos} \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x = 20°$$

Assim:

$$\alpha = 180° - 20° = 160°$$

CIT/ZAPT

## EXERCÍCIOS

**1** Expresse em radianos:

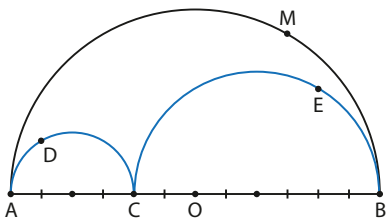
**a)** 30° **d)** 210° **g)** 20°
**b)** 15° **e)** 270° **h)** 150°
**c)** 120° **f)** 300° **i)** 315°

**2** Expresse em graus:

**a)** $\frac{\pi}{3}$ rad **d)** $\frac{\pi}{5}$ rad **g)** $\frac{2\pi}{9}$ rad
**b)** $\frac{\pi}{2}$ rad **e)** 0,5 rad **h)** $\frac{11\pi}{6}$ rad
**c)** $\frac{\pi}{4}$ rad **f)** $\frac{3\pi}{4}$ rad **i)** 3 rad

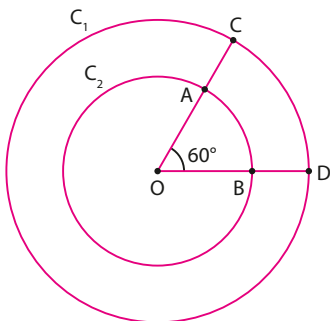
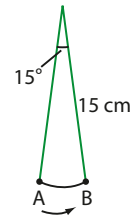
**3** Uma semicircunferência tem comprimento 188,4 m. Quanto mede seu raio? Considere $\pi \simeq 3,14$.

**4** Calcule o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ definido em uma circunferência de raio 8 cm por um ângulo central $A\hat{O}B$ de medida 120°.

**5** Considerando que, na figura abaixo, $\overline{AB}$ está dividido em 12 partes iguais, qual é o percurso mais curto sobre as semicircunferências: AMB ou ADCEB?

**6** Na figura, as circunferências $C_1$ e $C_2$ têm mesmo centro **O** e raios de medidas $R_1$ e $R_2$, respectivamente, tais que $2R_1 = 3R_2$.

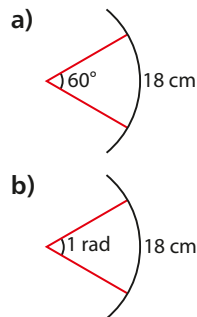
Determine:

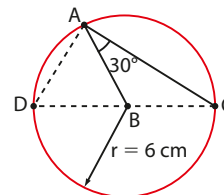
**a)** as medidas dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, em radianos;

**b)** a razão entre os comprimentos de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, nesta ordem.

**7** Um pêndulo de 15 cm de comprimento oscila entre **A** e **B** descrevendo um ângulo de 15°. Qual é o comprimento da trajetória descrita pela sua extremidade entre **A** e **B**? Use $\pi \simeq 3,14$.

**8** Um andarilho caminhou 7 536 m, em uma pista circular de 40 m de raio. Quantas voltas ele deu na pista? Considere $\pi \simeq 3,14$.

**9** Determine a medida do raio da circunferência em cada caso:

**a)**

**b)**

Use $\pi \simeq 3,14$.

**10** Na figura, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AC}$ e o triângulo CAD está inscrito em uma semicircunferência cujo raio mede 6 cm. Considerando o arco $\overset{\frown}{AD}$ que não contém o ponto **C**, determine:

**a)** sua medida, em radianos;
**b)** seu comprimento, em centímetros.

**11** Um automóvel percorre 157 m em uma pista circular, descrevendo um arco de 72°. Determine a medida do raio da curva. Use $\pi \simeq 3,14$.

Elementos sem proporção entre si.

**12** Determine a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógio ao marcar:

**a)** 3 h
**b)** 8 h 30 min
**c)** 3 h 45 min
**d)** 5 h 40 min
**e)** 9 h 35 min

**13** O ponteiro dos minutos de um relógio tem comprimento de 12 cm. Qual é a distância que a ponta do ponteiro percorre num intervalo de tempo de 20 minutos? Use $\pi \simeq 3{,}1$.

**14** Na figura, as circunferências de mesmo raio têm centros em **A**, **B**, **C** e **D** e são tangentes exteriormente. Os pontos **E**, **F**, **G** e **H** são pontos de tangência.

Sabendo que $AC = 10\sqrt{2}$ cm, determine o comprimento do trajeto $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \widehat{EH} + \widehat{HG} + \widehat{GF} + \widehat{FE} + \overline{EA}$.

# Circunferência trigonométrica

Fixemos dois eixos perpendiculares cruzando-se em **O** e orientados conforme as indicações: o vertical, para cima, e o horizontal, para a direita.

No sistema assim descrito, consideremos uma circunferência com centro **O** e raio unitário (isto é, raio de medida igual a 1).

O círculo limitado por essa circunferência fica dividido em quatro partes iguais denominadas **quadrantes** (**Q**) e indicadas na figura por 1º Q, 2º Q, 3º Q e 4º Q.

Vamos convencionar que todos os arcos tomados nessa circunferência têm origem no ponto A(1, 0) — interseção da circunferência com o semieixo horizontal positivo — e o sentido positivo é o anti-horário.

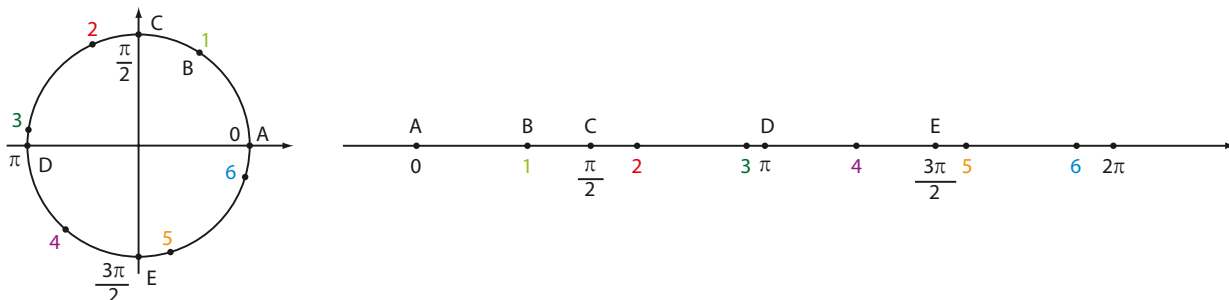
Construímos, deste modo, a **circunferência trigonométrica**.

## Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica

Como o raio é unitário, o comprimento da circunferência trigonométrica é $2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$ (aproximadamente 6,28) unidades de medida de comprimento.

Vamos associar a cada número real **x**, $0 \leqslant x < 2\pi$, um único ponto **P** da circunferência trigonométrica, de modo que:

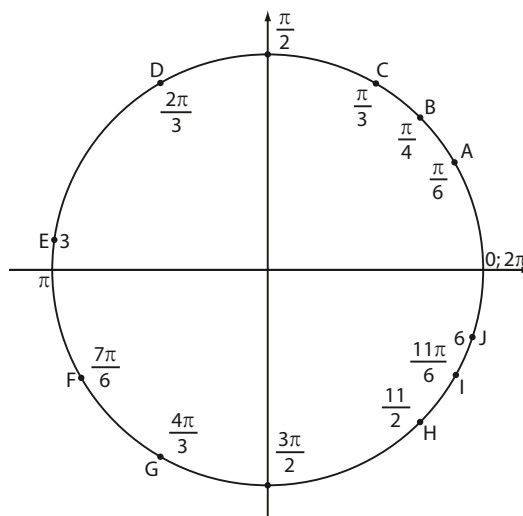
- se $x = 0$, o ponto **P** coincide com o ponto A(1, 0);
- se $x > 0$, descrevemos, a partir de **A**, no sentido anti-horário, um arco de comprimento **x** cujas extremidades são **A** e **P**.

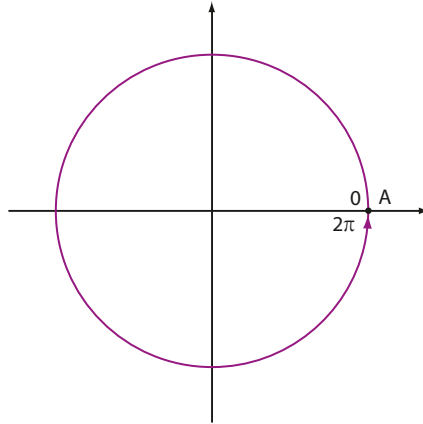
Observe a associação seguinte:

Temos que:

- O arco $\overset{\frown}{AC}$ corresponde a $\frac{1}{4}$ do arco de uma volta completa.
  Seu comprimento é $\frac{\pi}{2}$ (aproximadamente 1,57), que é a quarta parte de $2\pi$. Note, também, que sua medida é $\frac{\pi}{2}$ radianos (ou 90°). Dizemos que **C** é imagem do número real $\frac{\pi}{2}$.
- O arco $\overset{\frown}{AD}$ corresponde à metade do arco de uma volta completa.
  Seu comprimento é $\pi$ (aproximadamente 3,14), que é a metade de $2\pi$. Observe que sua medida é $\pi$ radianos (ou 180°). Dizemos que **D** é imagem do número real $\pi$.
- O arco $\overset{\frown}{AE}$ corresponde a $\frac{3}{4}$ do arco de uma volta completa e seu comprimento é, portanto, $\frac{3}{4}$ de $2\pi$, isto é, $\frac{3\pi}{2}$.
  Sua medida é $\frac{3\pi}{2}$ radianos (ou 270°). O ponto E é imagem do número real $\frac{3\pi}{2}$.
- O arco $\overset{\frown}{AB}$ tem comprimento igual a 1 e sua medida é 1 rad (observe que o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ é igual à medida do raio). O ponto **B** é imagem do número real 1.
  ⋮
  e assim por diante.

Ao fazermos essa associação, é importante lembrar que a medida ($\alpha$) de um arco, em radianos, coincide numericamente, na circunferência trigonométrica, com o seu comprimento ($\ell$), pois, como $\alpha = \frac{\ell}{r}$ e $r = 1$, temos $\alpha = \ell$.

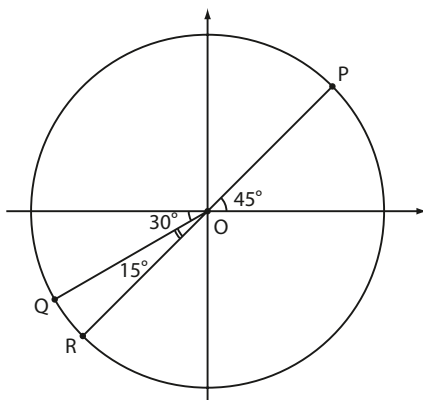
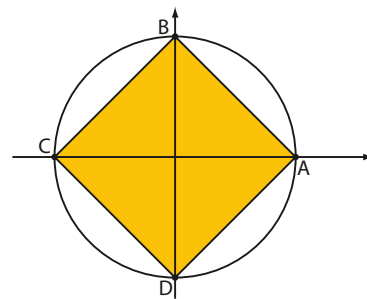
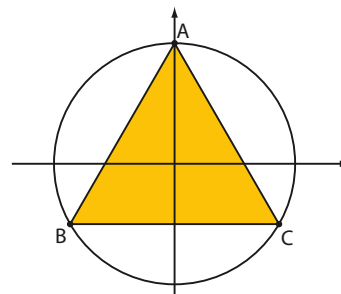
**EXEMPLO 1**

Observe, na circunferência trigonométrica ao lado, as imagens **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I** e **J**, correspondentes aos números reais $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, 3, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{11\pi}{6}$ e 6, respectivamente.

**OBSERVAÇÃO**

Estamos considerando, por enquanto, a associação de um número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$ a um ponto da circunferência trigonométrica.
No capítulo 4, é apresentada a associação de um número real qualquer a um ponto da circunferência trigonométrica. Antecipadamente, observe que a imagem do número real $2\pi$ é o ponto A(1, 0): trata-se da extremidade "final" do arco de uma volta completa, de medida $2\pi$ radianos (ou 360°) e comprimento $2\pi$.

## EXERCÍCIOS

**15** Marque, na circunferência trigonométrica, os pontos correspondentes aos seguintes números reais: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

**16** Agrupe, por quadrante, os pontos correspondentes aos seguintes números reais: $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, 2, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{5}, \frac{5\pi}{9}, \frac{4}{3}, \frac{7\pi}{12}, \sqrt{7}, \frac{15\pi}{8}, \frac{15\pi}{11}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}$ e 5.

**17** Sejam os pontos **P**, **Q** e **R** da circunferência trigonométrica seguinte. Qual é o número real **x**, com $0 \leqslant x < 2\pi$, associado ao ponto **P**? E ao ponto **Q**? E ao ponto **R**?

**18** O quadrado ABCD está inscrito na circunferência trigonométrica. Determine, para cada vértice, o número real **x**, com $0 \leqslant x < 2\pi$, associado.

**19** O triângulo equilátero ABC está inscrito na circunferência trigonométrica seguinte. Quais são os números reais **x**, com $0 \leqslant x < 2\pi$, que têm imagens nos vértices do triângulo?

## Simetrias

Na circunferência trigonométrica, vamos estudar três tipos de simetrias: em relação ao eixo vertical, em relação ao eixo horizontal e em relação ao centro.

Para o estudo de cada uma delas, tomaremos um arco de medida **a** radianos, do 1º quadrante, correspondente ao número real **a**, com $0 \leqslant a < \frac{\pi}{2}$.

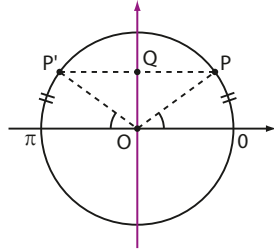
Seja **P** a imagem do número real **a**:

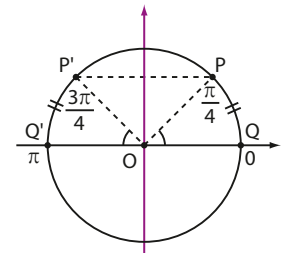
- **Simetria em relação ao eixo vertical**

  O simétrico de **P** em relação ao eixo vertical é o ponto **P'**, imagem do número real $\pi - a$, visto que os ângulos centrais assinalados na figura são congruentes.

**PENSE NISTO:**

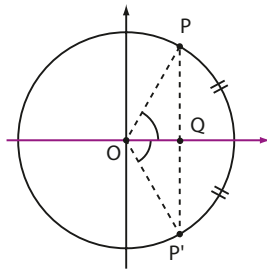
Por que os triângulos POQ e P'OQ da figura ao lado são congruentes?

Os triângulos são retângulos, têm um lado comum e hipotenusas iguais ao raio.

**EXEMPLO 2**

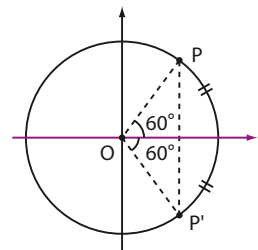
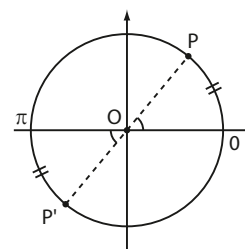
Os pontos **P** e **P'**, imagens dos números reais $\frac{\pi}{4}$ e $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, respectivamente, são simétricos em relação ao eixo vertical. O mesmo ocorre com **Q** e **Q'**, imagens de 0 e $\pi$, respectivamente.

- **Simetria em relação ao eixo horizontal**

  Levando em conta a congruência entre os ângulos centrais assinalados na figura, podemos afirmar que o número real que possui imagem simétrica à imagem de **a** é o número $2\pi - a$.

**PENSE NISTO:**

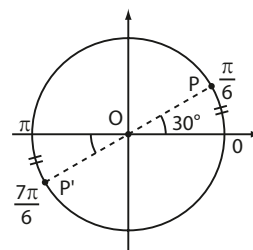
Por que os triângulos POQ e P'OQ da figura ao lado são congruentes?

Observe que os triângulos são retângulos e congruentes (a hipotenusa de ambos é igual ao raio e um dos lados é comum).

**EXEMPLO 3**

Em relação ao eixo horizontal, são simétricos os pontos **P** e **P'** (note a congruência entre os ângulos assinalados). Os pontos **P** e **P'** são as imagens dos números reais $\frac{\pi}{3}$ e $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, respectivamente.

- **Simetria em relação ao centro**
  Quando dois pontos são diametralmente opostos, como **P** e **P'** da figura, é possível afirmar que o número real com imagem em **P** é **a** e em **P'** é $a + \pi$, pois os ângulos assinalados na figura são congruentes.

EXEMPLO 4

Os pontos correspondentes aos números reais $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ são simétricos em relação ao centro da circunferência.

Note que:

$$\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} = \pi$$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**20** Marque, na circunferência trigonométrica, os pontos correspondentes aos números $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$. Cite a simetria, se houver.

**21** Proceda da mesma forma que no exercício anterior para:

**a)** $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{3}$

**b)** $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$

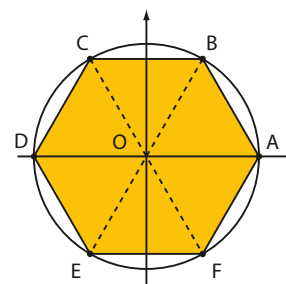
**c)** $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{9\pi}{8}$

**d)** $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$

**22** Considere o número real $\frac{11\pi}{10}$.

**a)** Em que quadrante se encontra a imagem **P** desse número?

**b)** Os pontos simétricos de **P** em relação ao eixo horizontal, ao eixo vertical e ao centro da circunferência trigonométrica são, respectivamente, os pontos **Q**, **R** e **S**. Obtenha os números reais associados a esses pontos.

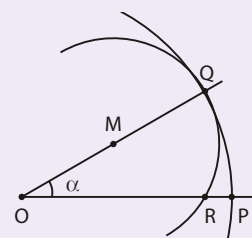
**23** Na figura ao lado o hexágono regular ABCDEF está inscrito na circunferência trigonométrica. O vértice **A** é imagem do número real zero.

**a)** Os demais vértices do hexágono são imagens de números reais pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi[$. Determine esses números.

**b)** Obtenha o perímetro e a área do hexágono ABCDEF.

**24** Divide-se a circunferência trigonométrica em 8 partes iguais, sendo A(1, 0) um dos pontos de divisão. Obtenha os números reais **x**, com $0 \leq x < 2\pi$ cujas imagens são os pontos de divisão.

## DESAFIO

Na figura, o arco $\overset{\frown}{PQ}$ pertence à circunferência de centro **O**. Sua medida, em radianos, é $\alpha$ e seu comprimento é 5 cm.

Com centro em **M**, ponto médio de $\overline{OQ}$, traçamos uma circunferência que contém o arco $\overset{\frown}{QR}$ e tangencia internamente a outra circunferência no ponto **Q**. Determine o comprimento de $\overset{\frown}{QR}$.

Aplicações

# Medindo distâncias inacessíveis

## Matemática e Astronomia



**Na Antiguidade, os gregos exerceram um papel importante no desenvolvimento de diversos ramos do conhecimento humano. Movidos talvez pela curiosidade ou fascínio pelos astros, empreenderam incursões interessantes em assuntos de astronomia. Um deles foi Eratóstenes, que conseguiu estimar o comprimento da circunferência da Terra a partir da observação das sombras formadas pela luz solar.**

### O estádio

Eratóstenes calculou a distância entre Siena e Alexandria com base no tempo de viagem das caravanas, que percorriam a média de 100 estádios por dia. Estádio era a unidade de medida de comprimento usada pelos gregos, que equivale a aproximadamente 157 metros. Para ir de uma cidade à outra, as caravanas levavam, em média, 50 dias e, ao calcular essa distância com a unidade de medida da época, Eratóstenes chegou a 5 mil estádios, aproximadamente 785 quilômetros.

### Alexandria

Ele pensou em observar a inclinação dos raios solares em Alexandria, outra cidade egípcia ao sul de Siena, no solstício de verão do ano seguinte. Eratóstenes observou que um objeto, provavelmente uma vareta ou coluna fincada no solo, em área aberta, fazia sombra ao meio-dia.

Ele verificou que o ângulo ($\theta$) formado entre a coluna e os raios solares era de 7,2°.

- Considerando o prolongamento das linhas verticais a partir de uma coluna perpendicular ao solo em Siena (**S**) e outro em Alexandria (**A**), deduziu que essas linhas deveriam se encontrar no centro da Terra (**C**), determinando um ângulo $\theta$. Note que $AC = SC = R$.
- Considerando que os raios do Sol são retas paralelas interceptadas por uma transversal (reta **r**), ele pôde concluir que o ângulo $\theta$ formado entre elas também media 7,2°.

### Siena

Eratóstenes sabia que, no solstício de verão do Hemisfério Norte, os raios solares atingiam perpendicularmente a superfície de Siena (atual Assuã). Ele percebeu isso ao observar que, ao meio-dia, a luz atingia o fundo de um grande poço; obeliscos e colunas não faziam sombra ao meio-dia.

### Solstícios e equinócios

**O solstício ocorre duas vezes ao ano, quando a luz do Sol atinge de forma mais intensa um dos hemisférios da Terra: em junho é verão no Hemisfério Norte e em dezembro é verão no Hemisfério Sul.**
**Entre os dois solstícios há os equinócios de março e setembro, períodos do ano em que a luz solar atinge da mesma maneira os dois hemisférios, fazendo dias e noites terem a mesma duração.**
**Cada um dos solstícios e equinócios marca o início de uma das quatro estações do ano: verão, outono, inverno e primavera.**

### Eratóstenes

**Eratóstenes (Cirene, 276 a.C. – Alexandria, 194 a.C.) era bibliotecário em Alexandria e aprofundou seus estudos na área da Matemática. Nascido na Grécia, ele se dedicou também à Gramática, à Geografia e à Astronomia. É considerado um importante colaborador para a Geografia, por ter criado e adotado um vocabulário próprio para esse ramo do saber.**

## Circunferência e raio da Terra

**7,2º equivalem a 5 000 estádios**
**aproximadamente 785 km**

**360º equivalem a 250 000 estádios**
**aproximadamente 39 250 km**

Como 7,2° equivalem a $\frac{1}{50}$ de 360°, e sabendo que Alexandria estava a 5 mil estádios de Siena, concluiu também que a distância entre as duas cidades corresponderia a $\frac{1}{50}$ do comprimento da circunferência da Terra. Multiplicou 50 por 5 mil e obteve o comprimento da circunferência terrestre de 250 mil estádios, aproximadamente 39 250 quilômetros.
Como o comprimento da circunferência é dado por $2\pi r$, sendo **r** a medida do raio, para obter a medida do raio terrestre, basta fazer:

$$\frac{39\,250}{2\pi}$$

o que daria um resultado próximo a 6 250 km.

### Medidas atuais da Terra

**Hoje sabemos que, considerando o achatamento que existe nos polos, o raio polar terrestre é de aproximadamente 6 357 quilômetros e que o comprimento da circunferência polar é de 39 942 quilômetros.**
**Ou seja, podemos afirmar que Eratóstenes obteve com seu método medidas surpreendentemente próximas das conhecidas atualmente, considerando a precariedade dos instrumentos utilizados. Por exemplo, qual teria sido a precisão da medida angular feita inicialmente? Além disso, ele considerou que as duas cidades estavam sob o mesmo meridiano, o que hoje, sabe-se, não é exato. Na verdade, há uma diferença de cerca de 3°.**
**Ainda assim, sua iniciativa é plena de méritos, como também seus outros trabalhos nas áreas de Aritmética e Geografia.**

**Fontes de pesquisa:** BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.; Eratóstenes, um gênio do tamanho da Terra. Disponível em: <www.mat.ibilce.unesp.br/ciencia/docs/Mini-Curso-Eratostenes,-Um-Genio-do-Tamanho-da-Terra.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

CAPÍTULO 2

# Razões trigonométricas na circunferência

No estudo das razões trigonométricas para ângulos agudos em um triângulo retângulo são definidos sen $\alpha$, cos $\alpha$ e tg $\alpha$ para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Vamos agora estender o conceito de seno, cosseno e tangente para um número real $\alpha$, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

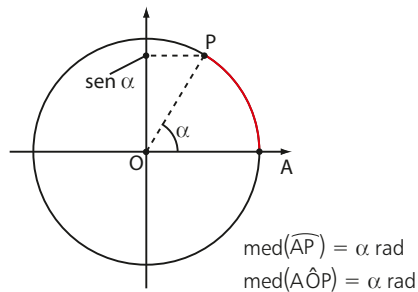
## Seno

Seja **P** um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real $\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

Definimos o **seno de** $\alpha$ como a ordenada do ponto **P**:

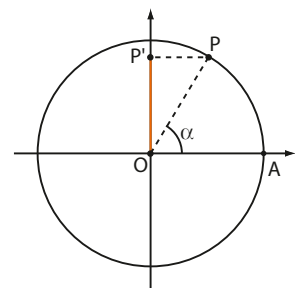
sen $\alpha$ = ordenada de **P**

$\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$ rad

$\text{med}(A\hat{O}P) = \alpha$ rad

Observe que, projetando ortogonalmente o ponto **P** sobre o eixo vertical, obtemos o ponto **P'**.

Considerando o sentido positivo ("para cima") do eixo vertical e tomando o segmento $\overline{OP'}$, podemos também definir o seno de $\alpha$ como a **medida algébrica** desse segmento, isto é,

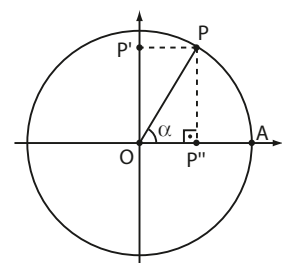
$$\text{sen } \alpha = \text{med}(\overline{OP'})$$

Daqui em diante, o eixo vertical da circunferência trigonométrica será chamado **eixo dos senos**.

**OBSERVAÇÃO**

Observe a figura ao lado. Ela nos permite compreender que a definição anterior é "compatível" com a definição apresentada no estudo da trigonometria do triângulo retângulo:

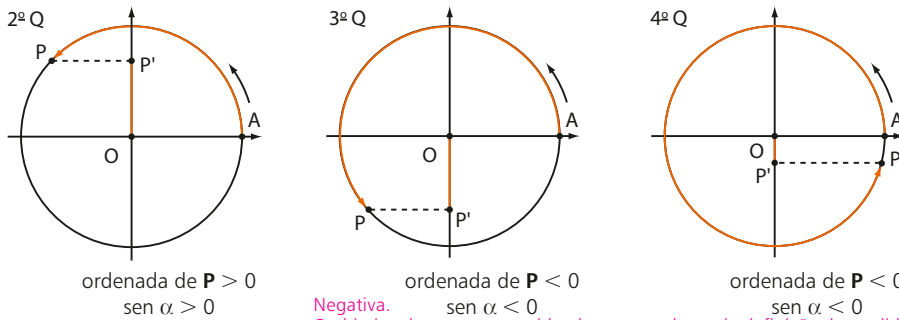
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}};\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Traçando o segmento $\overline{PP''}$ // $\overline{OP'}$, temos no $\triangle OPP''$:

$$\text{sen } A\hat{O}P = \text{sen } \alpha = \frac{PP''}{OP} = \frac{PP''}{1} = PP'' = OP' = \text{med}(\overline{OP'})$$

O mesmo procedimento é utilizado quando **P** ocupa posições nos demais quadrantes. Considerando o sentido positivo "para cima" do eixo dos senos, observe o sinal do seno de um número real $\alpha$ em cada quadrante, à medida que varia a posição de **P** (**P** é imagem de $\alpha$).

ordenada de **P** $> 0$
sen $\alpha > 0$

ordenada de **P** $< 0$
sen $\alpha < 0$

ordenada de **P** $< 0$
sen $\alpha < 0$

No 3º e no 4º quadrantes a medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$ é positiva ou negativa?

Negativa.
O objetivo dessa pergunta é lembrar o estudante da definição de medida algébrica de um segmento. Se **P**' está acima de **O**, então med($\overline{OP'}$) $> 0$ e se **P**' está abaixo de **O**, então med($\overline{OP'}$) $< 0$. É importante também lembrar o estudante da notação que utilizamos, nesta coleção, para a medida algébrica de um segmento.

**OBSERVAÇÃO**

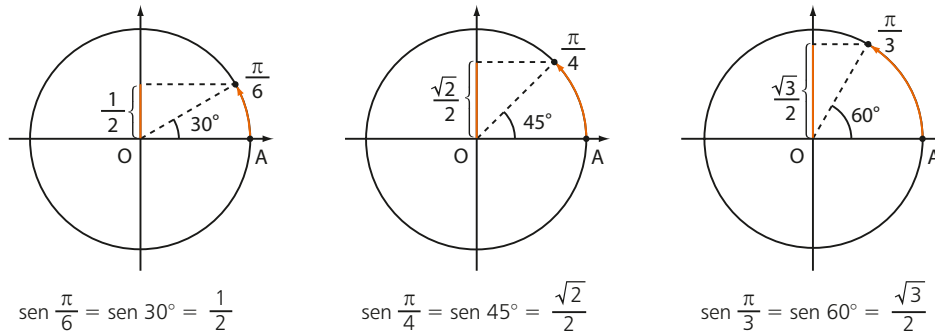
Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário, temos que, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, $-1 \leqslant \text{sen}\ \alpha \leqslant 1$, uma vez que a ordenada de qualquer ponto da circunferência trigonométrica varia de $-1$ a 1.

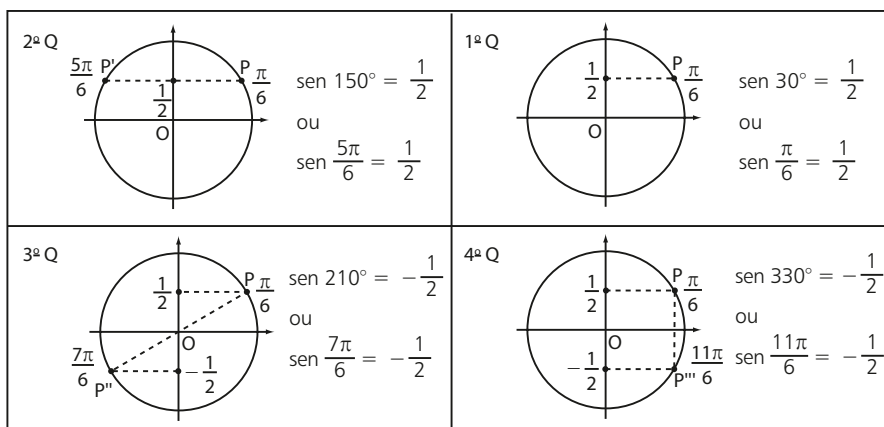
## Valores notáveis

Já estamos familiarizados com o seno de alguns números reais, como $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$:

$\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \text{sen}\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Usando os valores acima, é possível obter, por simetria, o seno de outros números reais.

Acompanhe, na sequência dos quadrantes abaixo, os valores dos senos de números reais correspondentes a pontos simétricos de **P**, sendo **P** a imagem de $\frac{\pi}{6}$:

Observe que determinamos o valor do seno de um número real comparando-o com o seno de um outro número real $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ cuja imagem pertence ao 1º quadrante. Esse processo é conhecido como **redução ao primeiro quadrante**.

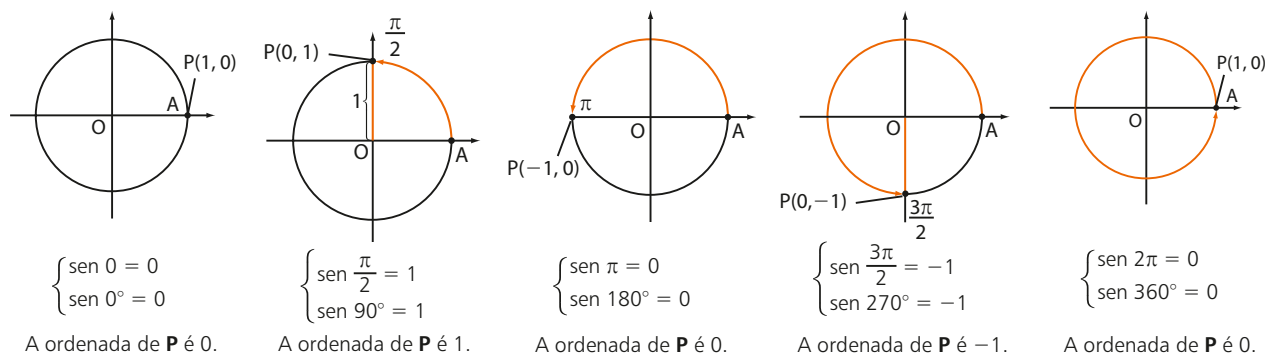
Também é possível obter o valor do seno de números reais cujas imagens **P** coincidem com os pontos de interseção da circunferência trigonométrica com os eixos coordenados:

$\begin{cases} \text{sen } 0 = 0 \\ \text{sen } 0° = 0 \end{cases}$ A ordenada de **P** é 0.

$\begin{cases} \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1 \\ \text{sen } 90° = 1 \end{cases}$ A ordenada de **P** é 1.

$\begin{cases} \text{sen } \pi = 0 \\ \text{sen } 180° = 0 \end{cases}$ A ordenada de **P** é 0.

$\begin{cases} \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1 \\ \text{sen } 270° = -1 \end{cases}$ A ordenada de **P** é −1.

$\begin{cases} \text{sen } 2\pi = 0 \\ \text{sen } 360° = 0 \end{cases}$ A ordenada de **P** é 0.

Professor, em alguns modelos de calculadora, a sequência de teclas que devem ser pressionadas pode ser diferente. Em alguns modelos, o cálculo de sen 36°, por exemplo, é feito pressionando as teclas: 3 → 6 → sin → =

## Na calculadora

Nas calculadoras científicas, é possível obter o valor do seno (e de outras razões trigonométricas, como veremos adiante) de um arco qualquer expresso em graus ou em radianos.

- Em graus, é preciso ajustar a calculadora na configuração DEG (*degree*, em inglês, significa grau) utilizando a tecla MODE.

  Para obtermos o valor de sen 36°, por exemplo, é preciso seguir a sequência abaixo:
  Primeiro ajustamos a configuração da calculadora para "graus":

  MODE → DEG

  Em seguida, utilizamos a tecla sin que fornece o valor do seno:

  sin → 3 6 → = → 0.587785252

  Obtemos o valor aproximado 0,587785252.

- Em radianos, é preciso ajustar a calculadora na configuração RAD, usando-se a tecla MODE.
  Para obtermos o valor de sen $\frac{\pi}{5}$ $\left(\frac{\pi}{5}\text{ corresponde a } 36°\right)$, é preciso seguir a sequência abaixo:

  Ajustamos a configuração para "radianos":

  Obtemos o valor aproximado 0,587785252.
  Observe a importância do uso dos parênteses: se pressionássemos

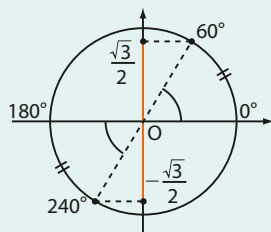
  sin → π → ÷ → 5, a calculadora "entenderia" a operação: $\frac{\text{sen } \pi}{5}$, que é, obviamente, diferente de sen$\left(\frac{\pi}{5}\right)$ e obteríamos, como resultado, o número zero, pois sen $\pi = 0$.

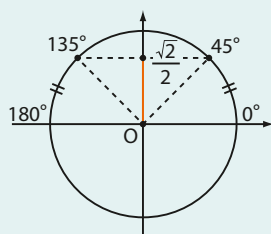
## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

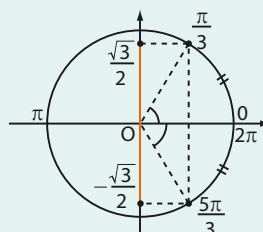
**1** Qual é o valor de:

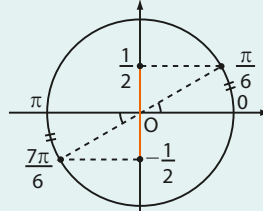
**a)** sen 240°? **b)** sen 135°? **c)** sen $\frac{5\pi}{3}$? **d)** sen $\frac{7\pi}{6}$?

**Solução:**

**a)**

$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**b)**

$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**c)** Observe, inicialmente, que $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$:

$$\text{sen } \frac{5\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**d)** Note que $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$:

$$\text{sen } \frac{7\pi}{6} = -\text{sen } \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

**2** Utilizando a tabela trigonométrica, obtenha o valor de sen 200°. Confira a resposta usando uma calculadora científica.

**Solução:**

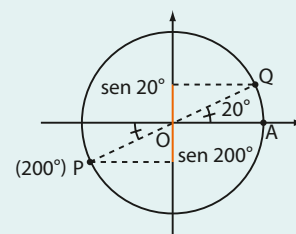
No cálculo de sen 200° podemos traçar, a partir do ponto **P**, o diâmetro da circunferência, obtendo o ponto **Q** no 1º quadrante.

Temos: med$(A\hat{O}Q) = 200° - 180° = 20°$.

Daí, sen 200° = −sen 20°.

Na tabela trigonométrica da página 276, temos: −sen 20° = −0,34202.

Na calculadora, basta pressionar

desde que ela esteja configurada na opção DEG. Obtemos o valor aproximado −0,342020143.

**3** Resolva a equação sen x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo U = [0, 2π[.

**Solução:**

Devemos determinar todos os números reais **x**, com $0 \leqslant x < 2\pi$, tal que sen x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

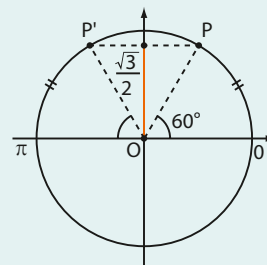
Marcamos no eixo dos senos a ordenada $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Observe que tanto **P** como **P'** têm ordenada $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como sen $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, temos que **P** é imagem de $\frac{\pi}{3}$, e **P'** é imagem de $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**1** Calcule o valor da seguinte expressão:

$$y = \frac{\text{sen } 0 + \text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } \frac{3\pi}{2}}{2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{6}}$$

**2** Dê o valor de:

**a)** sen $\frac{3\pi}{2}$

**b)** sen $\pi$

**c)** sen 120°

**d)** sen 150°

**e)** sen 225°

**f)** sen 300°

**g)** sen $2\pi$

**h)** sen 330°

**3** Localize os números reais $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ na circunferência trigonométrica. Em seguida, forneça o seno de cada um deles.

**4** Identifique os pares de números reais que possuem o mesmo seno:

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

**5** Sem consultar a tabela trigonométrica, compare os pares de valores seguintes:

**a)** sen 75° e sen 85°

**b)** sen 100° e sen 170°

**c)** sen 260° e sen 250°

**d)** sen 300° e sen 290°

**6** Com auxílio da tabela trigonométrica da página 276, calcule:

**a)** sen 130°

**b)** sen 230°

**c)** sen 320°

**d)** sen $\frac{\pi}{5}$

**e)** sen $\frac{3\pi}{5}$

**7** Determine o sinal de:

**a)** sen 3°

**b)** sen 3

**c)** sen 5

**d)** sen 100°

**e)** sen 200°

**8** Sabendo que sen $\frac{\pi}{7} = a$, responda:

**a)** $a > 0$ ou $a < 0$?

**b)** qual é o valor de sen $\frac{8\pi}{7}$, em função de **a**?

**9** Resolva as equações seguintes, sendo $U = [0, 2\pi[$.

**a)** $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

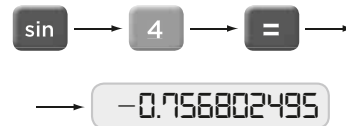
**b)** $\text{sen } x = 0$

**c)** $\text{sen } x = -1$

**d)** $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**e)** $\text{sen } x = 2$

**f)** $4 \cdot \text{sen}^2 x - 3 = 0$

**10** Com uma calculadora científica, Joel desejava obter o valor de sen 4°, que ele sabia que era um número real positivo, pois 4° é um arco com imagem no 1º quadrante. Ao pressionar, obteve:

Explique a contradição encontrada. O que pode ter ocorrido?

## Cosseno

Seja **P** um ponto sobre a circunferência trigonométrica, imagem do número real $\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

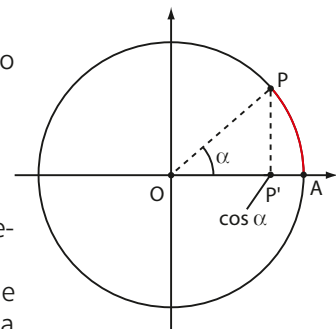
Definimos o cosseno de $\alpha$ como a abscissa do ponto **P**:

$$\cos \alpha = \text{abscissa de } \mathbf{P}$$

Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto **P** sobre o eixo horizontal, obtemos o ponto **P'**.

Considerando o sentido positivo ("para a direita") do eixo horizontal e tomando o segmento $\overline{OP'}$, podemos também definir o **cosseno de** $\alpha$ como a **medida algébrica** desse segmento, isto é:

$$\cos \alpha = \text{med}(\overline{OP'})$$

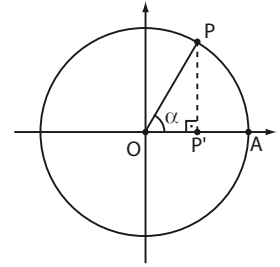
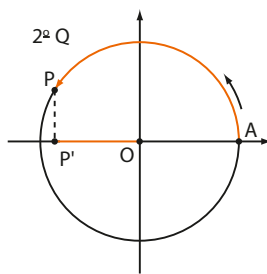
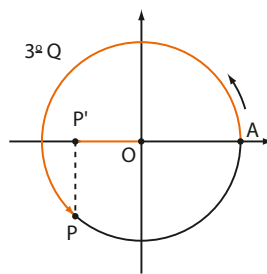
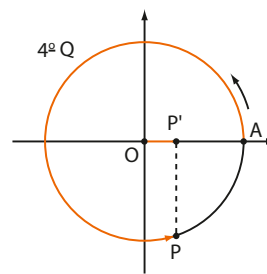
A partir desse momento, o eixo horizontal da circunferência trigonométrica será chamado **eixo dos cossenos**.

$\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$ rad

$\text{med}(A\hat{O}P) = \alpha$ rad

**OBSERVAÇÃO**

Na figura ao lado, é possível compreender que a definição anterior é "compatível" com a definição apresentada no estudo da trigonometria do triângulo retângulo:

$\cos \alpha = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$, com $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

No triângulo retângulo POP', temos: $\cos A\hat{O}P = \cos \alpha = \dfrac{OP'}{OP} = \dfrac{OP'}{1} = OP' = med(\overline{OP'})$

O mesmo procedimento é utilizado quando **P** (imagem do número real α) ocupa posições nos demais quadrantes. Lembre-se de que o sentido positivo do eixo dos cossenos é para a direita.

abscissa de **P** $< 0$
$\cos \alpha < 0$

abscissa de **P** $< 0$
$\cos \alpha < 0$

abscissa de **P** $> 0$
$\cos \alpha > 0$

**PENSE NISTO:**

Qual é o sinal da medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$ quando **P** está no 2º quadrante? E no 3º?

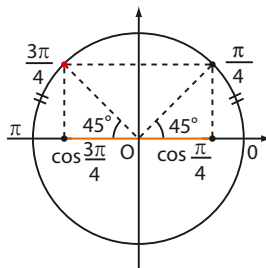
No 2º e 3º quadrantes a medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$ é negativa.
De fato, se **P'** está à direita de **O**, então $med(\overline{OP'}) > 0$ (veja 1º e 4º quadrantes). Se **P'** está à esquerda de **O**, então $med(\overline{OP'}) < 0$ (2º e 3º quadrantes).

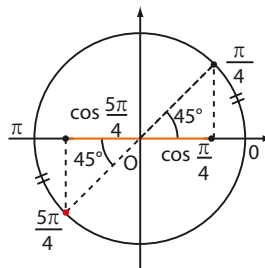
Observe que o cosseno de um arco qualquer, na circunferência trigonométrica, varia entre $-1$ e 1 (a exemplo do seno), isto é, $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$.

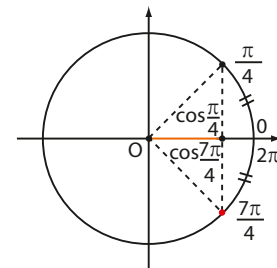
## Valores notáveis

Utilizando os valores dos ângulos notáveis, é possível obter, por simetria, o cosseno de outros números reais.

**EXEMPLO 1**

A partir de $\cos \dfrac{\pi}{4} = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, vamos obter os valores de $\cos \dfrac{3\pi}{4}$, $\cos \dfrac{5\pi}{4}$ e $\cos \dfrac{7\pi}{4}$.

$\cos \dfrac{3\pi}{4} = -\cos \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135° = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \dfrac{5\pi}{4} = -\cos \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 225° = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \dfrac{7\pi}{4} = \cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 315° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

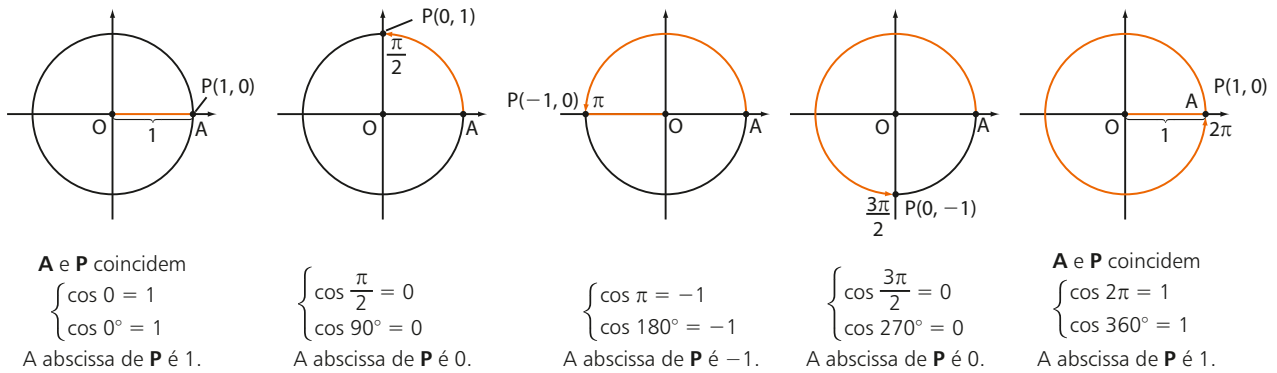
Vamos, agora, obter o valor do cosseno de números reais cujas imagens **P** coincidem com os pontos de interseção da circunferência trigonométrica com os eixos coordenados:

**A** e **P** coincidem
$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \cos 0° = 1 \end{cases}$
A abscissa de **P** é 1.

$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \cos 90° = 0 \end{cases}$
A abscissa de **P** é 0.

$\begin{cases} \cos \pi = -1 \\ \cos 180° = -1 \end{cases}$
A abscissa de **P** é −1.

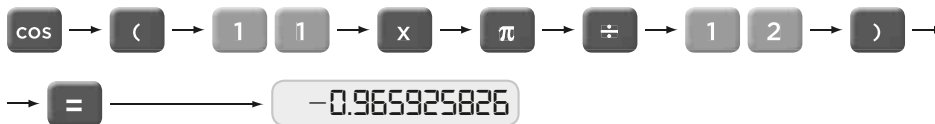
$\begin{cases} \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ \cos 270° = 0 \end{cases}$
A abscissa de **P** é 0.

**A** e **P** coincidem
$\begin{cases} \cos 2\pi = 1 \\ \cos 360° = 1 \end{cases}$
A abscissa de **P** é 1.

Na obtenção dos valores do cosseno de um arco qualquer, medido em graus ou radianos, valem todos os comentários apresentados para o seno. Na calculadora científica, a tecla usada para obtenção dos valores do cosseno é cos.

**PENSE NISTO:**

Na figura central (considerando as cinco acima), qual é a medida algébrica de $\overline{OP}$?

med($\overline{OP}$) = −1, pois o sentido positivo do eixo dos cossenos é para a direita.

Por exemplo, no cálculo de $\cos \frac{11\pi}{12}$ (lembre que o número $\frac{11\pi}{12}$ tem imagem no 2º quadrante), ajustamos a calculadora na configuração RAD e pressionamos:

Obtemos o valor aproximado −0,965925826.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**4** Obtenha, por redução ao primeiro quadrante, os valores abaixo.

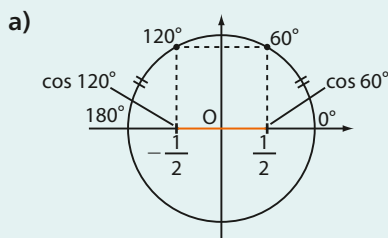
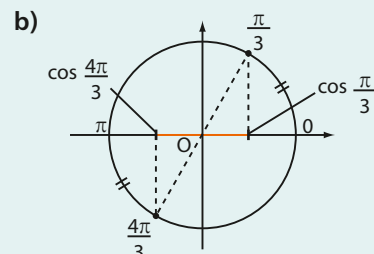
**a)** cos 120°

**b)** $\cos \frac{4\pi}{3}$

**Solução:**

**a)**

$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

**b)**

$\cos \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

## EXERCÍCIOS

**11** Calcule o valor de cada expressão seguinte:

**a)** $y = \dfrac{\cos 90° - \cos 180°}{\cos 60° \cdot \cos 0° + \cos 90°}$

**b)** $x = \cos \dfrac{\pi}{4} \cdot \cos \dfrac{\pi}{2} + \cos \pi \cdot \cos \dfrac{\pi}{6}$

**12** Localize a imagem de cada um dos números reais $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}$ e $\dfrac{11\pi}{6}$ na circunferência trigonométrica. Em seguida, forneça o cosseno de cada um deles.

**13** Localize a imagem de cada um dos números reais: $\dfrac{\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}, \dfrac{6\pi}{5}$ e $\dfrac{9\pi}{5}$ na circunferência trigonométrica. Em seguida, forneça o sinal do cosseno de cada um deles.

**14** Calcule:

**a)** $\cos 330°$

**b)** $\cos 90°$

**c)** $\cos 120°$

**d)** $\cos \pi$

**e)** $\cos \dfrac{3\pi}{2}$

**f)** $\cos \dfrac{5\pi}{4}$

**g)** $\cos \dfrac{5\pi}{3}$

**h)** $\cos 0$

**15** Sem usar a tabela trigonométrica, compare os seguintes pares de valores:

**a)** $\cos 65°$ e $\cos 85°$

**b)** $\cos 91°$ e $\cos 89°$

**c)** $\cos 50°$ e $\cos 340°$

**d)** $\cos 190°$ e $\cos 170°$

**16** Se $k \in \mathbb{N}$ e $k < 4$, qual é a soma dos números reais da forma $\cos\left(k \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$?

**17** Sabendo que $\cos \dfrac{12\pi}{7} = m$, determine:

**a)** o sinal de **m**;

**b)** o valor de $\cos \dfrac{9\pi}{7}$ em função de **m**.

**18** Classifique como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações seguintes e corrija as falsas.

**a)** $\cos 90° - \cos 30° = \cos 60°$

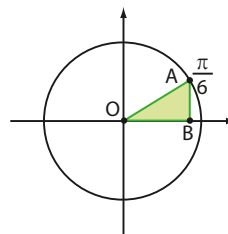
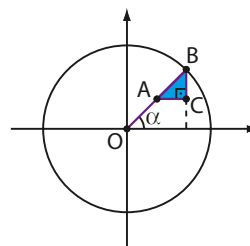
**b)** $\left(\text{sen } \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos \dfrac{\pi}{3}\right)^2 = 1$

**c)** $\cos 2 < \cos 1$

**d)** $\text{sen } 100° + \cos 100° < 0$

**e)** $\cos 6 < 0$

**f)** Existe um número real **a**, tal que $\cos a = 2$.

**19** Observando a figura abaixo, encontre o perímetro e a área do triângulo OAB situado no 1º quadrante da circunferência trigonométrica.

**20** Na circunferência trigonométrica abaixo, **A** é ponto médio de $\overline{OB}$ e **B** é a imagem do número real $\alpha$. Encontre, em função de $\alpha$, a área do triângulo ABC.

**21** Resolva as equações seguintes, considerando $U = [0, 2\pi[$.

**a)** $\cos x = 0$

**b)** $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**c)** $\cos x = 1$

**d)** $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

**e)** $3 \cdot \cos x + 6 = 0$

**f)** $4 \cdot \cos^2 x = 3$

**22** Na calculadora científica de Juliana, a tecla 4 está quebrada. Ela deseja obter o valor de $\cos \dfrac{4\pi}{5}$, sem converter $\dfrac{4\pi}{5}$ radianos para graus. Encontre uma maneira de ela resolver esse problema.

Sim. Não.
Note que:
$\text{sen}^2\,\alpha = (\text{sen}\,\alpha)^2$; $\text{sen}^2\,\alpha \neq \text{sen}\,\alpha^2$
$\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$; $\cos^2\alpha \neq \cos\alpha^2$

**PENSE NISTO:**

É verdade que $\text{sen}^2\,\alpha = (\text{sen}\,\alpha)^2$ para todo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?
E $\text{sen}^2\,\alpha = \text{sen}\,\alpha^2$?

# Relações entre seno e cosseno

## Relação fundamental da trigonometria

Do estudo da trigonometria no triângulo retângulo, temos a relação fundamental da trigonometria:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

sendo α a medida de um dos ângulos agudos do triângulo.

Vamos agora ampliar essa relação para a circunferência trigonométrica, mostrando que ela é válida para todo número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Seja **P** a imagem de um número real $\alpha \in [0, 2\pi]$.

- Se **P** pertence ao primeiro quadrante, temos que:

  $$OP = 1; \quad OP' = \cos\alpha; \quad OP'' = \text{sen}\,\alpha$$

  Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle OP'P$, temos:
  $(OP)^2 = (OP')^2 + (PP')^2 \Rightarrow 1 = (\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\,\alpha)^2$,
  isto é, $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

- Se **P** pertence ao segundo quadrante, temos:

  $$OP = 1; \quad PP' = OP'' = \text{sen}\,\alpha; \quad OP' = -\cos\alpha$$

  Daí:
  $1^2 = (\text{sen}\,\alpha)^2 + (-\cos\alpha)^2 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

- Se **P** pertence ao terceiro ou quarto quadrante, procedemos de modo semelhante ao que foi feito para o 2º quadrante.
- Se **P** coincide com algum dos pontos **A**, **B**, **C** ou **D** seguintes, temos:
  - **P** coincide com A(1, 0):
    $\cos\alpha = 1$ e $\text{sen}\,\alpha = 0$, então $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1^2 + 0^2 = 1$
  - **P** coincide com B(0, 1):
    $\cos\alpha = 0$ e $\text{sen}\,\alpha = 1$, então $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 0^2 + 1^2 = 1$
  - **P** coincide com C(−1, 0):
    $\cos\alpha = -1$ e $\text{sen}\,\alpha = 0$, então $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = (-1)^2 + 0^2 = 1$
  - **P** coincide com D(0, −1):
    $\cos\alpha = 0$ e $\text{sen}\,\alpha = -1$, então $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 0^2 + (-1)^2 = 1$

Logo:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1, \text{ para todo } \alpha \in [0, 2\pi]$$

Essa relação permite obter o seno de um número real a partir do cosseno desse mesmo número, e vice-versa.

**EXEMPLO 2**

Dado $\text{sen}\,x = \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, para obtermos cos x, usamos a relação fundamental

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, notamos que **x** está no 2º quadrante e, consequentemente, $\cos x < 0$.

Assim, temos $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

## Arcos complementares

Quando estudamos os triângulos retângulos no volume 1 desta coleção, vimos que, se $\alpha$ e $\beta$ são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo ($\alpha + \beta = 90°$), então sen $\alpha$ = cos $\beta$ e sen $\beta$ = cos $\alpha$.

Vamos agora estudar essa relação na circunferência trigonométrica.

Seja $x \in \mathbb{R}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Na circunferência trigonométrica ao lado, **P** é a imagem do número real **x** (ou do arco de medida **x** radianos), e **Q** é imagem do número real $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Temos:

$$\begin{cases} OP' = \cos x \ \text{ e } \ PP' = \text{sen } x \\ QQ' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ \text{ e } \ OQ' = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

Observando que:

$$\text{med}(P\hat{O}P') = \text{med}(Q\hat{O}Q')$$
$$OP = OQ = 1 \text{ (medida do raio)}$$

concluímos que os triângulos retângulos destacados são congruentes. Daí, temos:

$$PP' = QQ' \Rightarrow \text{sen } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{e} \quad OP' = OQ' \Rightarrow \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

## EXERCÍCIOS

**23** Verifique a validade da relação fundamental para os seguintes números reais:

**a)** $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{\pi}{4}$ **c)** $\frac{2\pi}{3}$

**24** Sendo $\cos x = \frac{3}{5}$, com **x** no 4º quadrante, determine sen x.

**25** Um número real $\alpha \in [0, 2\pi]$ pode satisfazer simultaneamente sen $\alpha = \frac{1}{3}$ e cos $\alpha = \frac{2}{3}$?

**26** Se sen $x = -\frac{12}{13}$, com **x** no 3º quadrante, determine cos x.

**27** Considerando sen $74° \simeq \frac{24}{25}$, calcule:

**a)** cos 74°
**b)** sen 16°
**c)** cos 16°
**d)** sen 254°
**e)** cos 164°

**28** Sabendo que $\text{sen}^2\, \alpha = \frac{4}{9}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, obtenha o valor de cos $\alpha$.

**29** Determine os possíveis valores reais de **m** para que se tenha, simultaneamente, sen $\alpha = \frac{m}{2}$ e cos $\alpha = m - 1$.

**30** É verdade que $\text{sen}^2\, 20° + \text{sen}^2\, 70° = 1$? Explique, sem consultar a tabela trigonométrica.

**31** Sabendo que sen $\alpha = -3 \cdot \cos \alpha$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, obtenha o valor de $y = \text{sen } \alpha + \cos \alpha$.

## Tangente

Para definirmos a tangente de um número real $\alpha$, vamos acrescentar à circunferência trigonométrica um terceiro eixo.

Esse eixo, denominado **eixo das tangentes**, é obtido ao se tangenciar, por uma reta vertical, a circunferência no ponto A(1, 0). O ponto **A** é a origem do eixo das tangentes, e seu sentido positivo (para cima) coincide com o do eixo dos senos.

Unindo-se o centro **O** à extremidade **P** (P ≠ B e P ≠ B') de um arco de medida **$\alpha$** radianos (em que **P** é imagem do número real $\alpha$), construímos a reta $\overleftrightarrow{OP}$, que intersecta o eixo das tangentes no ponto **T**.

Por definição, a **medida algébrica** do segmento $\overline{AT}$ é a **tangente** do arco de $\alpha$ rad (ou tangente do número real **$\alpha$**). Indicamos:

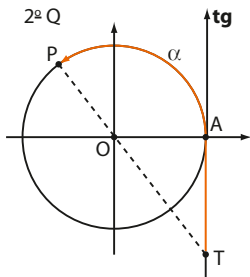
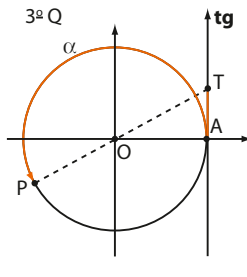
$$\text{tg } \alpha = \text{med}(\overline{AT})$$

**PENSE NISTO:**

É verdade que tg $\alpha$ possui valor mínimo −1 e valor máximo igual a 1?

Não, embora $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, tg x não é limitada.

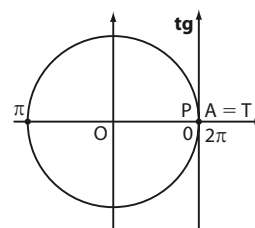
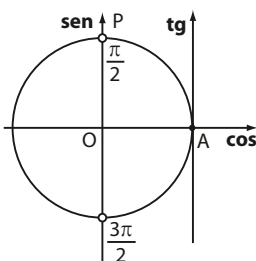
Considerando o sentido positivo do eixo das tangentes, temos, para **P** pertencente ao primeiro quadrante: tg $\alpha > 0$.

Façamos variar a posição de **P** nos demais quadrantes:

**P** é imagem de $\alpha$.
**T** está abaixo de **A**.
tg $\alpha < 0$

**P** é imagem de $\alpha$.
**T** está acima de **A**.
tg $\alpha > 0$

**P** é imagem de $\alpha$.
**T** está abaixo de **A**.
tg $\alpha < 0$

**OBSERVAÇÕES**

- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o ponto **P** pertence ao eixo dos senos, e a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes. Neste caso, não se define tg $\frac{\pi}{2}$. Analogamente, não se define tg $\frac{3\pi}{2}$.

- Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 2\pi$, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ intersecta o eixo das tangentes em sua origem **A**. Assim med$(\overline{AT}) = 0$ e tg $0 = 0$, tg $\pi = 0$ e tg $2\pi = 0$.

## Valores notáveis

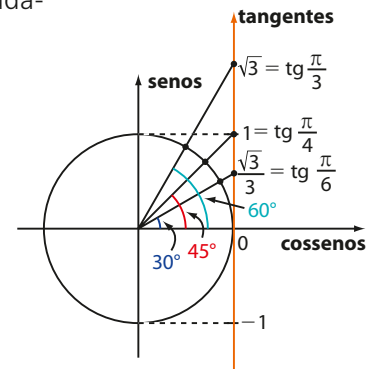
Já conhecemos os valores da tangente de ângulos notáveis quando estudamos a trigonometria do triângulo retângulo.

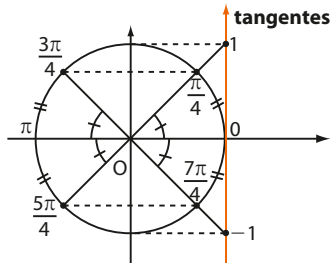
Observe esses valores na circunferência trigonométrica ao lado:

$\text{tg}\,\dfrac{\pi}{6} = \text{tg}\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{tg}\,\dfrac{\pi}{4} = \text{tg}\,45° = 1$

$\text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

Com esses valores é possível determinar, por simetria, a tangente de outros arcos.

**EXEMPLO 3**

Na circunferência trigonométrica seguinte, a partir de $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{4} = 1$, vamos encontrar os valores de $\text{tg}\,\dfrac{3\pi}{4}$, $\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{4}$ e $\text{tg}\,\dfrac{7\pi}{4}$. Observe a congruência entre os ângulos assinalados.

Assim:

$\text{tg}\,\dfrac{3\pi}{4} = \text{tg}\,\dfrac{7\pi}{4} = -1$

$\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{4} = \text{tg}\,\dfrac{\pi}{4} = 1$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

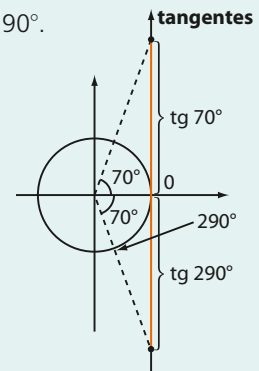
**5** Com o auxílio da tabela trigonométrica da página 276, encontre o valor de tg 290°.

**Solução:**

Observe que $360° - 70° = 290°$.

Da figura, concluímos que $\text{tg}\,290° = -\text{tg}\,70°$.

Consultando a tabela trigonométrica, temos:

$$\text{tg}\,290° = -2{,}74748$$

## EXERCÍCIOS

**32** Calcule, se existir:

**a)** tg 120°

**b)** tg 180°

**c)** tg 210°

**d)** tg 90°

**e)** tg 240°

**33** Calcule, se existir:

**a)** $\text{tg}\,\dfrac{3\pi}{2}$

**b)** tg 0

**c)** $\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{3}$

**d)** $\text{tg}\,\dfrac{3\pi}{4}$

**e)** $\text{tg}\,\dfrac{11\pi}{6}$

**34** Sendo $x = 30°$, calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{2 \cdot \text{sen } x - 4 \cdot \cos x + \text{tg } (2x)}{\cos (4x) - \text{sen } (2x)}$$

**35** Dê o sinal de:

**a)** tg 200° **c)** tg 4 **e)** tg 1
**b)** tg 310° **d)** tg 2

**36** Classifique como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações seguintes:

**a)** tg 100° < tg 105°

**b)** tg 20° > tg 25°

**c)** Existem dois números reais no intervalo $[0, 2\pi[$ cuja tangente vale 3.

**d)** tg 80° < sen 80°

**e)** tg 250° > 0

**f)** tg $2\pi$ não existe.

**37** Mostre, geometricamente, que $\text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$.

**38** Considerando $\text{tg } 22° \simeq 0{,}4$, obtenha os valores de:

**a)** tg 158° **c)** tg 338°
**b)** tg 202°

## Relação entre tangente, seno e cosseno

Vamos estabelecer uma importante relação da trigonometria envolvendo as três razões apresentadas: seno, cosseno e tangente.

Seja $\alpha$ um número real, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$.

- Vamos supor que $\alpha$ seja distinto de 0, $\pi$ e $2\pi$. O número real $\alpha$ tem imagem em **P**, extremidade do arco de $\alpha$ rad.

  Observando a figura ao lado, temos:

  $OP' = \cos \alpha$ $AT = \text{tg } \alpha$

  $OP'' = PP' = \text{sen } \alpha$ $OP = 1$ (raio)

Os triângulos OP'P e OAT são semelhantes, pois possuem em comum, além de um ângulo reto, também o ângulo de medida $\alpha$. Podemos, então, estabelecer a proporção:

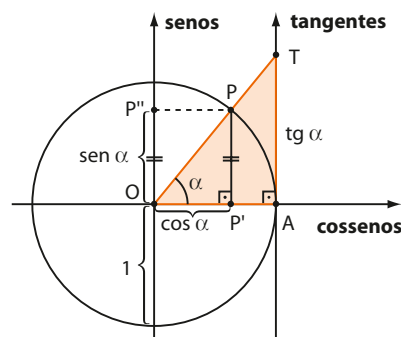
$$\frac{OP'}{OA} = \frac{P'P}{AT} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Se o ponto **P** pertence ao 2º, 3º ou 4º quadrantes, chega-se à mesma relação, usando procedimento similar.

- Se $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$, temos que $\text{tg } \alpha = 0$, $\text{sen } \alpha = 0$ e $\cos \alpha \neq 0$; daí $\text{tg } \alpha = 0 = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$.

- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, não se define a tangente.

Desse modo, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, vale a relação:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

**OBSERVAÇÃO**

Quando estudamos a trigonometria no triângulo retângulo, definimos, para um ângulo agudo $\alpha$:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Note que essa definição é compatível com a relação apresentada anteriormente. De fato, considerando o triângulo retângulo OPP' da figura anterior, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{PP'}{OP'} = \frac{OP''}{OP'} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

(PP': medida do cateto oposto a $\alpha$; OP': medida do cateto adjacente a $\alpha$)

EXEMPLO 4

Os valores da tangente de ângulos notáveis e de outros ângulos podem ser obtidos usando a relação apresentada:

- Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$, então $\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \dfrac{\text{sen}\,\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.
- Se $\alpha = \frac{\pi}{4}$, então $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = \dfrac{\text{sen}\,\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.
- Se $\alpha = 40°$, então $\text{tg}\,40° = \dfrac{\text{sen}\,40°}{\cos 40°}$.

Consultando a tabela trigonométrica, obtemos:

$$\text{tg}\,40° = \frac{0{,}64279}{0{,}76604} = 0{,}83910762\ldots$$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**6** Seja $\alpha$ um número real pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sabendo que $\text{tg}\,\alpha = 2$, qual é o valor de $\text{sen}\,\alpha$? E de $\cos\alpha$?

**Solução:**

De $\text{tg}\,\alpha = 2$, podemos escrever $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 2 \cdot \cos\alpha$.

Aplicando a relação fundamental da trigonometria ($\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$), temos:

$(2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 4 \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 5 \cdot \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\alpha \in$ 1º quadrante, temos $\cos\alpha > 0$ e, assim, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\text{sen}\,\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

## EXERCÍCIOS

**39** Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, determine o valor de $\text{tg}\,\alpha$.

**40** Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ e $\cos\alpha = 0{,}2$, qual é o valor de $\text{tg}\,\alpha$?

**41** Se $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e $\text{tg}\,x = -4$, obtenha o valor de:

**a)** sen x **b)** cos x

**42** Considerando $\text{tg}\,58° \simeq \frac{8}{5}$, determine o valor de:

**a)** sen 58° **b)** sen 32° **c)** tg 302° **d)** tg 122°

## DESAFIO

Resolva as equações seguintes, considerando $U = [0, 2\pi[$:

**a)** $\cos^2 x - \text{sen}^2\,x = 0$

**b)** $\cos^2 x + 2 - 3 \cdot \text{sen}^2\,x = 0$

CAPÍTULO 3

# Trigonometria em triângulos quaisquer

No estudo dos triângulos retângulos, são definidas as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para ângulos agudos.

Com a definição de seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica, é possível relacionar as medidas dos lados e dos ângulos de outros triângulos, como o acutângulo e o obtusângulo. Na última parte deste capítulo, vamos conhecer outro método para calcular a área de um triângulo.

É com esse objetivo que estudaremos agora a lei dos senos e a lei dos cossenos.

## Lei dos senos

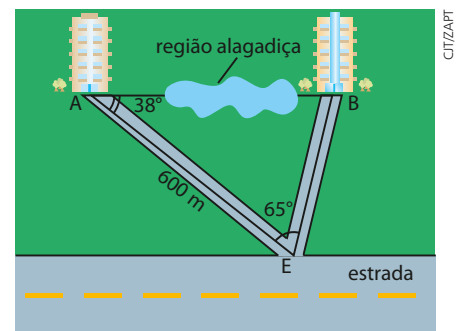
Do entroncamento (**E**) de uma rodovia saem dois pequenos trechos retilíneos de estrada, em um terreno plano, que levam aos portões de entrada de dois condomínios, indicados pelas letras **A** e **B**.

Deseja-se determinar a distância entre **A** e **B**, mas a medição direta é difícil, pois há uma região alagadiça entre esses pontos.

Observe o esquema ao lado. Com auxílio de um teodolito, um topógrafo mediu, a partir de **E**, o ângulo entre as retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{EB}$, obtendo 65°. Em seguida, percorreu os 600 metros do trecho $\overline{EA}$ e, a partir do ponto **A**, mediu o ângulo entre as retas $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, obtendo 38°.

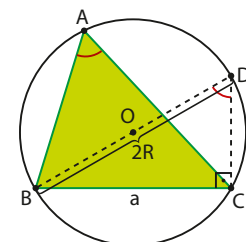
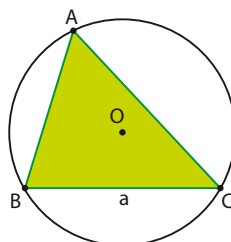
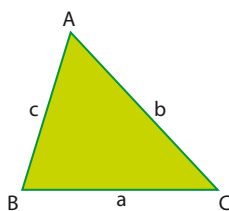
Conhecedor de matemática, o topógrafo sabia que já tinha reunido informações suficientes para determinar a distância entre os portões de entrada dos dois condomínios (distância entre **A** e **B**).

Elementos sem proporção entre si.

Por meio do teorema que apresentaremos a seguir, conhecido como **lei dos senos**, poderemos resolver esse e outros problemas.

### Teorema

As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

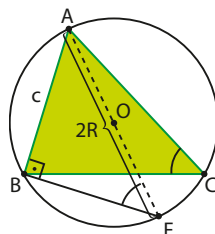
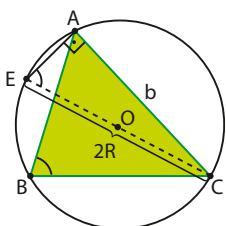
**Demonstração:**

Dado um triângulo ABC, consideremos a circunferência circunscrita a ele. Sejam **O** e **R**, respectivamente, o centro e a medida do raio dessa circunferência. $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos do triângulo ABC com vértices em **A**, **B** e **C**, respectivamente:

Traçando o diâmetro $\overline{BD}$, temos med($B\hat{A}C$) = med($B\hat{D}C$), pois $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$, como ângulos inscritos (isto é, seus vértices são pontos da circunferência e seus lados são secantes a ela), veem o arco comum $\overset{\frown}{BC}$ e determinam a mesma corda $\overline{BC}$ na circunferência.

Como o triângulo BDC é inscrito em uma semicircunferência, ele é retângulo em **C**:

$$\text{sen}\,(B\hat{D}C) = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R$$

Professor, se achar necessário, revise o conceito de ângulo inscrito e a relação entre a medida do ângulo inscrito e a medida do arco correspondente.

De modo análogo, temos:

Assim: $\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2R$ e $\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$.

Segue a expressão da lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

**OBSERVAÇÕES**

- Se um dos ângulos for reto ($\triangle ABC$ retângulo), a demonstração é análoga; usa-se o fato de que sen 90° = 1.
- Se um dos ângulos for obtuso ($\triangle ABC$ obtusângulo), usa-se raciocínio análogo e a relação: sen (180° − $\hat{A}$) = sen $\hat{A}$.

**EXEMPLO 1**

Voltemos ao problema da distância entre os portões dos dois condomínios apresentado na página anterior.

Vamos construir o modelo geométrico que representa a situação descrita.

Temos:

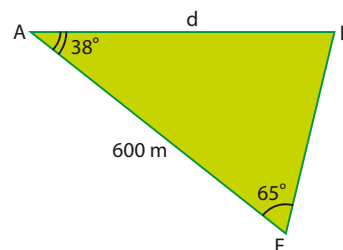
$$\text{med}(A\hat{B}E) = 180° - (65° + 38°) = 77°$$

A distância **d** entre os pontos **A** e **B** pode ser obtida por meio da lei dos senos:

$$\frac{d}{\text{sen}\,65°} = \frac{600}{\text{sen}\,77°}$$

Consultando a tabela trigonométrica da página 276 ou uma calculadora científica, obtemos os valores de sen 65° e de sen 77°:

$$\frac{d}{0{,}90631} = \frac{600}{0{,}97437} \Rightarrow d \simeq 558$$

Logo, a distância entre **A** e **B** é 558 metros.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1** No triângulo ABC ao lado, determine as medidas do lado $\overline{AB}$ e do raio da circunferência circunscrita.

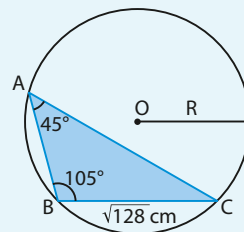
**Solução:**

$$\text{med}(\hat{C}) = 180° - (45° + 105°) = 30°$$

Pela lei dos senos: $\frac{BC}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{AB}{\text{sen}\,\hat{C}} \Rightarrow \frac{\sqrt{128}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AB}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AB = \sqrt{64} = 8$

O lado $\overline{AB}$ mede 8 cm.

Usando a constante de proporcionalidade: $2R = \frac{AB}{\text{sen}\,\hat{C}} = \frac{AB}{\text{sen}\,30°} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16 \Rightarrow R = 8$

O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede 8 cm.

**2** Calcule as medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ao lado, em função da medida **b** do lado $\overline{AC}$. Use a tabela trigonométrica ou uma calculadora científica.

**Solução:**

Observe que med$(\hat{A})$ = 180° − 60° − 45° = 75°

Pela lei dos senos: $\dfrac{b}{\text{sen } 60°} = \dfrac{AB}{\text{sen } 45°} = \dfrac{BC}{\text{sen } 75°}$

Consultando a tabela das razões trigonométricas ou usando a calculadora, temos:

$AB = \underbrace{\dfrac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 60°}}_{\simeq\, 0{,}816} \cdot b$ e $BC = \underbrace{\dfrac{\text{sen } 75°}{\text{sen } 60°}}_{\simeq\, 1{,}115} \cdot b$, isto é, $AB \simeq 0{,}816b$ e $BC \simeq 1{,}115b$

**PENSE NISTO:**

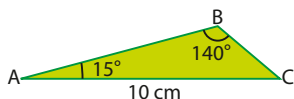
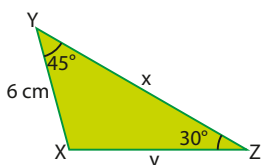
Podemos também escrever $AB = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot b$?

Sim. Como $AB = \dfrac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 60°} \cdot b$, usando os valores conhecidos para ângulos notáveis temos: $AB = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot b \Rightarrow AB = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot b = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot b = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot b$

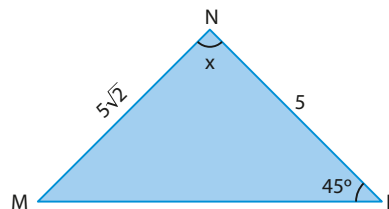
## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**1** Num triângulo ABC são dados med$(\hat{B})$ = 60°, med$(\hat{C})$ = 45° e AB = 8 cm. Determine o comprimento de $\overline{AC}$.

**2** No triângulo ABC da figura, determine as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Use a tabela trigonométrica da página 276 ou uma calculadora científica.

**3** Dado sen 75° = $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, determine **x** e **y** na figura abaixo.

**4** O proprietário de um terreno deseja conhecer a distância entre sua casa e a nascente de um rio. O caminho da casa à nascente, porém, é de difícil acesso.
A partir da frente da casa e com auxílio de um teodolito, mediu o ângulo através do qual avistava a nascente e o pomar, obtendo 48°. Caminhou, então, 420 metros em linha reta até o pomar, de onde mirou a nascente e a casa segundo um ângulo de 64°. Quantos metros separam sua casa da nascente? Use a tabela trigonométrica da página 276 ou uma calculadora científica.

GRAPHORAMA

**5** Determine a medida **x** do ângulo $M\hat{N}P$.

**6** Determine a medida do raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC, sendo BC = 15 cm e med$(\hat{A})$ = 30°.

**7** Entre os pontos **A** e **B**, extremidades do lado de um terreno, existe uma região plana alagadiça, cuja extensão deseja-se estimar. Um topógrafo, situado em **A**, avistou um posto rodoviário situado na estrada sob um ângulo de 40° em relação a $\overline{AB}$. Dirigiu-se, então, ao posto, situado a 1500 metros de **A**, e avistou as extremidades do terreno sob um ângulo de 85°. Considere: sen 55° ≃ 0,82; sen 85° ≃ 0,99 e sen 40° ≃ 0,64.

GRAPHORAMA

**a)** Qual é a extensão da região alagadiça?

**b)** Qual é a distância entre o posto e o ponto **B**?

**8** Um triângulo possui dois ângulos com medidas 30° e 70° e está inscrito numa circunferência de raio 12 m. Usando a tabela trigonométrica da página 276 ou uma calculadora científica, determine a medida de seu lado:

**a)** menor. **b)** maior.

**9** Duas casas de veraneio **X** e **Y** estão situadas na mesma margem de um rio. De **X** avistam-se a casa **Y** e a entrada de um clube particular na outra margem, sob um ângulo de 56°. De **Y** avistam-se a entrada do clube e a casa **X**, sob um ângulo de 42°.

GRAPHORAMA

Sabendo que a distância entre **X** e a entrada do clube é de 600 metros, determine o número inteiro mais próximo que representa:

**a)** a distância entre a entrada do clube e **Y**.

**b)** a distância entre as casas **X** e **Y**.

**c)** a largura do rio.

Admita que, nesse trecho, as margens do rio são paralelas e use os valores: sen 42° ≃ 0,67; sen 56° ≃ 0,83 e sen 82° ≃ 0,99.

**10** (Unesp-SP) Cinco cidades, **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, são interligadas por rodovias conforme mostra a figura.

A rodovia $\overline{AC}$ tem 40 km, a rodovia $\overline{AB}$ tem 50 km, os ângulos **x**, entre $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, e **y**, entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, são tais que sen x $= \frac{3}{4}$ e sen y $= \frac{3}{7}$. Deseja-se construir uma nova rodovia ligando as cidades **D** e **E** que, dada a disposição destas cidades, será paralela a $\overline{BC}$.

**a)** Use a lei dos senos para determinar quantos quilômetros tem a rodovia $\overline{BC}$.

**b)** Sabendo que $\overline{AD}$ tem 30 km, determine quantos quilômetros terá a rodovia $\overline{DE}$.

**11** Na figura a seguir, sabe-se que cos $\alpha = -\frac{1}{4}$. Determine o valor de sen $\beta$.

## Lei dos cossenos

A prefeitura de uma cidade litorânea está estudando a viabilidade de construir um túnel com traçado retilíneo para atravessar um trecho montanhoso. Esse túnel ligaria diretamente as praias Brava e Mansa pela avenida Beira Mar, que está interrompida entre elas. Vamos supor que todo o terreno ao redor dos morros seja plano.

Em uma pequena embarcação e munido de aparelhos de medição, um funcionário especializado avistou, do ponto **F**, o último condomínio residencial na avenida Beira Mar, no final da praia Brava, representado pelo ponto **B**, e um outro condomínio, logo no começo da praia Mansa, na avenida Beira Mar, representado pelo ponto **M**. Observe a figura ao lado.

ALBERTO DE STEFANO

Feitas as medições, o funcionário verificou que, naquele momento, estava a 1,5 km de **B** e a 3,2 km de **M**; além disso, mediu o ângulo formado pelas retas $\overleftrightarrow{FB}$ e $\overleftrightarrow{FM}$, obtendo med$(B\hat{F}M) = 41°$.

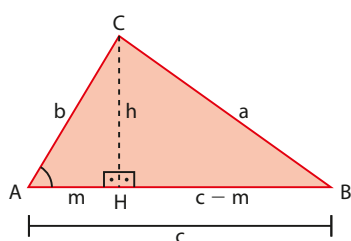
Se o projeto for aprovado, quantos quilômetros de extensão terá o túnel de traçado retilíneo, considerando a medida do segmento $\overline{BM}$ como base para a determinação da extensão desse túnel?

Por meio do teorema a seguir, denominado **lei dos cossenos**, podemos resolver esse e outros problemas.

## Teorema

Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

**Demonstração:**

- Sejam o triângulo **acutângulo** ABC, e CH = h, a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\triangle BCH: a^2 = h^2 + (c - m)^2 \\ \triangle ACH: h^2 = b^2 - m^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m \quad (1)$$

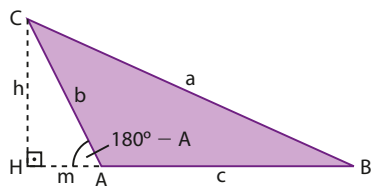
$$\triangle ACH: \cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \hat{A} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Analogamente, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

- Sejam o triângulo ABC **obtusângulo** em **Â**, e CH = h, a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\triangle BCH: a^2 = h^2 + (c + m)^2 \\ \triangle ACH: h^2 = b^2 - m^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m \quad (1)$$

$$\triangle CHA: \cos(180° - A) = \frac{m}{b}, \text{ isto é, } m = b \cdot \cos(180° - A) =$$

$$= b \cdot (-\cos \hat{A}) = -b \cdot \cos \hat{A}$$

$$m = -b \cos \hat{A} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Analogamente, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

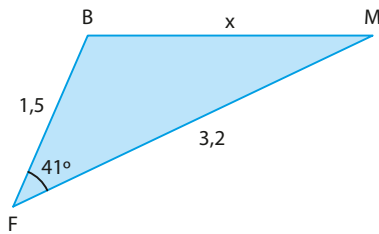
- No caso de o triângulo ABC ser **retângulo** (em **Â**, por exemplo), como cos 90° = 0, verifica-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90°$, que se reduz à expressão do teorema de Pitágoras. Para cada um dos dois ângulos agudos do triângulo ($\hat{B}$ e $\hat{C}$), a igualdade decorre também do teorema de Pitágoras.

Como pudemos perceber nos três casos, em qualquer triângulo ABC, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Cada uma das relações acima é conhecida como **lei dos cossenos**.

**EXEMPLO 2**

Considerando o problema sobre a extensão do túnel, proposto na introdução da lei dos cossenos, podemos construir um modelo geométrico para representar a situação descrita:

$\overline{BF}$: distância entre o ponto **F** e o condomínio **B**.
$\overline{MF}$: distância entre o ponto **F** e o condomínio **M**.
$\overline{BM}$: extensão do futuro túnel.

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

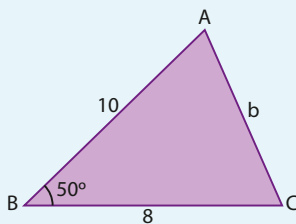
$$x^2 = 1{,}5^2 + 3{,}2^2 - 2 \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}2 \cdot \cos 41°$$

Considerando $\cos 41° \simeq 0{,}75$, temos:

$$x^2 = 2{,}25 + 10{,}24 - 9{,}6 \cdot 0{,}75$$
$$x^2 = 12{,}49 - 7{,}2$$
$$x^2 = 5{,}29 \Rightarrow x = 2{,}3$$

Assim, o futuro túnel terá 2,3 km (ou 2 300 m) de extensão.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

 **3** Na figura seguinte, determine a medida do lado $\overline{AC}$ e a medida do ângulo com vértice em **A**. Use a tabela trigonométrica da página 276 ou a calculadora.

**Solução:**

Determinando a medida AC:

$b^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 50°$

$b^2 = 164 - 160 \cdot \cos 50°$

$b^2 = 164 - 160 \cdot 0{,}64279$

$b \simeq 7{,}82$

Com a calculadora na configuração DEG, pressionamos:

SHIFT → sin ($\sin^{-1}$) → 0 . 7 8 3 7 = → 51.60060351

Para determinar a medida do ângulo com vértice em **A**, podemos usar:

- a lei dos cossenos:

$$8^2 = 10^2 + 7{,}82^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7{,}82 \cdot \cos \hat{A}$$
$$64 = 161{,}1524 - 156{,}4 \cdot \cos \hat{A}$$
$$\cos \hat{A} \simeq 0{,}62$$

Consultando a tabela trigonométrica encontramos o ângulo cujo cosseno é mais próximo de 0,62, o ângulo 52°.

$\text{med}(\hat{A}) \simeq 52°$

ou

- a lei dos senos:

$$\frac{8}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{7{,}82}{\text{sen } 50°} \Rightarrow \text{sen } \hat{A} \simeq 0{,}7837$$

Como $B\hat{A}C$ é agudo (pois opõe-se a $\overline{BC}$, que não é o maior lado do triângulo ABC), temos que $\text{med}(\hat{A}) \simeq 52°$ (pela tabela trigonométrica).

**PENSE NISTO:**

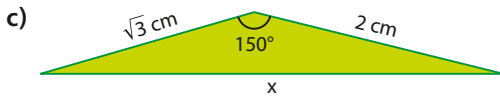
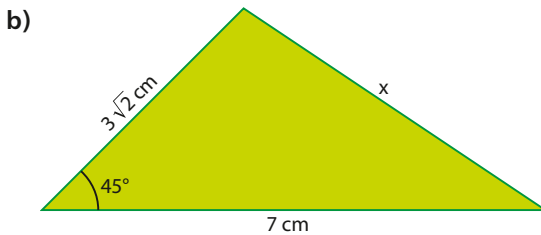
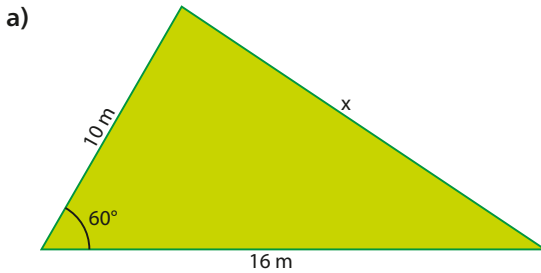
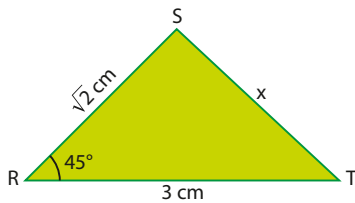
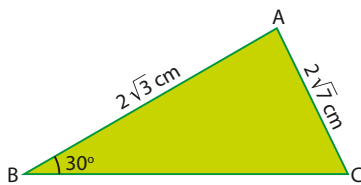
Como podemos obter a medida do ângulo com vértice em **A** a partir de seu seno usando a calculadora científica?

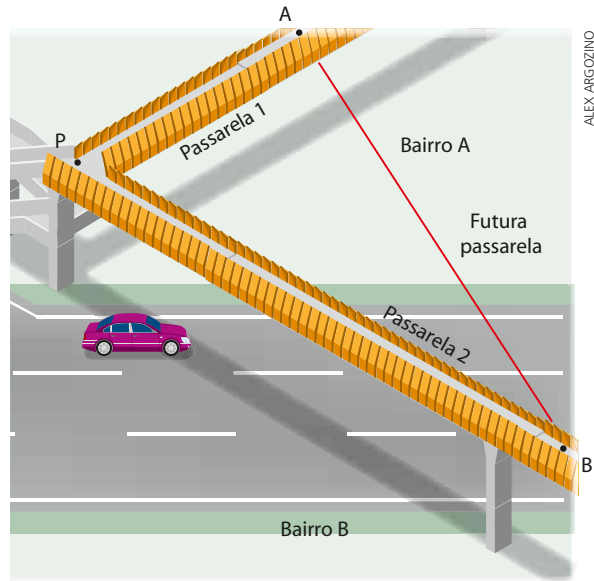
## EXERCÍCIOS

**12** Determine o valor de **x** em cada caso:

**a)**

**b)**

**c)**

**13** Obtenha o perímetro do triângulo RST abaixo.

**14** Calcule a medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo abaixo.

**15** O acesso ao aeroporto de uma cidade é feito por duas vias de contorno retilíneo que se cruzam segundo um ângulo de 53°. A primeira tem 2,1 km de extensão, e a outra, 3,5 km de extensão. As vias têm origem em dois postos de gasolina. Qual é a distância entre esses postos? Use $\cos 53° \simeq 0{,}6$.

**16** A prefeitura de uma cidade está estudando a viabilidade de construir uma terceira passarela sobre a rodovia, ligando os bairros **A** e **B** diretamente, a partir das passarelas já construídas.

Elementos sem proporção entre si.

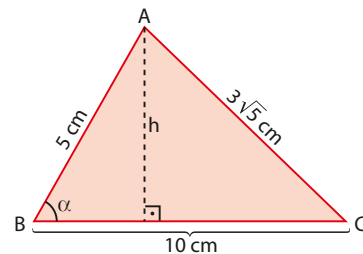
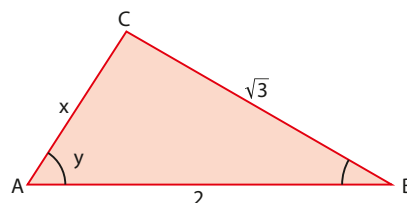
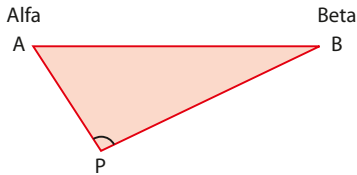
O acesso atual é feito pelas passarelas 1 e 2, que ligam os bairros **A** e **B**, respectivamente, ao ponto **P**. Medições feitas pela empresa contratada mostram que as passarelas 1 e 2 medem, respectivamente, 130 m e 220 m. O ângulo formado pelas passarelas 1 e 2 mede 60°.

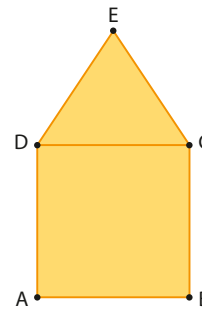
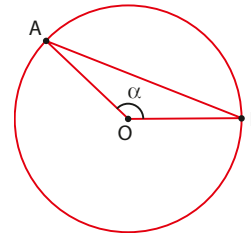
Se o projeto for aprovado, quantos metros de extensão terá a passarela que ligará diretamente os dois bairros? Admita que as extremidades **A**, **P** e **B** estejam na mesma altura em relação ao solo.

**17** Na figura, sendo $med(A\hat{B}C) = \alpha$, determine:

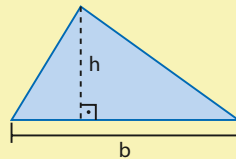
**a)** $\cos \alpha$.

**b)** o valor de **h**.

**c)** a área do triângulo ABC.

**18** Encontre os valores de **x** e **y** na figura. O que pode ser dito sobre o triângulo ABC?

**19** Um motorista de caminhão precisa fazer entregas nas cidades Alfa e Beta, distantes $10\sqrt{13}$ km (aproximadamente 36 km) entre si. Do ponto **P** em que se encontra, na bifurcação de uma estrada, ele sabe que a distância a Beta é o triplo da distância a Alfa.

Sabendo que med$(A\hat{P}B) = 120°$ e que a velocidade máxima permitida no trecho de **P** a Beta é de 50 km/h, determine o tempo mínimo que será gasto para chegar a Beta, onde será feita a primeira entrega.

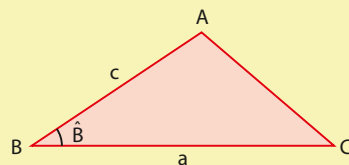
**20** Na figura, o perímetro do quadrado ABCD mede 24 cm e o triângulo DEC é equilátero. Determine a medida de $\overline{AE}$.

**21** Na figura abaixo, a medida de $\overline{AB}$ é 60% maior que a medida do raio da circunferência de centro **O**. Determine tg $\alpha$.

## TROQUE **IDEIAS**

### Área de um triângulo

Já sabemos, da Geometria Plana, que a área da superfície limitada por um triângulo (ou, simplesmente, área de um triângulo) é dada pelo semiproduto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base:

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$$

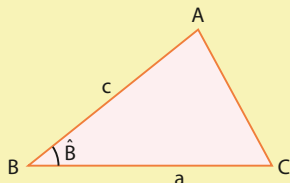
Vamos considerar agora uma situação particular: conhecemos as medidas de dois lados do triângulo e do ângulo formado por esses lados. Nessa situação, existe uma maneira mais prática para o cálculo da área.

Propriedade:

Em qualquer triângulo, a área é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo por eles formado.

$$\text{Área} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\,\hat{B}}{2} \quad (1)$$

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

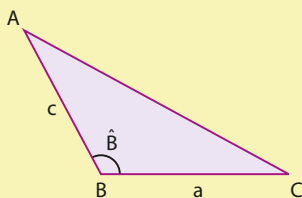
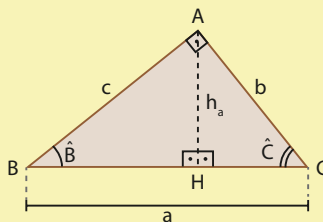
- Nessa atividade você está convidado a demonstrar essa propriedade e, na sequência, resolver problemas utilizando essa fórmula.

**a)** No △ABC acutângulo seguinte, são conhecidas as medidas **a** e **c** dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, e a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

Prove a validade da fórmula (1).

Sugestão: Utilize a fórmula geral da área de um triângulo; considere $\overline{BC}$ como base e trace a altura $\overline{AH}$ relativa a $\overline{BC}$.

**b)** Prove a validade da fórmula (1), considerando o △ABC obtusângulo em $\hat{B}$.

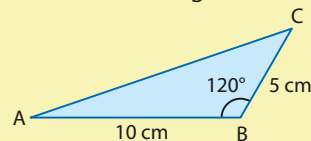
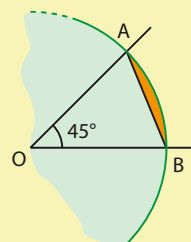
Dados: **a**, **c** e $\hat{B}$.

Sugestão: Utilize o mesmo procedimento do item *a*; você precisará usar a relação entre os senos de ângulos suplementares.

Observação: No caso do △ABC ser retângulo em **A**, por exemplo, considerando a hipotenusa $\overline{BC}$ como base, temos:

$$\text{Área} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

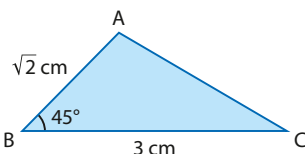
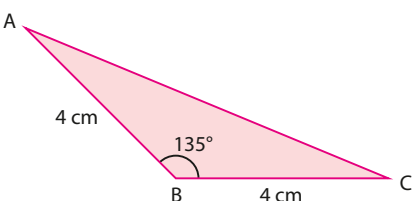
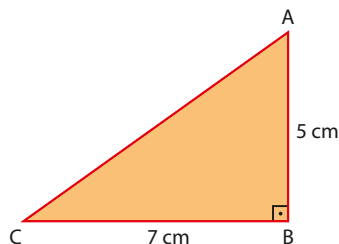
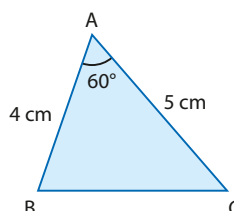
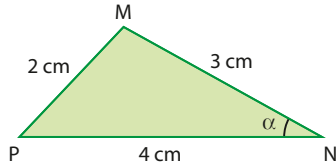
Como $h_a = c \cdot \text{sen } \hat{B} = b \cdot \text{sen } \hat{C}$, segue (1).

**c)** Considerando agora um dos catetos como base, por exemplo $\overline{AB}$, explique como se obtém a fórmula $\dfrac{b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}$.

**d)** Agora é hora de aplicar os resultados obtidos nos itens anteriores! Resolva os dois problemas a seguir.

i) Calcule a área do triângulo ABC seguinte:

ii) Na figura, AOB é um setor circular de 45° contido em um círculo de raio 4 cm. Qual é o valor da área destacada em laranja?

## EXERCÍCIOS

**22** Calcule, em cada caso, a área do triângulo ABC:

**a)**

**b)**

**c)**

**d)**

**23** Dado o triângulo MNP abaixo, determine:

**a)** o valor de cos α, utilizando a lei dos cossenos;

**b)** o valor de sen α, utilizando a relação fundamental da trigonometria;

**c)** a área do triângulo MNP.

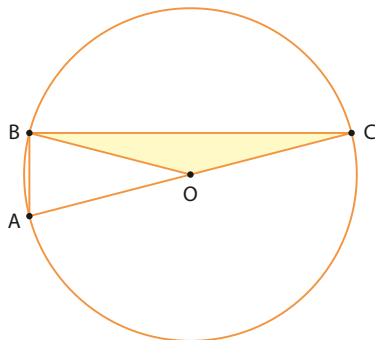
**24** Um terreno triangular tem frentes de 6 m e 8 m em ruas que formam entre si um ângulo de 65°. Qual é a área do terreno? Quanto mede o terceiro lado do terreno?

Considere sen 65° $\simeq$ 0,9 e $\sqrt{19} \simeq 4{,}4$.

**25** Na figura, **O** é o centro da circunferência cujo comprimento é 10 π cm.

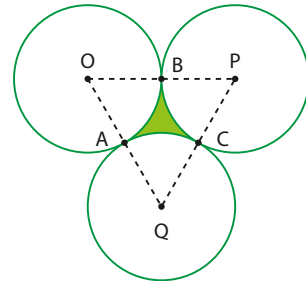
Sabendo que med$(A\hat{B}O) = 75°$, determine:

**a)** a área do triângulo BOC;

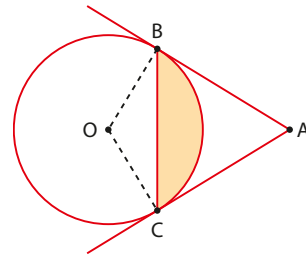
**b)** a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

**26** As medidas de dois lados consecutivos de um paralelogramo são 5 cm e $2\sqrt{3}$ cm. O ângulo agudo formado por esses lados mede 30°.

**a)** Quanto medem as diagonais desse paralelogramo?

**b)** Qual é a área desse paralelogramo?

**27** Na figura, as três circunferências têm centros em **O**, **P** e **Q** e raio com medida 2 cm. Elas são, duas a duas, tangentes externamente, nos pontos **A**, **B** e **C**. Calcule a área:

**a)** do triângulo AOB;

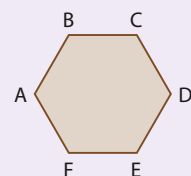
**b)** da região colorida.

**28** Na figura seguinte, temos OA = 6 cm e OB = 3 cm. As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são tangentes à circunferência de centro **O** nos pontos **B** e **C**, respectivamente.

Qual é a área da região colorida?

Sugestão: Lembre que toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

## DESAFIO

O hexágono ABCDEF é regular e seu perímetro é 48 cm.

Do vértice **A** saem 3 diagonais. Qual é a soma das medidas dessas três diagonais?

# Funções trigonométricas

## Introdução

Na tabela abaixo, constam as previsões para a maré alta e para a maré baixa durante três dias consecutivos de maio de 2015, para o porto de Ilhéus, no sul do Estado da Bahia.

**Porto de Ilhéus – Malhado (Estado da Bahia)**

| **Latitude**: 14°46,8'S<br>**Instituição**: DHN | **Longitude**: 39°01,6'W<br>**40 Componentes** | **Fuso**: +03<br>**Nível Médio**: 1,12 m | **Ano**: 2015<br>**Carta**: 01201 |
|---|---|---|---|

| Dia | Hora | Altura (m) |
|---|---|---|
| **SÁB** 4/5/2015 | 3 h 41 min | 2,0 |
| | 9 h 51 min | 0,2 |
| | 16 h 02 min | 2,1 |
| | 22 h 06 min | 0,2 |
| **DOM** 5/5/2015 | 4 h 09 min | 2,0 |
| | 10 h 21 min | 0,2 |
| | 16 h 38 min | 2,0 |
| | 22 h 43 min | 0,2 |
| **SEG** 6/5/2015 | 4 h 47 min | 2,0 |
| | 10 h 56 min | 0,2 |
| | 17 h 09 min | 2,0 |
| | 23 h 15 min | 0,3 |

JOÁ SOUZA/AG. A TARDE

**Fonte:** Marinha do Brasil. Disponível em: <www.mar.mil.br/dhn/chm/box-previsao-mare/tabuas/40145Jan2016.htm>. Acesso em: 10 mar. 2016.

Observe que:

- As marés altas ocorrem de 12 em 12 horas, aproximadamente, como mostram os destaques na cor vermelha da tabela.
- As marés baixas ocorrem, também, de 12 em 12 horas, aproximadamente, como mostra a tabela.
- As alturas da maré alta praticamente se repetem de 12 em 12 horas: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré alta medem 2,0 m.
- As alturas da maré baixa praticamente se repetem de 12 em 12 horas: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré baixa medem 0,2 m = 20 cm.

Neste capítulo, veremos outros fenômenos como o descrito: que se repetem em intervalos de tempo iguais. São os chamados **fenômenos** ou **movimentos periódicos**.

Vamos definir aqui as funções trigonométricas, a partir de uma ampliação na circunferência trigonométrica, em que associaremos a qualquer número real um ponto da circunferência.

Os fenômenos periódicos podem ser descritos, de maneira aproximada, por modelos matemáticos que envolvem, geralmente, funções trigonométricas. Na seção *Aplicações*, deste capítulo, iremos conhecer mais sobre a modelagem matemática de alguns desses fenômenos.

# As demais voltas na circunferência trigonométrica

No capítulo 1, quando definimos a circunferência trigonométrica, associamos a cada ponto da circunferência um número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$.

Essa associação possui caráter biunívoco, ou seja, além de a cada ponto da circunferência estar relacionado um único número real **x**, $x \in [0, 2\pi[$, também, reciprocamente, a cada número real desse intervalo associa-se um ponto sobre a circunferência trigonométrica.

Vamos estender o intervalo dessa associação:

> A cada número real está associado um ponto da circunferência.

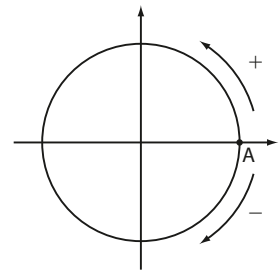
Isso permitirá a definição das funções **trigonométricas** (ou funções **circulares**), além de garantir o seu caráter cíclico (ou periódico).

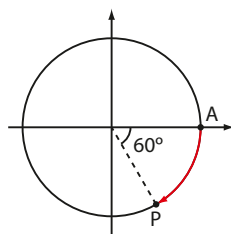
Até o capítulo anterior trabalhamos apenas na "primeira volta", ou seja, no intervalo $[0, 2\pi[$.

Com a inclusão dos números reais negativos e dos números reais maiores que (ou iguais a) $2\pi$, poderemos ampliar nosso estudo às demais voltas.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Como podemos determinar o ponto **P**, imagem de **x**?

- Se $x > 0$, partimos do ponto A(1, 0) e percorremos, no sentido anti-horário, um arco de comprimento **x** (e medida x rad), cujas extremidades são **A** e **P**.
- Se $x < 0$, partimos do ponto A(1, 0) e percorremos, no sentido horário, um arco de comprimento $|x|$, cujas extremidades são **A** e **P**.
- Se $x = 0$, a imagem **P** é o próprio ponto **A**.

Veja os exemplos a seguir.

**EXEMPLO 1**

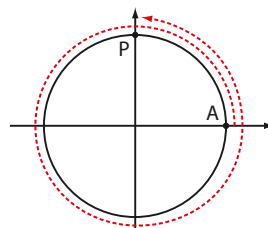
$$x = -\frac{\pi}{3}$$

**P** é imagem de $-\frac{\pi}{3}$.

O comprimento do arco $\overset{\frown}{AP}$ é igual a $\left|-\frac{\pi}{3}\right| = \frac{\pi}{3}$.

**EXEMPLO 2**

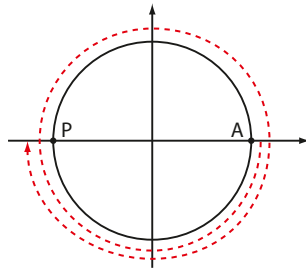
$$x = \frac{5\pi}{2}$$

Observe que

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underbrace{2\pi}_{\text{uma volta completa}} + \frac{\pi}{2}$$

**P** é imagem de $\frac{5\pi}{2}$.

**EXEMPLO 3**

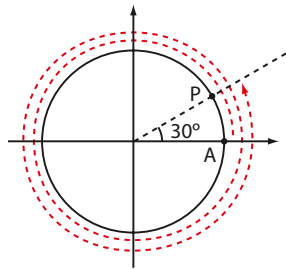
$x = -3\pi$

Note que $-3\pi = \underbrace{-(2\pi + \pi)}_{\text{uma volta e meia no sentido horário}}$

**P** é imagem de $-3\pi$.

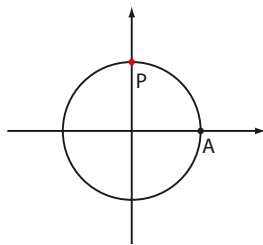
**EXEMPLO 4**

$x = \frac{25\pi}{6}$

Observe que

$\frac{25\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \underbrace{4\pi}_{\text{duas voltas completas}} + \frac{\pi}{6}$

**P** é imagem de $\frac{25\pi}{6}$.

Não é difícil perceber que um determinado ponto da circunferência trigonométrica é imagem de infinitos números reais.

Veja, por exemplo, o ponto **P** nesta figura:

Sabemos que **P** é imagem de $\frac{\pi}{2}$. Para obter outros números reais cuja imagem também seja **P**, podemos fazer:

- $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + 6\pi = \frac{13\pi}{2}$

$\vdots$

Percorremos, a partir de **A**, no sentido anti-horário, um arco de comprimento $\frac{\pi}{2}$ e, em seguida, demos 1, 2, 3, ... voltas completas, no mesmo sentido.

- $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{2} - 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{2} - 3 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} - 6\pi = -\frac{11\pi}{2}$

$\vdots$

Percorremos, a partir de **A**, no sentido anti-horário, um arco de comprimento $\frac{\pi}{2}$ e, em seguida, demos 1, 2, 3, ... voltas completas, no outro sentido (horário).

De modo geral, possuem imagem em **P** todos os números reais da forma:

$\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, sendo **k** um número inteiro.

Todos os arcos assim construídos $\left(\ldots, -\frac{11\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \ldots\right)$ têm extremidades em **A** e **P**. Eles são chamados **arcos côngruos**.

**PENSE NISTO:**

Note que, se dois arcos, de medidas $\alpha_1$ e $\alpha_2$ radianos, são côngruos, então $\alpha_1 - \alpha_2 = k \cdot 2\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

Se $k \in \mathbb{Z}$, $k \cdot 2\pi \in \{\ldots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \ldots\}$; como $\alpha_1$ e $\alpha_2$ diferem de um número inteiro de voltas (pois são côngruos), então $\alpha_1 - \alpha_2 = k \cdot 2\pi$.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**1** Represente, na circunferência trigonométrica, as imagens dos números reais **x** tais que $x = \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

**Solução:**

Atribuímos valores inteiros para **k**:

$\vdots$

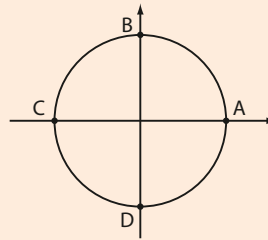
$k = -2 \Rightarrow x = -\pi$; a imagem é **C**

$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$; a imagem é **D**

$k = 0 \Rightarrow x = 0$; a imagem é **A**

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$; a imagem é **B**

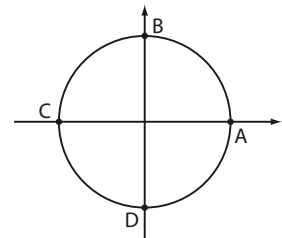
$k = 2 \Rightarrow x = \pi$; a imagem é **C**

$\vdots$

Assim, as imagens correspondentes aos números reais da forma $\frac{k\pi}{2}$, para **k** inteiro, são os pontos: **A**, **B**, **C** ou **D**.

## EXERCÍCIOS

**1** Agrupe os seguintes números reais de acordo com os quadrantes em que se encontram suas imagens na circunferência trigonométrica.

$-\frac{3\pi}{4}, \frac{22\pi}{3}, \frac{17\pi}{4}, -\frac{19\pi}{6}, \frac{26\pi}{3}, -\frac{5\pi}{4}, -0{,}5, \frac{41\pi}{5}, -\frac{11\pi}{3}, 10, -\frac{49\pi}{10}$ e $\frac{15\pi}{4}$

**2** Indique, na circunferência trigonométrica, as imagens dos seguintes números reais: $13\pi, -\frac{5\pi}{2}, 40\pi, \frac{7\pi}{2}, \frac{17\pi}{2}, -21\pi, -14\pi, -\frac{11\pi}{2}, -7\pi, -\frac{25\pi}{2}$ e $800\pi$.

**3** Represente, na circunferência trigonométrica, as imagens dos números reais que pertencem aos seguintes conjuntos:

**a)** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

**b)** $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

**c)** $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

**d)** $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

**e)** $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

**4** As imagens dos números reais pertencentes ao conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k \cdot \pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ são os vértices de um polígono regular na circunferência trigonométrica.

**a)** Como se chama esse polígono?

**b)** Obtenha seu perímetro e sua área.

## Funções periódicas

No dia a dia, é comum encontrarmos diversos fenômenos que se repetem após o mesmo intervalo de tempo:

- os dias da semana repetem-se de 7 em 7 dias, de 14 em 14 dias, de 21 em 21 dias etc.;
- os meses do ano repetem-se de 12 em 12 meses, de 24 em 24 meses, de 36 em 36 meses etc.;
- as horas cheias, em um relógio analógico, repetem-se de 12 em 12 horas, de 24 em 24 horas, de 36 em 36 horas etc.

O menor intervalo de tempo em que ocorre a repetição de um determinado fato ou fenômeno é chamado de **período**.

Outros exemplos de fenômenos periódicos são as fases da Lua; a altura das marés; o movimento dos braços (para frente e para trás) dos praticantes de *cooper* em uma corrida; o fluxo de ar através da traqueia, durante a inspiração ou expiração, no processo de respiração humana etc.

Na Matemática também existem funções que apresentam um comportamento periódico. Vejamos os exemplos a seguir.

**EXEMPLO 5**

Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida pela lei $f(x) = (-1)^x$. Acompanhe na tabela alguns valores que **f** assume à medida que **x** varia em $\mathbb{N}$:

| x | f(x) |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | −1 |
| 2 | 1 |
| 3 | −1 |
| 4 | 1 |
| 5 | −1 |
| ⋮ | ⋮ |

Não é difícil perceber que:

- se **x** é par, $f(x) = 1$;
- se **x** é ímpar, $f(x) = -1$.

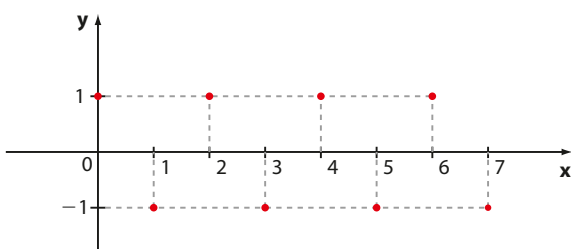
Observe que:

- $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = f(8) = \ldots$
- $f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = \ldots$

Nos dois casos, quando **x** varia por duas unidades, o valor de f(x) se repete:

$$f(x) = f(x + 2) = f(x + 4) = f(x + 6) = \ldots$$

O menor valor positivo de **p** para o qual $f(x) = f(x + p)$ é 2. Dizemos então que o período dessa função é 2.

Observe o gráfico de **f**:

$f(0) = 2 \cdot (-1)^0 = 2$
$f(1) = 2 \cdot (-1)^1 = -2$
$f(2) = 2 \cdot (-1)^2 = 2$
$f(3) = 2 \cdot (-1)^3 = -2$
⋮ ⋮
Enfim, se o expoente **x** é par, $f(x) = 2$, e se **x** é ímpar, $f(x) = -2$. Como $f(0) = f(2) = f(4) = \ldots = 2$ e $f(1) = f(3) = f(5) = \ldots = -2$, **f** é periódica e seu período é igual a 2.

**PENSE NISTO:**

A função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2 \cdot (-1)^x$ é periódica?

Uma função f: A → B é periódica se existir um número real positivo **p** tal que f(x) = f(x + p), ∀x ∈ A.
O menor valor positivo de **p** é chamado de **período** de **f**.

Como veremos a seguir, as funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas e podem modelar vários fenômenos periódicos.

Estudaremos duas funções trigonométricas: a **função seno** e a **função cosseno**.

## Função seno

Seja **x** um número real e **P** sua imagem na circunferência trigonométrica.

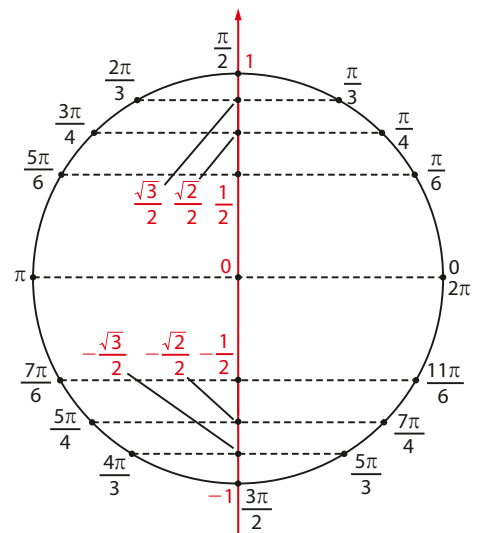
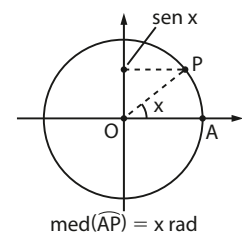
Denominamos de **função seno** a função f: ℝ → ℝ que associa a cada número real **x** o seu seno, isto é, f(x) = sen x.

Observe que **f** associa a cada número real **x** a ordenada do ponto correspondente à sua imagem **P** na circunferência trigonométrica. É importante lembrar que a ordenada de qualquer ponto pertencente à circunferência trigonométrica varia entre −1 e 1, isto é, −1 ⩽ sen x ⩽ 1.

Utilizando valores já conhecidos representados na circunferência trigonométrica ao lado, podemos identificar algumas propriedades da função seno:

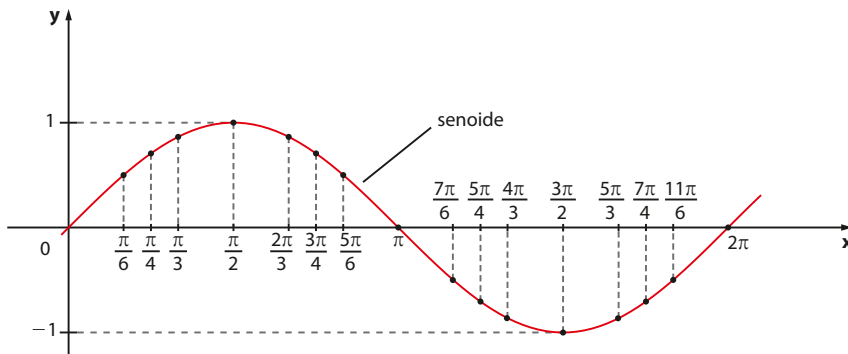
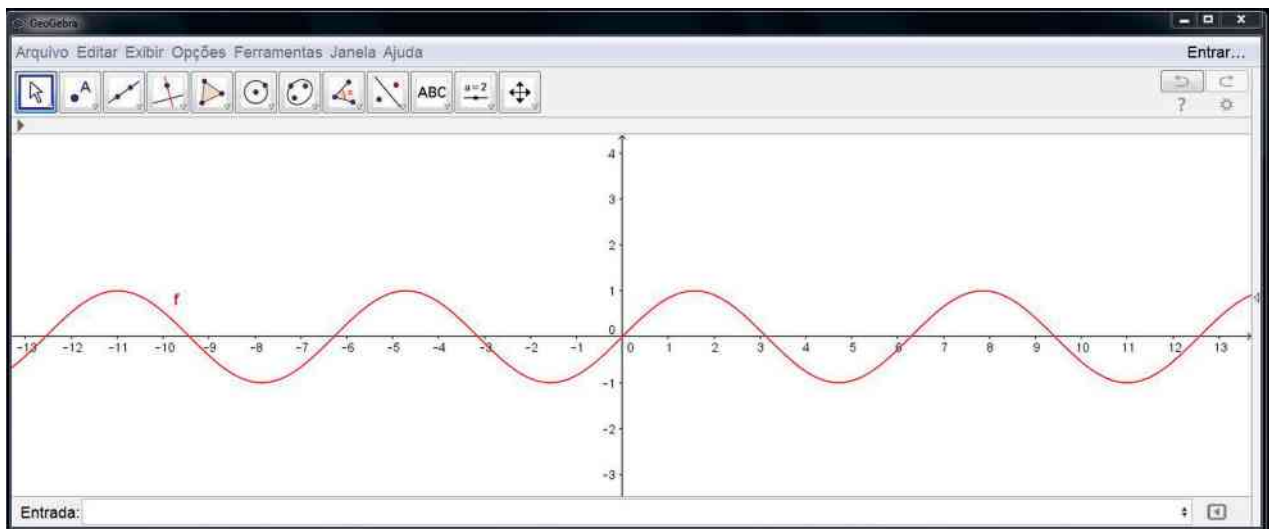
- O **sinal** da função **f** dada por f(x) = sen x é positivo se **x** pertence ao 1º ou ao 2º quadrantes; e é negativo se **x** pertence ao 3º ou ao 4º quadrantes.
- No 1º quadrante, a função **f** é crescente, pois, à medida que **x** aumenta, os valores de sen x aumentam de 0 até 1; no 2º e no 3º quadrantes, **f** é decrescente: à medida que **x** aumenta, os valores de y = sen x diminuem de 1 (valor máximo) até −1 (valor mínimo); no 4º quadrante, a função retoma o crescimento e seus valores aumentam de −1 a 0.

  Em resumo, no 1º e no 4º quadrantes **f** é **crescente** e no 2º e no 3º quadrantes **f** é **decrescente**.
- A função seno é **periódica** e seu período é 2π.

  De fato, os números reais **x** e x + k · 2π, para **k** inteiro, têm a mesma imagem na cirfunferência trigonométrica e, portanto, sen x = sen (x + k · 2π), k ∈ ℤ. Assim, **f** é periódica e seu período **p** corresponde ao menor valor positivo de k · 2π, que é 2π.

- O domínio e o contradomínio de **f** são iguais a $\mathbb{R}$. No entanto, o conjunto imagem da função seno é o intervalo real $[-1, 1]$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$.
- **f** é uma função **ímpar**, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{sen }(-x) = -\text{sen } x$.

Levando em consideração todas as propriedades anteriores, construímos o gráfico de **f**, dado por $f(x) = \text{sen } x$, que recebe o nome de **senoide**.

Se $x_1 \neq x_2$, então $\text{sen } x_1 \neq \text{sen } x_2$?

Não, pois existem elementos distintos do domínio que têm como imagem elementos não distintos do contradomínio, por exemplo, $0 \neq 2\pi$ e $\text{sen } 0 = \text{sen } 2\pi = 0$.

Representamos no gráfico apenas um período de **f**. A senoide, no entanto, continua para a esquerda de 0 e para a direita de $2\pi$, pois o domínio de **f** é $\mathbb{R}$. Note que, de $-2\pi$ a 0, de $2\pi$ a $4\pi$ etc., encontraríamos "cópias" do gráfico representado, devido à periodicidade de **f**.

GEOGEBRA

Observe o gráfico acima. Ele foi construído com o *software* livre GeoGebra. Nesse gráfico é possível visualizar quatro períodos completos da função $y = \text{sen } x$ (de $-4\pi$ a $-2\pi$, de $-2\pi$ a 0, de 0 a $2\pi$ e de $2\pi$ a $4\pi$; observe que $2\pi \simeq 6{,}28$ e $4\pi \simeq 12{,}56$).

Professor, comente com os estudantes que, para se obter esse gráfico, deve-se digitar em "Entrada": y = sin x.

A partir da senoide, é possível construir o gráfico de outras funções. Acompanhe os exemplos que seguem.

**EXEMPLO 6**

Para construir o gráfico de um período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$, podemos fazer uma tabela em três etapas:

- atribuímos valores convenientes para **x**;
- associamos a **x** os correspondentes valores de sen x;

- multiplicamos sen x por 3 a fim de obter a imagem correspondente a cada **x**.

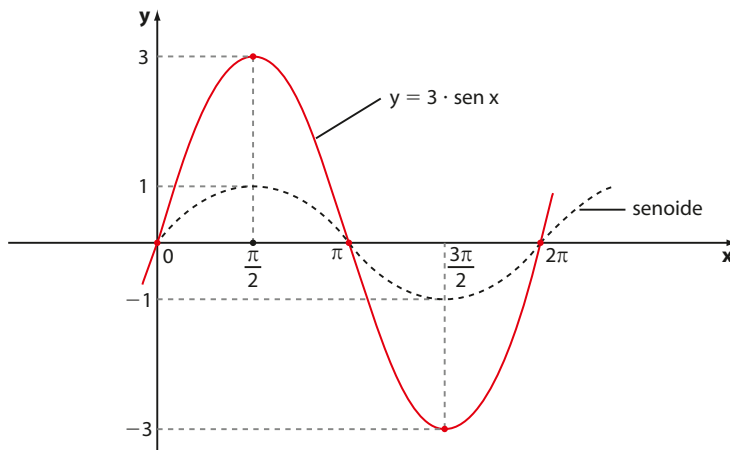
| x | sen x | y = 3 · sen x |
|---|---|---|
| 0 | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | | |
| $\pi$ | | |
| $\frac{3\pi}{2}$ | | |
| $2\pi$ | | |

→

| x | sen x | y = 3 · sen x |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | |
| $\pi$ | 0 | |
| $\frac{3\pi}{2}$ | −1 | |
| $2\pi$ | 0 | |

→

| x | sen x | y = 3 · sen x |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 3 |
| $\pi$ | 0 | 0 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | −1 | −3 |
| $2\pi$ | 0 | 0 |

Observe que o período de **f** é $2\pi$, e seu conjunto imagem é $Im = [-3, 3]$.

Fixemos $x_0$; na senoide temos $f(x_0) = \text{sen } x_0$; na função **g** dada temos $g(x_0) = 3 \text{ sen } x_0 = 3 \cdot f(x_0)$.

Professor, comente que a construção dos dois gráficos no mesmo sistema de coordenadas facilita a visualização dessa observação.

**PENSE NISTO:**

Observe que, no gráfico de y = 3 · sen x, para cada **x** corresponde uma ordenada **y** que é o triplo da ordenada na senoide (y = sen x).

**EXEMPLO 7**

Vamos construir o gráfico de um período da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por y = sen 2x.
Há três etapas na construção da tabela:

- atribuímos valores convenientes para t = 2x;
- associamos a cada **t** (t = 2x) o correspondente sen t (sen 2x);
- calculamos os valores de **x** a partir dos valores de **t** $\left(x = \frac{t}{2}\right)$.

| x | t = 2x | y |
|---|---|---|
| | 0 | |
| | $\frac{\pi}{2}$ | |
| | $\pi$ | |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | |
| | $2\pi$ | |

→

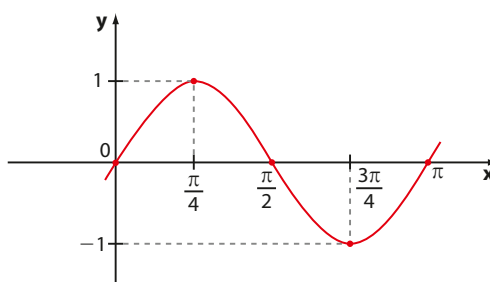
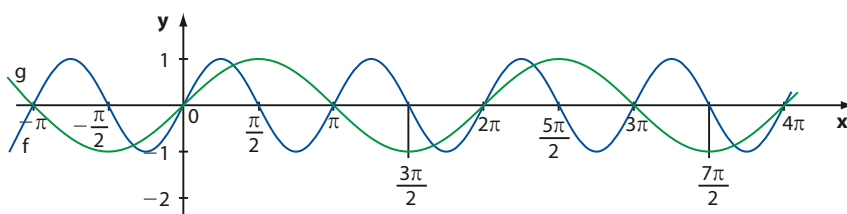
| x | t = 2x | y = sen 2x |
|---|---|---|
| | 0 | 0 |
| | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| | $\pi$ | 0 |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | −1 |
| | $2\pi$ | 0 |

→

| x | t = 2x | y = sen 2x |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | 0 |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | −1 |
| $\pi$ | $2\pi$ | 0 |

Como sabemos, para que sen t complete um período, é necessário que **t** varie de 0 a $2\pi$.

Temos: $0 \leqslant t \leqslant 2\pi \Leftrightarrow 0 \leqslant 2x \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant \pi$, isto é, $x \in [0, \pi]$.

Assim, o período da função **f** dada por $y = \text{sen } 2x$ corresponde ao comprimento do intervalo $[0, \pi]$, que é $\pi - 0 = \pi$. O comprimento de um intervalo real $[a, b]$ é igual à diferença $b - a$. Observe, ao lado, um período completo do gráfico de **f**.

Veja a seguir a construção, no mesmo plano cartesiano, dos gráficos das funções **f** e **g**, dadas por $f(x) = \text{sen } 2x$ e $g(x) = \text{sen } x$.

Professor, sugira aos estudantes que construam os gráficos de **f** e **g** no GeoGebra. Alerte-os de que, na digitação da lei que define **f** no GeoGebra, o uso dos parênteses é obrigatório. Deve-se digitar: y = sin (2x).

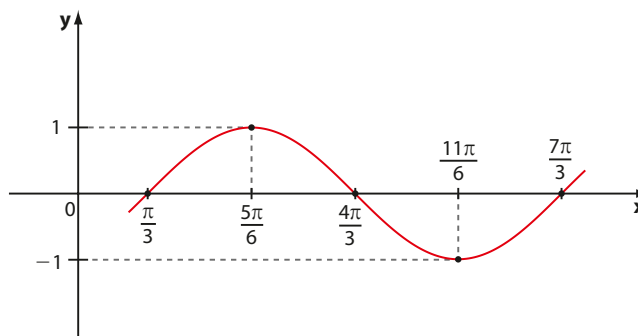
Veja que o gráfico de **f** (quando comparado ao gráfico de **g**) sofreu uma "compressão" na horizontal, causada pela redução do período: o período de $g(x) = \text{sen } x$ é igual a $2\pi$ e o período de $f(x) = \text{sen } 2x$ é igual a $\pi$.

Note ainda que o conjunto imagem de ambas é $[-1, 1]$.

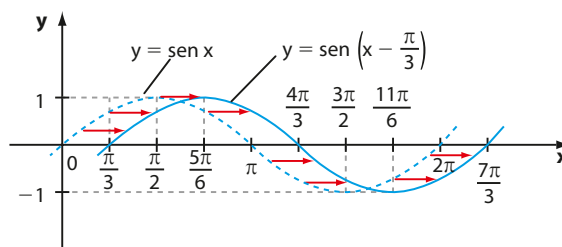
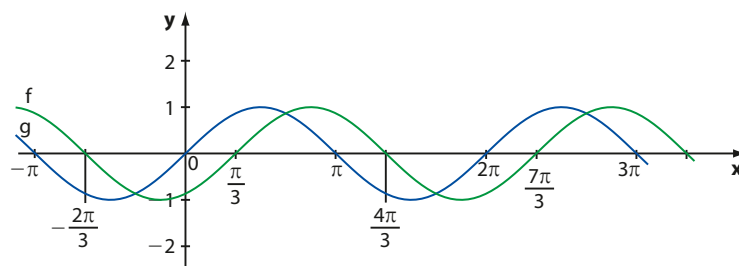
**EXEMPLO 8**

Vamos construir o gráfico de um período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
Seguimos o procedimento descrito nos exemplos anteriores:

- atribuímos valores convenientes para $t = x - \frac{\pi}{3}$;
- associamos a cada **t** $\left(t = x - \frac{\pi}{3}\right)$ o correspondente $\text{sen } t = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
- calculamos os valores de **x** a partir dos valores de **t** $\left(x = t + \frac{\pi}{3}\right)$.

| **x** | $t = x - \frac{\pi}{3}$ | $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ |
|---|---|---|
| $\frac{\pi}{3}$ | 0 | 0 |
| $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| $\frac{4\pi}{3}$ | $\pi$ | 0 |
| $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $-1$ |
| $\frac{7\pi}{3}$ | $2\pi$ | 0 |

No exemplo 8, note que:

- Im = [−1, 1], pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1$;
- o período de **f** corresponde ao comprimento do intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$, que é: $p = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$;

- o gráfico de $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ corresponde ao gráfico da senoide (definida por y = sen x), transladado de $\frac{\pi}{3}$ unidades para a direita, como podemos observar no gráfico acima, em que adicionamos $\frac{\pi}{3}$ a cada abscissa dos pontos do gráfico da senoide.

Observe os dois gráficos, $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ e g(x) = sen x, traçados no mesmo plano cartesiano.

Professor, comente com os estudantes que, no GeoGebra, o número real **π** deve ser digitado "por extenso": pi. Assim, a digitação correta da lei de **g** no *software* é y = sin (x − pi/3). O uso dos parênteses é obrigatório. Estimule-os a construir os gráficos dessas duas funções com o GeoGebra.

## Período da função seno

> Sejam **c** e **d** números reais, com $c \neq 0$. A função definida por y = sen (cx + d) tem período **p** dado por $p = \frac{2\pi}{|c|}$.

De fato, fazendo t = cx + d, para que sen t complete um período, é necessário que **t** varie de 0 a 2π:

$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi \Leftrightarrow 0 \leqslant cx + d \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -d \leqslant cx \leqslant -d + 2\pi$$

- Para c > 0, temos: $-\frac{d}{c} \leqslant x \leqslant \frac{-d + 2\pi}{c}$, isto é, $x \in \left[-\frac{d}{c}, \frac{-d + 2\pi}{c}\right]$, e o período **p** é:

$$\frac{-d + 2\pi}{c} - \left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{2\pi}{c}$$

- Para c < 0, temos: $-\frac{d}{c} \geqslant x \geqslant \frac{-d + 2\pi}{c}$, isto é, $x \in \left[\frac{-d + 2\pi}{c}, -\frac{d}{c}\right]$, e o período **p** é:

$$-\frac{d}{c} - \left(\frac{-d + 2\pi}{c}\right) = -\frac{2\pi}{c} > 0$$

Reunindo os dois casos, teremos $p = \frac{2\pi}{|c|}$.

Assim:

- no exemplo 6, para a função dada por f(x) = 3 · sen x, temos o período $\frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$;
- no exemplo 7, para a função dada por f(x) = sen 2x, o período pode ser determinado por $p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$;
- no exemplo 8, para a função definida por $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, temos o período $p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$.

# EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**2** Calcule o valor de:

**a)** $\text{sen}\,\frac{19\pi}{4}$ **b)** sen 1 980° **c)** $\text{sen}\,\frac{19\pi}{2}$

**Pense nisto:**
Os números reais da forma $\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ têm imagem no ponto **P**.
Daí $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$.
Analogamente, os reais da forma $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm imagem em **P'** e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = 1$, se $k \in \mathbb{Z}$.

**Solução:**

**a)** Note que $\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \underbrace{4\pi}_{\text{duas voltas completas}} + \frac{3\pi}{4}$;

assim, $\frac{19\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ têm mesma imagem **P** na circunferência trigonométrica e, portanto, $\text{sen}\,\frac{19\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{3\pi}{4}$.

Como $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, conclui-se que $\text{sen}\,\frac{19\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**b)** Dividindo 1 980° por 360°, temos:

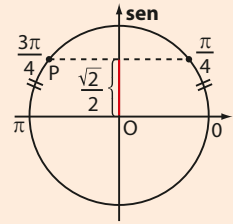
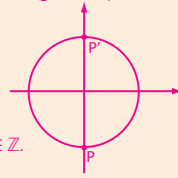
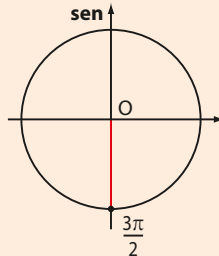
$$\begin{array}{l|l} 1\,980^\circ & 360^\circ \\ \downarrow & 5 \end{array}$$
resto = 180°

Assim, 1 980° = 360° · 5 + 180° e, desse modo, 1 980° e 180° são arcos côngruos.
Daí, sen 1 980° = sen 180° = 0.

**PENSE NISTO:**

Se **k** é um número inteiro, qual é o valor de $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$?
E de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$?

**c)** $\frac{19\pi}{2} = \frac{16\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \underbrace{8\pi}_{\text{quatro voltas completas}} + \frac{3\pi}{2}$

Assim, $\text{sen}\,\frac{19\pi}{2} = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$.

**3** Para quais valores reais de **m** existe o número real α tal que sen α = 2m − 1?

**Solução:**

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $-1 \leqslant \text{sen}\,\alpha \leqslant 1$, isto é, $-1 \leqslant 2m - 1 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2m \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant m \leqslant 1$.

Assim, a resposta é: $\{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant m \leqslant 1\}$.

**4** Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $y = 1 + 3 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$.

Obtenha o domínio, o conjunto imagem e o período de **f**.

**Solução:**

- Inicialmente, observe que o domínio de **f** é $\mathbb{R}$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, o número $1 + 3 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$ é real.
- Sabemos que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 3 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leqslant 3 \Rightarrow$
  $\Rightarrow -3 + 1 \leqslant 1 + 3\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leqslant 3 + 1$, isto é, $-2 \leqslant y \leqslant 4$; logo, Im = [−2, 4].
- Para que sen t complete um período, sendo $t = 2x - \frac{\pi}{5}$, devemos ter $0 \leqslant t \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 \leqslant 2x - \frac{\pi}{5} \leqslant 2\pi \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \frac{\pi}{5} \leqslant 2x \leqslant \underbrace{2\pi + \frac{\pi}{5}}_{\frac{11\pi}{5}} \Leftrightarrow \frac{\pi}{10} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{10}$, isto é, $x \in \left[\frac{\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}\right]$, e o período **p** é $\frac{11\pi}{10} - \frac{\pi}{10} = \pi$.

Também poderíamos ter aplicado a relação $p = \frac{2\pi}{|c|}$, sendo $c = 2 \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

## EXERCÍCIOS

**5** Dê o sinal de:

**a)** $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

**b)** $\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

**c)** $\text{sen}\ \frac{10\pi}{3}$

**d)** sen 850°

**e)** sen 3 816°

**f)** $\text{sen}\ \frac{67\pi}{8}$

**6** Qual é o valor de:

**a)** sen $4\pi$

**b)** $\text{sen}\ \frac{17\pi}{2}$

**c)** $\text{sen}\ \frac{19\pi}{3}$

**d)** sen 1 290°

**e)** $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

**f)** $\text{sen}\ \frac{29\pi}{4}$

**7** Classifique os itens a seguir como verdadeiros (**V**) ou falsos (**F**).

**a)** O valor de $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right)$, para **k** inteiro, é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**b)** $\text{sen}\ (k \cdot \pi) = 0$, para **k** inteiro.

**c)** sen 1 000° > 0.

**d)** O seno do número real 10 é negativo.

**e)** $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{9}\right) = \text{sen}\ \frac{\pi}{9}$.

**8** Determine o período e o conjunto imagem, construindo o gráfico de um período completo para cada função dada.

**a)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2\ \text{sen}\ x$.

**b)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\text{sen}\ x$.

**c)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}\ 3x$.

**d)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3 + \text{sen}\ x$.

**e)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

**9** Para quais valores reais de **t** temos $\text{sen}\ \alpha = \frac{t + 1}{2}$, sendo α um número real qualquer?

**10** O número real α é tal que $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, com $\text{sen}\ \alpha = 2m - 3$. Quais são os possíveis valores reais de **m**?

**11** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\ 4x$.

**a)** Qual é o período de **f**?

**b)** Qual é o valor máximo que **f** assume?

**12** Em uma pequena roda-gigante, a altura (em metros) em que um passageiro se encontra no instante **t** (em segundos) é dada pela lei:

$$h(t) = 6 + 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right), \text{ para } t \in [0, 270].$$

**a)** No início do passeio, a que altura se encontra o passageiro?

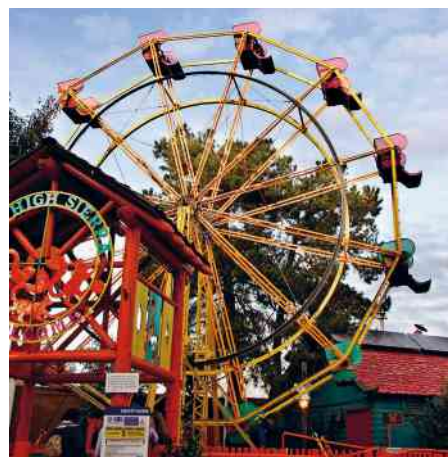
**b)** A que altura se encontra o passageiro após 9 s do início? Use $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$.

**c)** Qual é a altura mínima que esse passageiro atinge no passeio?

**d)** Qual é o tempo necessário para a roda-gigante dar uma volta completa?

**e)** Quantas voltas completas ocorrem no passeio?

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Aplicações

# A trigonometria e a roda-gigante

A roda-gigante é uma das atrações mais tradicionais dos parques de diversões.

Imagine uma roda-gigante, como a mostrada na figura 1 ao lado, que tenha 12 cadeiras igualmente distribuídas ao longo da circunferência, cujo raio mede 9m. Uma estrutura de ferro sustenta a roda-gigante a partir do seu centro, mantendo-a presa ao solo. A distância do centro da roda-gigante ao solo é 10 m.

figura 1

A roda gira, lentamente, com velocidade praticamente constante de 3° por segundo, completando a volta em 120 s. Um passageiro sentado em uma das cadeiras observa que sua altura em relação ao solo varia de maneira periódica ao longo do passeio, de forma que uma determinada altura é atingida algumas vezes à medida que a roda executa as várias voltas do passeio.

Como podemos expressar a altura em que se encontra uma determinada cadeira a cada instante do passeio?

Imagine que, no início da contagem do tempo, um passageiro se encontra na cadeira **A** (figura 2). Como a velocidade de giro é de 3°/s, em 10 s cada cadeira percorre 30°. Na figura 2 estão representadas as posições que esse passageiro vai ocupar a cada 10 s ao longo de uma volta completa da roda.

figura 2

Velocidade de giro: 3°/s $\left(\text{ou } \frac{\pi}{60} \text{ rad/s}\right)$

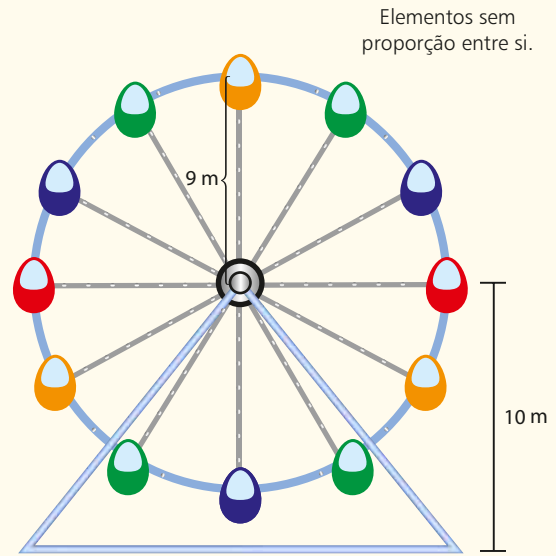
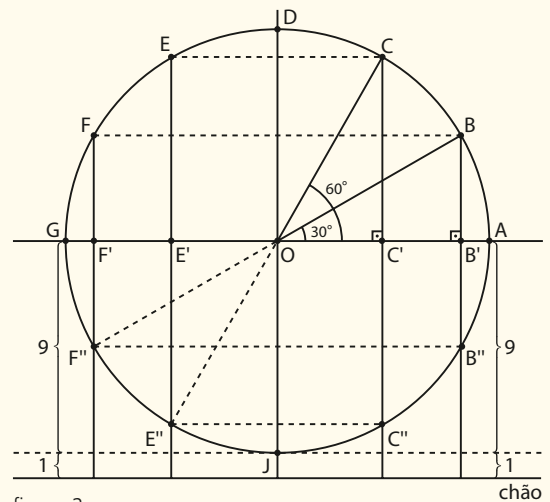
$\triangle BOB'$: $\text{sen } 30° = \frac{BB'}{OB} \Rightarrow$

$\Rightarrow BB' = 9 \cdot \text{sen } (10 \cdot 3°) = 9 \cdot \text{sen}\left(10 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$

$\triangle COC'$: $\text{sen } 60° = \frac{CC'}{OC} \Rightarrow$

$\Rightarrow CC' = 9 \cdot \text{sen } (20 \cdot 3°) = 9 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$

Observe que são iguais as alturas correspondentes aos seguintes pares de posições: **A** e **G**, **B** e **F**, **C** e **E**, **F**'' e **B**'' e **E**'' e **C**''.

Além disso, os segmentos $\overline{BB'}$, $\overline{FF'}$, $\overline{F'F''}$ e $\overline{B'B''}$ são congruentes (Atenção, porém, para a diferença das alturas correspondentes a **B** e **B**'' e também a **F** e **F**''!), ocorrendo o mesmo com os segmentos $\overline{CC'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{E'E''}$ e $\overline{C'C''}$.

Temos as seguintes posições para uma volta completa na roda, considerando intervalos de tempo de dez em dez segundos:

| Tempo (s) | Posição | Altura (m) |
|---|---|---|
| 0 | A | $10 + 9 \cdot \text{sen}\left(0 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 0 = 10$ |
| 10 | B | $10 + 9 \cdot \text{sen}\left(10 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 4{,}5 = 14{,}5$ |
| 20 | C | $10 + 9 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \frac{\pi}{60}\right) \simeq 10 + 7{,}8 \simeq 17{,}8$ |
| 30 | D | $10 + 9 \cdot \text{sen}\left(30 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 9 = 19$ |
| 40 | E | $10 + 9 \cdot \text{sen}\left(40 \cdot \frac{\pi}{60}\right) \simeq 10 + 7{,}8 \simeq 17{,}8$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 70 | F" | $10 + 9 \cdot \text{sen}\left(70 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + (-4{,}5) = 5{,}5$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 90 | J | $10 + 9 \cdot \text{sen}\left(90 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + (-9) = 1$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 110 | B" | $10 + 9 \cdot \text{sen}\left(110 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + (-4{,}5) = 5{,}5$ |
| 120 | A | $10 + 9 \cdot \text{sen}\left(120 \cdot \frac{\pi}{60}\right) = 10 + 0 = 10$ |

**OBSERVAÇÃO**

Note que a altura relativa ao ponto **F**", por exemplo, também pode ser expressa por: $10 - \overline{F'F''} = 10 - 9 \cdot \text{sen}\, 30° = 10 + 9 \cdot \text{sen}\, 210° = 10 + 9 \cdot \text{sen}\left(70 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$.

Raciocínio análogo pode ser usado para os pontos **E**", **C**" e **B**".

Observando a primeira e a última coluna da tabela, vemos que, para cada instante **t** (em segundos), corresponde uma altura **h** (em metros), dada por:

$$h(t) = 10 + 9 \cdot \text{sen}\left(t \cdot \frac{\pi}{60}\right)$$

O período dessa função é $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{60}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{60}} = 120$. Note que 120 s é o tempo de execução de uma volta completa.

A diferença entre a maior e a menor altura atingida nesse movimento é $\underbrace{19\text{ m}}_{h_{máx}} - \underbrace{1\text{ m}}_{h_{mín}} = 18\text{ m}$.

**Fonte de pesquisa:** VERBYTSKA, Oksana. *Matemática no dia a dia*. Universidade de Lisboa. Dissertação de mestrado. Disponível em: <repositorio.ul.pt/bitstream/10451/16037/1/ulfc112046_tm_Oksana_Verbytska.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

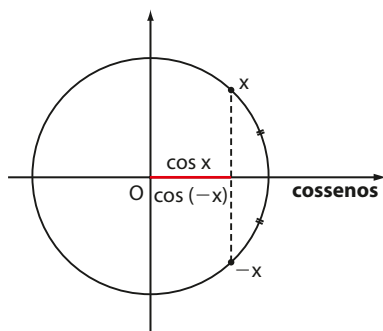
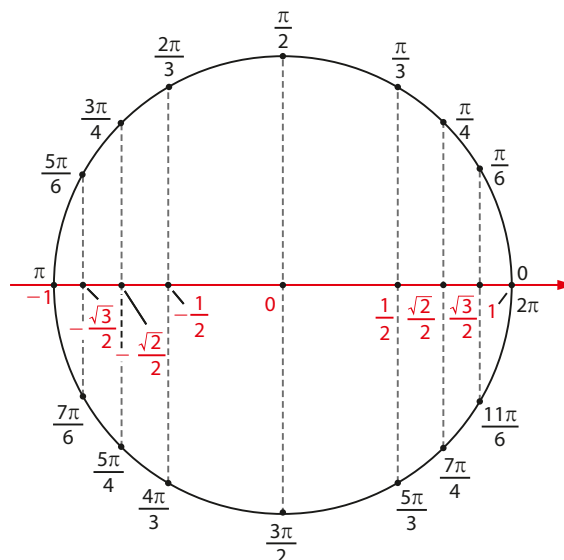
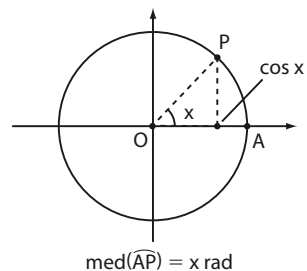
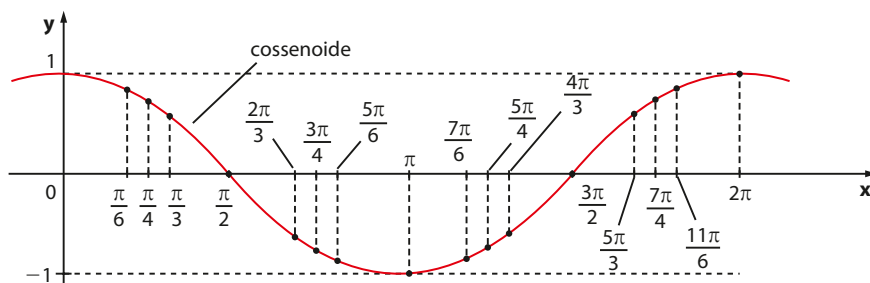
# Função cosseno

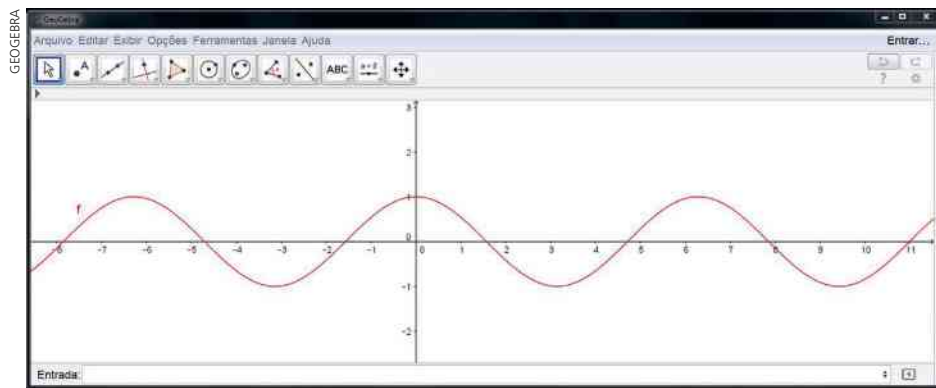
Seja **x** um número real e **P** sua imagem na circunferência trigonométrica. Chama-se **função cosseno** a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real **x** o seu cosseno, ou seja, $f(x) = \cos x$.

Observe que **f** associa a cada número real **x** a abscissa do ponto correspondente à sua imagem **P** na circunferência.

Vamos usar alguns valores já conhecidos representados na circunferência trigonométrica a seguir para reconhecer algumas propriedades da função cosseno.

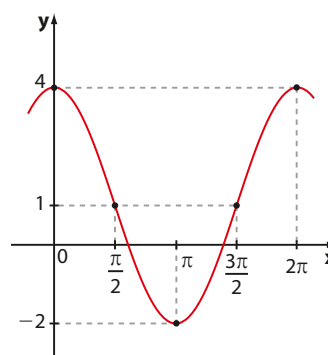
- O **sinal** da função cosseno é positivo se **x** pertence ao 1º ou ao 4º quadrantes, e é negativo se **x** pertence ao 2º ou ao 3º quadrantes.
- No 1º e no 2º quadrantes, **f** é **decrescente** (observe que os valores de cos x diminuem de 1 até −1 à medida que **x** aumenta); no 3º e no 4º quadrantes, os valores de cos x aumentam de −1 a 1, à medida que **x** aumenta, o que significa que **f** é **crescente**.

- A função cosseno é **periódica** e seu período é $2\pi$. Como vimos, os números reais **x** e $x + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma imagem na circunferência trigonométrica e, portanto, $\cos x = \cos (x + k \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. O período de **f** é o menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, que é $2\pi$.
- O domínio e o contradomínio de **f** são iguais a $\mathbb{R}$; o conjunto imagem de **f** é $[-1, 1]$, pois, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, já que o raio da circunferência trigonométrica é unitário e as abscissas dos pontos da circunferência variam de −1 até 1.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos (-x) = \cos x$; isso significa dizer que a função cosseno é uma **função par**.

Com as considerações anteriores, traçamos o gráfico de um período da função **f** definida por $f(x) = \cos x$. Esse gráfico recebe o nome de **cossenoide**.

Observe a seguir o gráfico de $y = \cos x$ construído com o GeoGebra.

GEOGEBRA

Seguindo o mesmo processo apresentado para a construção de outros gráficos similares à senoide, vamos construir dois gráficos obtidos a partir da cossenoide.

**EXEMPLO 9**

Vamos construir o gráfico de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = 3 \cdot \cos x + 1$.

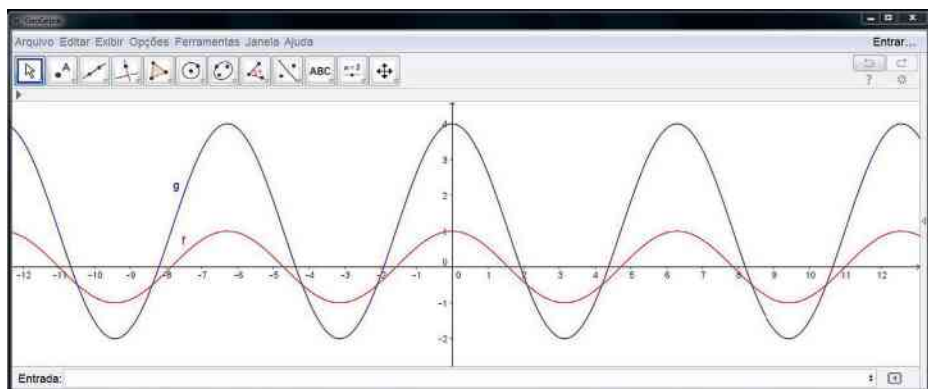
| x | cos x | $y = 3 \cdot \cos x + 1$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $3 \cdot 1 + 1 = 4$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 0 | $3 \cdot 0 + 1 = 1$ |
| $\pi$ | $-1$ | $3 \cdot (-1) + 1 = -2$ |
| $\frac{3\pi}{2}$ | 0 | $3 \cdot 0 + 1 = 1$ |
| $2\pi$ | 1 | $3 \cdot 1 + 1 = 4$ |

Observe, no exemplo 9, que:

- o período dessa função é $2\pi$, pois, para que cos x complete um período, **x** deve variar de 0 a $2\pi$.
- o conjunto imagem dessa função é $[-2, 4]$, pois, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 3 \cdot \cos x \leqslant 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + 1 \leqslant 3 \cdot \cos x + 1 \leqslant 3 + 1 \Rightarrow -2 \leqslant y \leqslant 4$$

A seguir é possível ver os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \cos x$ e $g(x) = 3 \cdot \cos x + 1$ no mesmo plano cartesiano construído no GeoGebra.

GEOGEBRA

Observe o "alongamento na vertical" no gráfico de **g** comparado ao gráfico de **f**. O conjunto imagem de **f** é $[-1, 1]$ de comprimento $1 - (-1) = 2$ e o conjunto imagem de **g** é $[-2, 4]$ de comprimento $4 - (-2) = 6$. O período de ambas as funções é $2\pi$.

Professor, é importante que os estudantes lembrem que, ao digitar a lei de **g** no GeoGebra, é preciso colocar o sinal de multiplicação, indicado por *: y = 3 * cos x + 1.

**EXEMPLO 10**

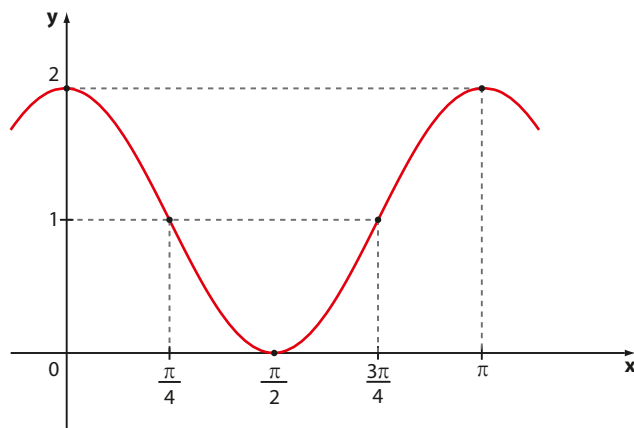
Vamos construir o gráfico de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = 1 + \cos 2x$.

| x | 2x | cos 2x | y = 1 + cos 2x |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | |
| | $\frac{\pi}{2}$ | 0 | |
| | $\pi$ | $-1$ | |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | 0 | |
| | $2\pi$ | 1 | |

→

| x | 2x | cos 2x | y = 1 + cos 2x |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | $1 + 1 = 2$ |
| | $\frac{\pi}{2}$ | 0 | $1 + 0 = 1$ |
| | $\pi$ | $-1$ | $1 + (-1) = 0$ |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | 0 | $1 + 0 = 1$ |
| | $2\pi$ | 1 | $1 + 1 = 2$ |

→

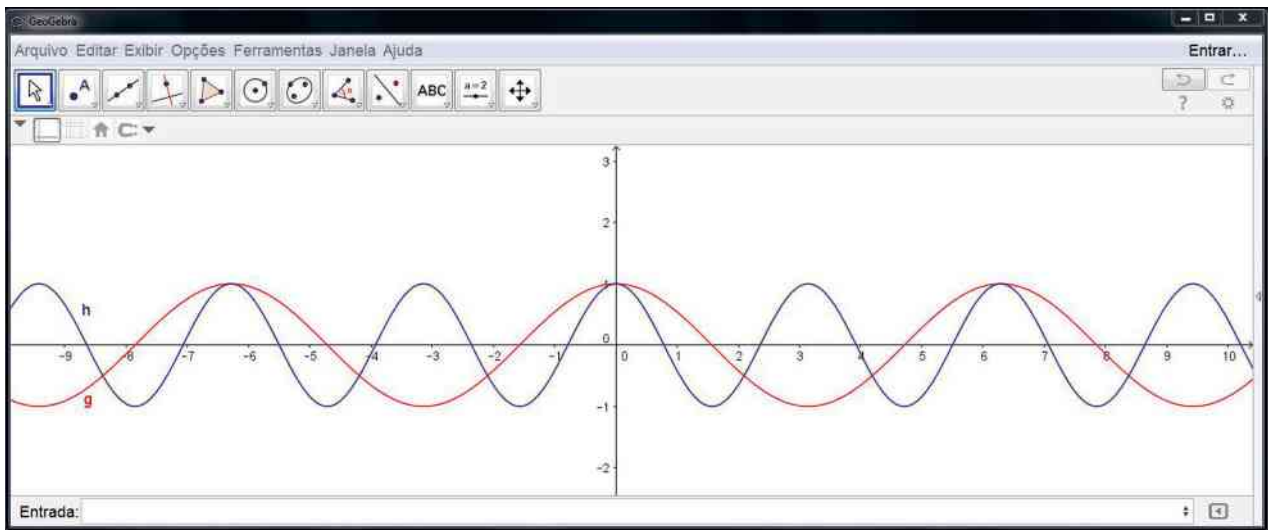
| x | 2x | cos 2x | y = 1 + cos 2x |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $-1$ | 0 |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | 0 | 1 |
| $\pi$ | $2\pi$ | 1 | 2 |

Note que $Im = [0, 2]$ e o período da função é $p = \pi$, pois, para que $\cos 2x$ complete um período, é necessário que $2x$ varie de 0 a $2\pi$: $0 \leqslant 2x \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant \pi$, isto é, $x \in [0, \pi]$ e o período é $\pi - 0 = \pi$.

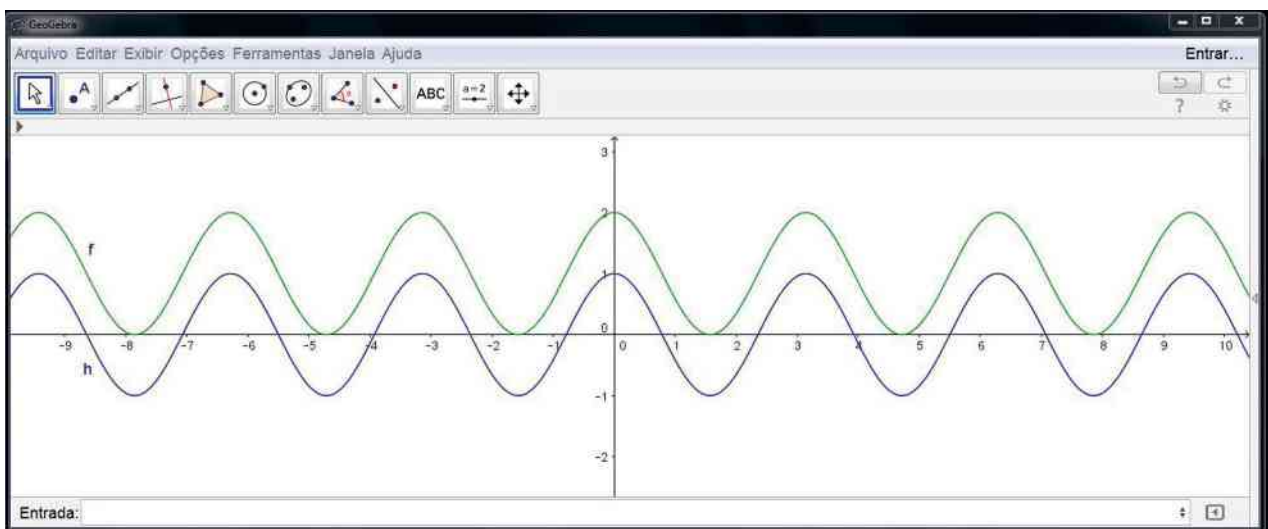
**OBSERVAÇÃO**

Por meio de raciocínio idêntico ao apresentado no item anterior, temos que o período **p** da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = cos (cx + d), sendo **c** e **d** números reais, com c ≠ 0, é $p = \frac{2\pi}{|c|}$.

Compare inicialmente os gráficos das funções **g** e **h**, dados respectivamente por g(x) = cos x e h(x) = cos (2x), traçados em um mesmo sistema de coordenadas, com auxílio do GeoGebra.

Observe que, ao "se comprimir na horizontal" o gráfico de **g**, obtém-se o gráfico de **h**: o período de **g** é 2π e o período de **h** é π.

GEOGEBRA

A seguir, observe que o gráfico da função pedida no exemplo 10, f(x) = 1 + cos (2x), é obtido a partir do gráfico de h(x) = cos (2x) transladando-o uma unidade para cima, na vertical.

GEOGEBRA

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**5** Calcule:

**a)** $\cos \frac{29\pi}{6}$ **b)** $\cos 100\pi$

**Solução:**

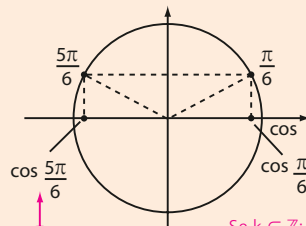
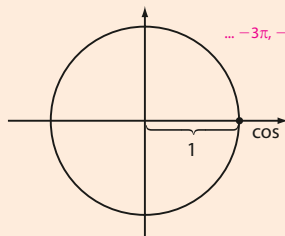
**a)** $\frac{29\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \underbrace{4\pi}_{\text{duas voltas completas}} + \frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6}$ $\frac{\pi}{6}$ cos cos $\frac{5\pi}{6}$ cos $\frac{\pi}{6}$

Assim, $\frac{29\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ têm a mesma imagem na circunferência trigonométrica e $\cos \frac{29\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**b)** $100\pi = 50 \cdot 2\pi$

$\cos 100\pi = \cos 2\pi = \cos 0 = 1$

... $-2\pi, 0, 2\pi$, ... ... $-3\pi, -\pi, \pi$,... cos

Se $k \in \mathbb{Z}$:
- $k \cdot 2\pi \in \{..., -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ...\}$; $\cos (k \cdot 2\pi) = 1$
- $k \cdot \pi \in \{..., -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$ $\cos (k\pi) = 1$ ou $-1$

**PENSE NISTO:**

Para $k \in \mathbb{Z}$, qual é o valor de $\cos (k \cdot 2\pi)$? E de $\cos (k \cdot \pi)$?

**6** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$. Qual é o período de **f**?

**Solução:**

Façamos $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$; para que $\cos t$ complete um período, **t** deve variar de 0 a $2\pi$:

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 \leqslant \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \leqslant 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{13\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{13\pi}{3}$; assim $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}\right]$ e o período **p** de **f** é igual ao comprimento desse intervalo, que é igual a: $p = \frac{13\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$.

Também podemos usar a relação $p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

## EXERCÍCIOS

**13** Calcule o valor de:

**a)** $\cos 11\pi$

**b)** $\cos 10\pi$

**c)** $\cos \frac{13\pi}{2}$

**d)** $\cos \frac{27\pi}{2}$

**e)** $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

**f)** $\cos(-7\pi)$

**14** Calcule o valor de:

**a)** $\cos 1\,560°$

**b)** $\cos 1\,035°$

**c)** $\cos \frac{19\pi}{6}$

**d)** $\cos \frac{22\pi}{3}$

**e)** $\cos(-270°)$

**f)** $\cos \frac{43\pi}{4}$

**15** Calcule o valor de **y** na expressão:

$$y = \frac{\cos \frac{9\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{9\pi}{2}}{\cos \frac{17\pi}{4} + 3 \cdot \operatorname{sen} \frac{17\pi}{4}}$$

**16** Sabendo que **x** é um número real pertencente ao intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, determine os possíveis valores reais de **m** de modo que tenhamos $\cos x = \frac{2m}{5}$.

**17** Se $x \in \mathbb{R}$, quais são os possíveis valores inteiros de **m** que satisfazem à igualdade $\cos x = \frac{3m}{2} - \frac{1}{3}$?

**18** Determine o período e o conjunto imagem e construa o gráfico de um período completo para cada função dada:

**a)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot \cos x$

**b)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 - \cos x$

**c)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

**d)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos 3x$

**e)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 + \cos 3x$

**19** Indique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações a seguir e corrija as que são falsas.

**a)** $\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, para **k** inteiro.

**b)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) = 0$, para **k** inteiro.

**c)** A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \cdot \cos x$ tem valor mínimo igual a $-1$.

**d)** A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \cos \pi$ é periódica.

**e)** O período de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)$ é 16.

**f)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{20}\right) > 0$

**20** Um artigo publicado em um caderno de economia prevê que as exportações de um certo país (em milhões de dólares), no ano de 2020 + x, em que $x \in \{0, 1, 2, ..., 19, 20\}$, serão dadas pela lei:

$$f(x) = 400 + 18 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

Supondo que isso realmente ocorra, determine:

**a)** o valor das exportações desse país nos anos de 2020, 2025 e 2030, em milhões de dólares;

**b)** quantas vezes, entre 2020 e 2040, **f** atingirá seu valor mínimo e qual é esse valor?

**21** Para cada função **f** seguinte, especifique seu domínio, seu conjunto imagem e seu período:

**a)** $f(x) = \cos 3x$

**b)** $f(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

**c)** $f(x) = -1 + 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

**d)** $f(x) = x + \cos\frac{\pi}{5}$

**e)** $f(x) = -4 \text{ sen } 6x$

**22** Em um mesmo plano cartesiano, construa, em cada caso, os gráficos das funções **f** e **g** definidas por:

**a)** $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

**b)** $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

**23** (Enem-MEC) Um satélite de telecomunicações, **t** minutos após ter atingido sua órbita, está a **r** quilômetros de distância do centro da Terra. Quando **r** assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de **r** em função de **t** seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0{,}15 \cdot \cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de **r**, no apogeu e no perigeu, representada por **S**.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, **S** atinge o valor de:

**a)** 12 765 km

**b)** 12 000 km

**c)** 11 730 km

**d)** 10 965 km

**e)** 5 865 km

## DESAFIO

Sejam **f** e **g** funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = -x + \frac{\pi}{2}$.

Qual é o número de soluções reais da equação $f(x) = g(x)$?

## TROQUE **IDEIAS**

### A trigonometria e o fenômeno das marés

RICARDO RIBAS/FOTOARENA

Praia de Serra Grande, Ilhéus (BA), 2014.

Vamos retomar a situação proposta na introdução deste capítulo, sobre as previsões para as marés nos dias 4, 5 e 6 de maio de 2015 no porto de Ilhéus, Bahia.

- As marés altas ocorrem de 12 em 12 horas e, para facilitar a modelagem, vamos admitir 2,0 m o valor comum previsto nos três dias;
- As marés baixas ocorrem de 12 em 12 horas; vamos adotar o valor 0,2 m como o valor de referência da altura da maré baixa prevista para os três dias.

**1ª parte**: Considerando as observações anteriores e lembrando que as previsões referem-se a três dias seguidos, podemos preencher (com algumas aproximações nos horários) a tabela que relaciona a altura da maré (em metros) e o tempo (em horas), contado a partir do primeiro horário de previsão (3 h 41 min), que será considerado o instante inicial ($t = 0$).

| **Tempo (h)** | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Altura da maré (m)** | | | | | | | | | |

2,0 0,2 2,0 0,2 2,0 0,2 2,0 0,2 2,0

**2ª parte**: Vamos supor que a relação entre a altura (**h**) da maré, em metros, e o tempo (**t**), em horas, se estabeleça por meio de uma função do tipo $h(t) = A + B \cos(wt)$, em que **A**, **B** e **w** são constantes reais positivas.

Nesta atividade, você vai determinar a lei da função que relaciona a altura (**h**) da maré e o tempo (**t**), construir seu gráfico e resolver um problema. Para isso, é preciso, primeiro, encontrar os valores das constantes **A**, **B** e **w**. Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

**a)** Determine o valor de **w**, lembrando que o período dessa função é dado por $p = \dfrac{2\pi}{|w|}$.

**b)** Com o valor de **w** obtido no item *a* escreva a lei (parcial) dessa função. Para determinar os valores de **A** e **B**, a sugestão é utilizar a informação sobre o conjunto imagem dessa função.

**c)** Escreva a lei da função que relaciona **h** com **t**.

**d)** Por meio da lei obtida, é possível prever a altura da maré em outros momentos, além dos de baixa e alta. Determine a altura da maré para $t = 10$ (aproximadamente 14 horas do 1º dia) e para $t = 28$ (aproximadamente 8 horas do 2º dia).

**e)** Construa o gráfico da função obtida no item *c*.

# Matrizes

## Introdução

ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

Em 2010, pouco mais de 9 mil pessoas residiam na zona rural de Manaus, enquanto cerca de 1792 mil residiam na zona urbana. Vista da cidade de Manaus (AM), 2015.

Em jornais, revistas e na internet frequentemente encontramos informações numéricas organizadas em forma de tabelas, com linhas e colunas. Vejamos alguns casos.

**População nos Censos Demográficos, segundo as Grandes Regiões, as Unidades da Federação e a situação do domicílio – 1980/2010**

| Ano | Situação do domicílio | BRASIL | Região Norte | Região Nordeste | Região Sudeste | Região Sul | Região Centro-Oeste |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1980[1] | Urbana | 82 013 375 | 3 398 897 | 17 959 640 | 43 550 664 | 12 153 971 | 4 950 203 |
| | Rural | 39 137 198 | 3 368 352 | 17 459 516 | 9 029 863 | 7 226 155 | 2 053 312 |
| 1991[2] | Urbana | 110 875 826 | 5 931 567 | 25 753 355 | 55 149 437 | 16 392 710 | 7 648 757 |
| | Rural | 36 041 633 | 4 325 699 | 16 716 870 | 7 511 263 | 5 724 316 | 1 763 485 |
| 2000[2] | Urbana | 137 755 550 | 9 002 962 | 32 929 318 | 65 441 516 | 20 306 542 | 10 075 212 |
| | Rural | 31 835 143 | 3 890 599 | 14 763 935 | 6 855 835 | 4 783 241 | 1 541 533 |
| 2010[2] | Urbana | 160 925 792 | 11 644 509 | 38 821 246 | 74 696 178 | 23 260 896 | 12 482 963 |
| | Rural | 29 830 007 | 4 199 945 | 14 260 704 | 5 668 232 | 4 125 995 | 1 575 131 |

(1) População recenseada. (2) População residente.

**Fonte:** IBGE, Censo Demográfico 1980, 1991, 2000 e 2010. Disponível em: <www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=8>.Acesso em: 10 mar. 2016.

**Produção, consumo e importação de feijão (mil toneladas)**

| Ano | Produção | | Consumo | | Importação | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Projeção | Limite superior | Projeção | Limite superior | Projeção | Limite superior |
| **2015/16** | 3363 | 4022 | 3357 | 3778 | 150 | 296 |
| **2016/17** | 3334 | 4267 | 3364 | 3959 | 149 | 357 |
| **2017/18** | 3345 | 4290 | 3371 | 4100 | 149 | 403 |
| **2018/19** | 3355 | 4313 | 3379 | 4219 | 149 | 442 |
| **2019/20** | 3366 | 4335 | 3386 | 4326 | 149 | 476 |
| **2020/21** | 3376 | 4358 | 3393 | 4423 | 148 | 507 |
| **2021/22** | 3387 | 4380 | 3400 | 4512 | 148 | 536 |
| **2022/23** | 3397 | 4403 | 3407 | 4596 | 148 | 562 |
| **2023/24** | 3408 | 4425 | 3414 | 4675 | 147 | 587 |
| **2024/25** | 3418 | 4447 | 3421 | 4751 | 147 | 611 |

**Fonte:** Projeções do agronegócio Brasil 2014/15 a 2024/25 — Projeções de longo prazo. jul. 2015. Disponível em: <www.agricultura.gov.br/arq_editor/PROJECOES_DO_AGRONEGOCIO_2025_WEB.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

Sejam **m** e **n** números naturais não nulos.

Uma tabela de $m \cdot n$ números reais dispostos em **m** linhas (filas horizontais) e **n** colunas (filas verticais) é uma matriz do tipo (ou formato) $m \times n$, ou simplesmente matriz $m \times n$.

Representamos usualmente uma matriz colocando seus elementos (números reais) entre parênteses ou entre colchetes.

Vejamos alguns exemplos:

- $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz $1 \times 3$.
- $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz $3 \times 2$.
- $C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz $2 \times 2$.
- $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz $3 \times 4$.
- $E = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz $3 \times 1$.

## UM POUCO DE HISTÓRIA

### Como surgiram as matrizes

As matrizes teriam surgido com a escola inglesa Trinity College, em um artigo do matemático Arthur Cayley (1821-1895), datado de 1858. Vale lembrar, no entanto, que, bem antes, no século III a.C., os chineses já desenvolviam um processo de resolução de sistemas lineares em que aparecia implícita a ideia das matrizes.

Cayley criou as matrizes no contexto de estrutura algébrica (assunto de Matemática do Ensino Superior), sem pensar em suas aplicações práticas que apareceriam posteriormente, como a representação de informações numéricas em tabelas, organizadas segundo linhas e colunas, a computação gráfica, as imagens digitais etc.

**Fonte de pesquisa:** BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

ALAMY/FOTOARENA

Trinity College, Cambridge, Inglaterra, 2015.

# Representação de uma matriz

Consideremos uma matriz **A** do tipo m × n. Um elemento qualquer dessa matriz pode ser representado pelo símbolo $\mathbf{a}_{ij}$, no qual o índice **i** refere-se à linha e o índice **j** refere-se à coluna em que se encontra tal elemento.

Vamos convencionar que as linhas são numeradas de cima para baixo, e as colunas, da esquerda para a direita.

De modo geral, uma matriz **A** do tipo m × n é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que **i** e **j** são números inteiros positivos tais que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, e $\mathbf{a}_{ij}$ é um elemento qualquer de **A**. Acompanhe o exemplo a seguir.

**EXEMPLO 1**

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

- O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11} = -1$.
- O elemento que está na linha 1, coluna 2, é $a_{12} = 0$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 1, é $a_{21} = -2$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 2, é $a_{22} = 5$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 1, é $a_{31} = 3$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 2, é $a_{32} = 4$.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**1** Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$.

**Solução:**

**A** é uma matriz do tipo 2 × 3 e pode ser genericamente representada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Fazendo $a_{ij} = i - j$, temos:

- $a_{11} = 1 - 1 = 0$
- $a_{12} = 1 - 2 = -1$
- $a_{13} = 1 - 3 = -2$
- $a_{21} = 2 - 1 = 1$
- $a_{22} = 2 - 2 = 0$
- $a_{23} = 2 - 3 = -1$

Assim, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

## Matrizes especiais

Vejamos alguns tipos de matrizes especiais.

- **Matriz linha:** é uma matriz formada por uma única linha.
  - $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz linha 1 × 3.
  - $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha 1 × 2.
- **Matriz coluna:** é uma matriz formada por uma única coluna.
  - $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 4 × 1.
  - $B = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 3 × 1.
- **Matriz nula:** é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero.
  Pode-se indicar a matriz nula m × n por $0_{m \times n}$.
  - $0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2 × 3.
  - $0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2 × 2.
- **Matriz quadrada:** é uma matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.
  - $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2 × 2. Dizemos que **A** é matriz quadrada de ordem 2.

- $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 7 \\ \sqrt{3} & 1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada $3 \times 3$. Dizemos que **B** é quadrada de ordem 3.

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**. Temos que:

- os elementos de **A** cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a **diagonal principal** de **A**.

  Se **A** é uma matriz quadrada de ordem 3, os elementos $\mathbf{a}_{11}$, $\mathbf{a}_{22}$ e $\mathbf{a}_{33}$ formam a diagonal principal de **A**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- os elementos da matriz **A** cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n + 1$ constituem a **diagonal secundária** de **A**.

  Retomando o exemplo anterior, os elementos $\mathbf{a}_{13}$, $\mathbf{a}_{22}$ e $\mathbf{a}_{31}$ formam a diagonal secundária de **A**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

## Matriz transposta

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **transposta de A** (indica-se por $\mathbf{A}^t$) a matriz:

$$A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$$

tal que $a'_{ji} = a_{ij}$ para todo **i** e todo **j**.

Em outras palavras, a matriz $\mathbf{A}^t$ é obtida a partir de **A** trocando-se, ordenadamente, suas linhas pelas colunas.

- A transposta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ é $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

  Para a matriz **A**, observe que: $a_{11} = 1 = a'_{11}$

  $a_{12} = 3 = a'_{21}$

  $a_{21} = 5 = a'_{12}$

  $a_{22} = 9 = a'_{22}$

- A transposta de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

- A transposta de $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ é $C^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

## EXERCÍCIOS

**1** Dê o tipo (formato) de cada uma das seguintes matrizes:

**a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

**b)** $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

**c)** $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

**d)** $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

**e)** $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

**f)** $F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & -1 \\ 3 & 9 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

**2** Em cada caso, determine o elemento $\mathbf{a}_{22}$, se existir:

**a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

**b)** $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$

**c)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

**d)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 7 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

**3** Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = 3i - 2j$.

**4** Determine a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, sendo $b_{ij} = 2 + i + j$.

**5** Qual é a soma dos elementos da matriz $C = (c_{ij})_{2 \times 4}$, em que $c_{ij} = 1 + i - j$?

**6** Em cada caso, obtenha a transposta da matriz dada:

**a)** $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

**b)** $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

**c)** $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

**d)** $D = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

**e)** $E = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 11 \\ 0,5 & 7 \\ 3 & 4,1 \end{pmatrix}$

**f)** $F = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

**g)** $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

**7** Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que $a_{ij} = 2i + 3j$. Escreva a matriz $\mathbf{A}^t$.

**8** Qual é o elemento $\mathbf{a}_{46}$ da matriz $A = (a_{ij})_{8 \times 8}$, em que $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{2j}{i}$?

**9** Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = i \cdot j$. Forneça os elementos que pertencem às diagonais principal e secundária de **A**.

**10** Na matriz seguinte, estão representadas as quantidades de sorvetes de 1 bola e de 2 bolas comercializados no primeiro bimestre de um ano em uma sorveteria:

$$A = \begin{pmatrix} 1\,320 & 1\,850 \\ 1\,485 & 2\,040 \end{pmatrix}$$

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Cada elemento $\mathbf{a}_{ij}$ dessa matriz representa o número de unidades do sorvete do tipo **i** (i = 1 representa uma bola e i = 2, duas bolas) vendidas no mês **j** (j = 1 representa janeiro e j = 2, fevereiro).

**a)** Quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos em janeiro?

**b)** Em fevereiro, quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos a mais que os de uma bola?

**c)** Se o sorvete de uma bola custa R$ 3,00 e o de duas bolas custa R$ 5,00, qual foi a arrecadação bruta da sorveteria no primeiro bimestre com a venda desses dois tipos de sorvete?

**11** A matriz **D** seguinte representa as distâncias (em quilômetros) entre as cidades **X**, **Y** e **Z**:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 27 \\ 15 & 0 & 46 \\ 27 & 46 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada elemento $\mathbf{a}_{ij}$ dessa matriz fornece a distância entre as cidades **i** e **j**, com $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$. Se a cidade **X** é representada pelo número 1, **Y** por 2 e **Z** por 3:

**a)** determine as distâncias entre **X** e **Y**, **Z** e **X**, e **Y** e **Z**.

**b)** qual é a transposta da matriz **D**?

**12** Dê a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$, em que: $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \geqslant j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$

**13** Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que: $a_{ij} = \begin{cases} \cos(\pi i), \text{ se } i \geqslant j \\ \text{sen}(\pi j), \text{ se } i < j \end{cases}$

**a)** Escreva **A**. **b)** Escreva $\mathbf{A}^t$.

**14** O quadrangular final de um torneio panamericano de futebol feminino reúne as seleções de Argentina, Brasil, Canadá e México, que jogam entre si no sistema "todos contra todos" uma única vez. Na matriz **Q** seguinte está representada a quantidade de gols que a seleção do país **i** marcou no jogo contra a seleção do país **j**, com $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, sendo que os índices 1, 2, 3 e 4 representam, respectivamente, as seleções de Argentina, Brasil, Canadá e México. (Se $i = j$, o elemento $\mathbf{q}_{ij}$ será indicado por **x**.)

$$Q = \begin{pmatrix} x & 0 & 2 & 2 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 3 & x & 0 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{pmatrix}$$

No futebol, a vitória vale 3 pontos, o empate vale 1 e a derrota não pontua.

**a)** Qual foi o placar de Canadá × México?

**b)** Qual seleção terminou com a menor pontuação? Qual foi essa pontuação?

**15** Na tabela a seguir, estão representadas as quantidades de proteínas, colesterol, cálcio e carboidrato encontradas em alguns tipos de queijos.

**Composição por 100 g**

| | Proteínas (g) | Colesterol (mg) | Cálcio (mg) | Carboidrato (g) |
|---|---|---|---|---|
| **Queijo minas frescal** | 17,4 | 62 | 579 | 3,2 |
| **Queijo mozarela** | 22,6 | 80 | 875 | 3,0 |
| **Queijo parmesão** | 35,6 | 106 | 992 | 1,7 |

**Fonte:** Tabela Brasileira de Composição de Alimentos (TACO) 4ª edição revisada e ampliada. 2011. Disponível em: <www.unicamp.br/nepa/taco/contar/taco_4_edicao_ampliada_e_revisada.pdf?arquivo=taco_4_versao_ampliada_e_revisada.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

**a)** A essa tabela é possível associar uma matriz $Q = (q_{ij})_{m \times n}$. Quais são os valores de **m** e **n**?

**b)** Obtenha os valores de $\mathbf{q}_{23}$ e $\mathbf{q}_{31}$, explicando seus respectivos significados.

**c)** Danilo consome, semanalmente, duas porções de 500 g de queijo mozarela cada uma. Substituindo-o por queijo minas frescal, quantos miligramas a menos de colesterol ele terá ingerido ao fim de um ano? Considere o ano com 52 semanas.

**d)** Uma amostra de queijo parmesão apresenta mais ou menos que a metade de carboidratos presente em uma amostra de mesma massa de queijo frescal?

**16** Chama-se **traço** de uma matriz quadrada a soma dos elementos de sua diagonal principal.

**a)** Determine os traços de cada uma das matrizes seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = (c_{ij})_{4 \times 4} \text{ em que } c_{ij} = 3i + j - 1.$$

**b)** Determine $0 \leqslant \theta < 2\pi$, de modo que o traço da matriz $M = \begin{pmatrix} \text{sen}\,\theta & -1 \\ 4 & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ seja igual a 1.

Aplicações

## Matrizes e imagens digitais

Você sabia que uma imagem na tela de um computador ou uma foto tirada em uma câmera digital podem ser representadas por matrizes?

SHUTTERSTOCK

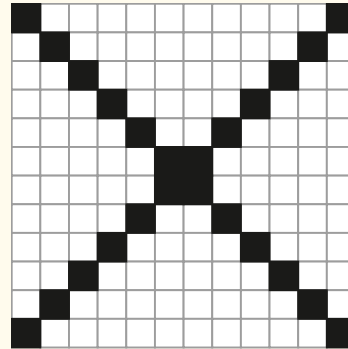
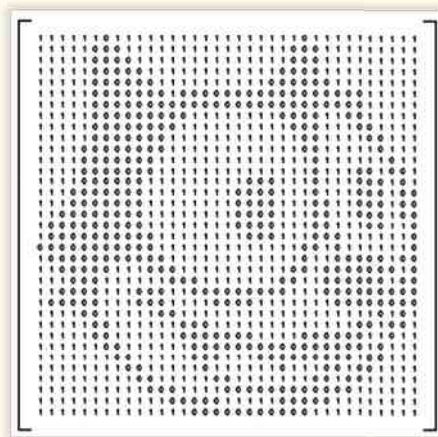
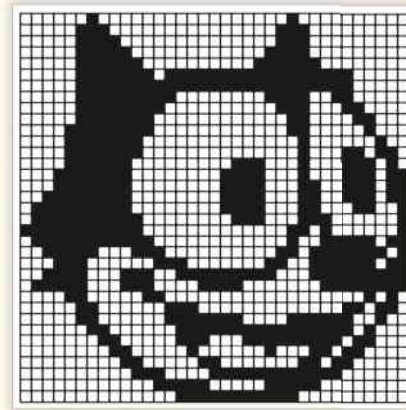
Uma imagem digital é formada por um grande número de pontos. Cada um desses pontos é chamado ***pixel*** (do inglês "picture element"). O *pixel* é a menor unidade (elemento) de uma imagem digital. Em linguagem informal, *pixels* são minúsculos "pontinhos" coloridos que, reunidos, compõem uma imagem. O **megapixel** é um múltiplo do *pixel* e corresponde a 1 milhão de *pixels*. Por exemplo, uma imagem digital obtida por uma câmera com resolução de 3 840 *pixels* na horizontal e 2 400 *pixels* na vertical ($3\,840 \times 2\,400$) corresponde a um total de 9 216 000 *pixels* (pois $3\,840 \cdot 2\,400 = 9\,216\,000$), ou seja, aproximadamente 9 *megapixels*. A título de curiosidade, para compartilhamento de fotos na internet ou envio por *e-mail*, são suficientes câmeras de 1 ou 2 *megapixels*.

Quanto maior o número de *pixels*, maior será o número de detalhes disponíveis no momento da captura da foto e, desse modo, maior é a chance de uma melhor resolução de imagem no momento que a foto for impressa (a resolução depende também da capacidade de captação do sensor da câmera).

Para compreender o modo pelo qual uma imagem digital é processada e digitalizada, vamos iniciar com um exemplo simples, no qual serão usadas apenas duas cores (imagens binárias): preto e branco.

Uma determinada imagem pode ser associada por meio de um algoritmo computacional a uma matriz cujos elementos são os números 0 e 1. Convencionaremos que 0 indica a cor preta e 1 indica a cor branca.

Seja **M** a matriz 12 × 12 dada a seguir; a imagem à direita correspondente a essa matriz **M**.

$$M = \begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0 \\ 1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

No exemplo seguinte, a matriz 35 × 35 à esquerda fornece a imagem digital do gato Félix, à direita.

Reprodução de imagem disponível em: <www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.

As imagens digitais são representações processadas por um computador ou adquiridas por meio de um dispositivo de captura e processadas, posteriormente, por algoritmos computacionais. Como informação digital, elas podem ser armazenadas, processadas e transformadas por qualquer sistema de informação multimídia.

Na computação, a menor unidade de informação que pode ser transmitida ou armazenada é 1 *bit* (do inglês "binary digit" ou "dígito binário"). O *bit* pode assumir apenas dois valores: 0 e 1. Normalmente, em imagens 2D (duas dimensões) capturadas em uma câmera digital, os programas computacionais associam a cada unidade de imagem um valor inteiro não negativo correspondente a 1 *byte* = 8 *bits*.

- O 1º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades;
- O 2º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades;

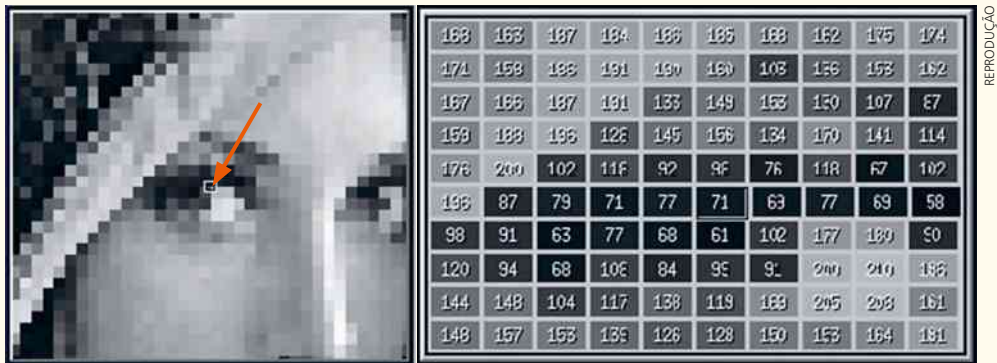
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

- O 8º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades.

Assim, o número de valores distintos possíveis que podem ser associados a um *pixel* é $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{8\text{ fatores}} = 2^8 = 256$.

Nessas condições, 0 passa a indicar a cor preta (ausência total de intensidade luminosa) e 255 passa a indicar a cor branca (intensidade luminosa máxima), sendo que os valores intermediários 1, 2, 3, ..., 252, 253 e 254 passam a indicar as inúmeras tonalidades de cinza. Do cinza muito escuro ao cinza muito claro há 254 tonalidades distintas!

É através dessa codificação que são formadas as imagens digitais em preto e branco, com as tonalidades intermediárias de cinza.

Observe estas duas imagens.

Reprodução de imagens disponível em: <www.ic.unicamp.br/~cpg/material-didatico/mo815/9802/curso/node6.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.

A imagem digital da esquerda mostra um rosto feminino e há um destaque em uma pequena parte do olho. A imagem da direita mostra uma matriz $10 \times 10$ (são 100 *pixels*, pois $10 \cdot 10 = 100$) associada a essa parte destacada. Observe que cada um dos elementos dessa matriz guarda um número inteiro entre 0 e 255, correspondente à tonalidade de cinza utilizada em cada *pixel*, que está indicada na própria matriz.

Por fim, para as imagens coloridas, no modelo mais usado de câmera, cada *pixel* pode ser decomposto em três cores primitivas — vermelho, verde e azul —, representadas pelas suas iniciais em inglês ("red" para vermelho, "green" para verde e "blue" para azul). Esse sistema é conhecido como RGB.

A cada *pixel* está associada uma tripla ordenada de valores, indicando, nessa ordem, a intensidade de vermelho, verde e azul no ponto de imagem considerado. Assim, por exemplo, temos as seguintes correspondências:

vermelho: RGB (255, 0, 0)

verde: RGB (0, 255, 0)

azul: RGB (0, 0, 255)

amarelo: RGB (255, 255, 0)

abóbora: RGB (255, 117, 24)

azul cobalto: RGB (0, 71, 171)

cobre: RGB (184, 115, 51)

laranja: RGB (255, 165, 0)

(255 → intensidade de vermelho; 165 → intensidade de verde; 0 → intensidade de azul)

Está curioso para saber a quantidade de tonalidades coloridas distintas que podem ser obtidas em um *pixel*? Esse número é superior a 16 milhões! Entenda o porquê:

- O primeiro elemento da tripla RGB, que dá a intensidade de vermelho, pode assumir 256 valores distintos.
- O segundo elemento da tripla RGB, que dá a intensidade de verde, pode assumir 256 valores distintos.
- O terceiro elemento da tripla RGB, que dá a intensidade de azul, pode assumir 256 valores distintos.

Assim, o número de tonalidades coloridas distintas em cada *pixel* é:

$$256 \cdot 256 \cdot 256 = 16\,777\,216$$

**Fontes de pesquisa:** Matrizes e imagens digitais. Disponível em: <www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix/br.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.; Fundamentos de processamento de imagem digital. Disponível em: <www.ic.unicamp.br/~cpg/material-didatico/mo815/9802/curso/curso.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.

## Igualdade de matrizes

Duas matrizes **A** e **B** de mesmo tipo $m \times n$ são iguais se todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, temos que $A = B$ se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo **i** ($i = 1, 2, ..., m$) e para todo **j** ($j = 1, 2, ..., n$).

**OBSERVAÇÃO**

Dizemos que elementos de mesmo índice (linha e coluna) são correspondentes.

Por exemplo, para que as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & d \\ c & -5 \end{pmatrix}$ sejam iguais, devemos ter: $\begin{cases} a = 3 \\ 1 = d \\ 2 = c \\ b = -5 \end{cases}$

## EXERCÍCIOS

**17** Determine os números reais **a**, **b**, **c** e **d** para que se tenha $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ d & 6 \end{pmatrix}$

**18** Determine **x**, **y** e **z** reais que satisfaçam

$$\begin{pmatrix} x + y & 2 \\ 4 & x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$$

**19** Em cada item determine, caso exista, o número real **m** que satisfaz a igualdade:

**a)** $\begin{pmatrix} m - 1 & 0 \\ 1 - m & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2m \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

**b)** $\begin{pmatrix} 9 - m^2 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 7 \end{pmatrix}$

**20** Determine os números reais **p** e **q** de modo que as matrizes $\begin{pmatrix} p + q & -2 \\ 0 & 2p - q \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

**21** Determine os números reais **a**, **b**, **c**, **d**, **e** e **f** que tornam verdadeira a igualdade:

$$\begin{bmatrix} a + 3 & b + 2 & c + 1 \\ d & 5 - e & 2f \end{bmatrix}^t = 0_{3 \times 2}$$

**22** Uma matriz quadrada **A** é dita simétrica se $A = A^t$.

**a)** Entre as matrizes seguintes, quais são simétricas?

$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} \text{sen}\ \pi & \cos \pi \\ \text{sen}\ \frac{3\pi}{2} & \cos \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}$

**b)** Sabendo que a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & y \\ x & -2 & 5 \\ 3 & z & 1 \end{pmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de $x + 2y - z$?

## Adição de matrizes

As tabelas abaixo representam o número de unidades vendidas, em uma concessionária, de dois veículos 0 km, modelos **A** e **B**, de acordo com o tipo de combustível, durante os dois primeiros meses de determinado ano:

**Janeiro**

| Modelo \ Combustível | Flex | Gasolina | Álcool |
|---|---|---|---|
| **A** | 4 453 | 1 985 | 415 |
| **B** | 2 693 | 1 378 | 289 |

**Fevereiro**

| Modelo \ Combustível | Flex | Gasolina | Álcool |
|---|---|---|---|
| **A** | 5 893 | 2 031 | 531 |
| **B** | 3 412 | 1 597 | 402 |

De que maneira podemos determinar as vendas de cada tipo de veículo no primeiro bimestre desse ano? Intuitivamente, sabemos que é preciso somar os elementos correspondentes das tabelas anteriores. Usando matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} 4453 & 1985 & 415 \\ 2693 & 1378 & 289 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5893 & 2031 & 531 \\ 3412 & 1597 & 402 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10346 & 4016 & 946 \\ 6105 & 2975 & 691 \end{bmatrix}$$

Assim, por exemplo, 4016 é o número total de veículos do modelo **A**, a gasolina, vendidos no primeiro bimestre.

Dadas duas matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a soma de **A** com **B** (representa-se por $A + B$) é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Em outras palavras, a matriz soma **C** é do mesmo tipo que **A** e **B** e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de **A** e **B**.

- $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & \frac{5}{2} \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**2** Resolva a equação matricial $A + X = B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

**Solução:**

Uma equação matricial é aquela em que a incógnita é uma matriz.

A matriz procurada é do tipo $2 \times 3$ e podemos representá-la por $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$.

Temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$\begin{bmatrix} 3 + a & 2 + b & 1 + c \\ -1 + d & -4 + e & 2 + f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Do conceito de igualdade, temos:

- $3 + a = 7 \Rightarrow a = 4$
- $-1 + d = 1 \Rightarrow d = 2$
- $2 + b = 5 \Rightarrow b = 3$
- $-4 + e = 6 \Rightarrow e = 10$
- $1 + c = 1 \Rightarrow c = 0$
- $2 + f = 7 \Rightarrow f = 5$

Logo, $X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$.

## Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo $(m \times n)$ e $0_{m \times n}$ a matriz nula, do tipo $m \times n$, valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

I. **Comutativa:** $A + B = B + A$

II. **Associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$

III. **Existência do elemento neutro:** existe **M** tal que $A + M = A$, qualquer que seja a matriz $A_{m \times n}$.

Observe que, nesse caso, **M** é a matriz nula do tipo $m \times n$.

IV. **Existência do oposto (ou simétrico):** existe **A'** tal que $A + A' = 0_{m \times n}$.

Para exemplificar, vejamos a demonstração das propriedades II e III.

- Para a propriedade II, dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, temos:

  $(A + B) + C = D = (d_{ij})_{m \times n}$ e $A + (B + C) = E = (e_{ij})_{m \times n}$

  Queremos mostrar que $D = E$.

  Para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, temos:

  $$d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$$

  Usando a propriedade associativa da adição de números reais, podemos escrever:

  $d_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = e_{ij}$ e, então, $D = E$, isto é, $(A + B) + C = A + (B + C)$

- Para a propriedade III, como $A + M = A$, então $a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \Rightarrow m_{ij} = 0$, para todo **i** e todo **j**. Assim $M = 0_{m \times n}$, ou seja, o elemento neutro da adição é a matriz nula.

## Matriz oposta

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Chama-se **oposta de A** a matriz representada por $-A$, tal que $A + (-A) = 0_{m \times n}$, sendo $0_{m \times n}$ a matriz nula do tipo $m \times n$.

Observe que a matriz $-A$ é obtida de **A** trocando-se o sinal de cada um de seus elementos:

- $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; então, $-A = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

- $B = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0,5 & 5 \end{bmatrix}$; então, $-B = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -0,5 & -5 \end{bmatrix}$.

**PENSE NISTO:**

Note que, se $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é a oposta de $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $b_{ij} = -a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Se **B** é oposta de **A**, $A + B = 0$ e daí concluímos que, para todo **i** e todo **j**, $a_{ij} + b_{ij} = 0$, isto é, $a_{ij} = -b_{ij}$, ou ainda, $b_{ij} = -a_{ij}$.

## Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes do mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se diferença entre **A** e **B** (representa-se por $A - B$) a matriz soma de **A** com a oposta de **B**, isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

Observe os exemplos a seguir:

- $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**3** Resolva a equação $X - A + B = C$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**Solução:**

*1º modo*:

A matriz **X** procurada é do tipo $3 \times 1$, e a representaremos por $X = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$.

Temos:

$$X - A + B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m-1 \\ n+1 \\ p-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m - 1 = 2 \Rightarrow m = 3 \\ n + 1 = -2 \Rightarrow n = -3 \\ p - 3 = 3 \Rightarrow p = 6 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

*2º modo*:

Recorrendo às propriedades da adição de matrizes, podemos "isolar" a matriz **X** procedendo da mesma forma se **X**, **A**, **B** e **C** fossem números reais. Obtemos:

$$X = C - B + A$$

Assim:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

**PENSE NISTO:**

Use propriedades da adição de matrizes para obter outra solução para o exercício resolvido 2.

$A + X = B \Rightarrow X = B - A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**23** Efetue:

**a)** $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

**c)** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

**d)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**24** Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{10 \times 12}$, em que $a_{ij} = 2i - j$, e $B = (b_{ij})_{10 \times 12}$, em que $b_{ij} = i + j$. Seja $C = A + B$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

**a)** Obtenha os valores dos elementos $\mathbf{c_{78}}$ e $\mathbf{c_{95}}$.

**b)** Obtenha a fórmula que fornece o valor de um elemento genérico $\mathbf{c_{ij}}$ em função de **i** e **j**.

**25** Resolva as seguintes equações matriciais:

**a)** $X + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

**b)** $X - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

**c)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

**26** As tabelas a seguir indicam o número de faltas de três alunos (**A**, **B** e **C**) em cinco disciplinas (Português, Matemática, Biologia, História e Física, representadas por suas iniciais), nos meses de março e abril.

**Março**

| | P | M | B | H | F |
|---|---|---|---|---|---|
| **Aluno A** | 2 | 1 | 0 | 4 | 2 |
| **Aluno B** | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| **Aluno C** | 5 | 4 | 2 | 2 | 2 |

**Abril**

| | P | M | B | H | F |
|---|---|---|---|---|---|
| **Aluno A** | 1 | 2 | 0 | 1 | 3 |
| **Aluno B** | 0 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| **Aluno C** | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 |

**a)** Qual é a matriz que representa o número de faltas desses alunos no primeiro bimestre em cada disciplina?

**b)** No primeiro bimestre, qual aluno teve o maior número de faltas em Português? E em Matemática? E em História?

**27** Uma matriz quadrada **A** é dita antissimétrica se $A = -A^t$.

**a)** A matriz $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ é antissimétrica? E a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

**b)** Existe algum valor real de **m** para o qual a matriz $\begin{bmatrix} 0 & m \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ é antissimétrica? Determine-o, se existir.

**28** Determine a matriz **X**, tal que $(X + A)^t = B$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

## Multiplicação de um número real por uma matriz

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e **k** um número real. O produto de **k** pela matriz **A** (indica-se: $k \cdot A$) é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, em que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Isso significa que **B** é obtida de **A** multiplicando-se por **k** cada um dos elementos de **A**.

Observe os exemplos a seguir:

- Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, então $3 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 21 \end{pmatrix}$.
- Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$, então $\frac{1}{2} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
- Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & 0 \end{pmatrix}$, então $(-2) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -2\sqrt{2} \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

### Propriedades

Sejam **k** e **ℓ** números reais e **A** e **B** matrizes do mesmo tipo. Valem as seguintes propriedades:

I. $k \cdot (\ell \cdot A) = (k \cdot \ell) \cdot A$

II. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

III. $(k + \ell) \cdot A = k \cdot A + \ell \cdot A$

IV. $1 \cdot A = A$

A título de exemplo, vamos provar a propriedade **II**. As demais são análogas.
Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e sendo $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$k \cdot (A + B) = C = (c_{ij})_{m \times n};\ k \cdot A = D = (d_{ij})_{m \times n} \text{ e } k \cdot B = E = (e_{ij})_{m \times n}$$

Vamos mostrar que $C = D + E$.

Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos que:

$$c_{ij} = k \cdot (a_{ij} + b_{ij})$$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, para números reais, obtemos:

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij} = d_{ij} + e_{ij}$$

Daí, podemos concluir que $C = D + E$, isto é: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

## EXERCÍCIOS

**29** Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, obtenha as matrizes:

**a)** $4 \cdot A$ **b)** $\frac{1}{3} \cdot A$ **c)** $-2 \cdot A$

**30** Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Determine as seguintes matrizes:

**a)** $3A + B$ **b)** $A - 3B$ **c)** $2 \cdot A^t + 3 \cdot B^t$

**31** Resolva a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 3 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

**32** Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz **X** que verifica a equação $2A + B = X + 2C$.

**33** Determine a matriz **X** que satisfaz a equação:

$$2 \cdot X^t + A = B,$$

sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

# Multiplicação de matrizes

A tabela abaixo representa as notas obtidas em um curso de espanhol pelos alunos **X**, **Y** e **Z**, em cada bimestre do ano letivo.

| | 1º bimestre | 2º bimestre | 3º bimestre | 4º bimestre |
|---|---|---|---|---|
| **Aluno X** | 7 | 8 | 6 | 8 |
| **Aluno Y** | 4 | 5 | 5 | 7 |
| **Aluno Z** | 8 | 7 | 9 | 10 |

Para calcular a nota final do ano, o professor deve fazer uma média ponderada usando como pesos, respectivamente, 1, 2, 3 e 4. Assim, a média de cada aluno será determinada pela fórmula:

$$\frac{(\text{nota}_{1^{\text{o}}\text{ bim.}} \cdot 1) + (\text{nota}_{2^{\text{o}}\text{ bim.}} \cdot 2) + (\text{nota}_{3^{\text{o}}\text{ bim.}} \cdot 3) + (\text{nota}_{4^{\text{o}}\text{ bim.}} \cdot 4)}{1 + 2 + 3 + 4}$$

que equivale a fazer:

$$(\text{nota}_{1^{\text{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}1) + (\text{nota}_{2^{\text{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}2) + (\text{nota}_{3^{\text{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}3) + (\text{nota}_{4^{\text{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}4)$$

Podemos representar a tabela das notas bimestrais pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Vamos representar os pesos dos bimestres (expressos na forma decimal, em relação à soma dos pesos) pela matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular as médias de cada aluno:

- aluno **X**: $(7 \cdot 0,1) + (8 \cdot 0,2) + (6 \cdot 0,3) + (8 \cdot 0,4) = 7,3$
- aluno **Y**: $(4 \cdot 0,1) + (5 \cdot 0,2) + (5 \cdot 0,3) + (7 \cdot 0,4) = 5,7$
- aluno **Z**: $(8 \cdot 0,1) + (7 \cdot 0,2) + (9 \cdot 0,3) + (10 \cdot 0,4) = 8,9$

Essas médias podem ser registradas em uma matriz **C**, que é o produto da matriz **A** (notas) pela matriz **B** (pesos):

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,3 \\ 5,7 \\ 8,9 \end{bmatrix}$$

A ideia utilizada para obter a matriz **C** será usada agora para definirmos matematicamente a multiplicação de matrizes.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se **produto de A por B**, e se indica por $A \cdot B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$, em que $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + a_{i4} \cdot b_{4k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$; para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Acompanhe o procedimento que devemos seguir para obter o elemento $\mathbf{c_{ik}}$ da matriz **C**:

1º) Tomamos ordenadamente os **n** elementos da linha **i** da matriz **A**: $\mathbf{a_{i1}}, \mathbf{a_{i2}}, \ldots, \mathbf{a_{in}}$. (1)

2º) Tomamos ordenadamente os **n** elementos da coluna **k** da matriz **B**: $\mathbf{b_{1k}}, \mathbf{b_{2k}}, \ldots, \mathbf{b_{nk}}$. (2)

3º) Multiplicamos o 1º elemento de (1) pelo 1º elemento de (2), o 2º elemento de (1) pelo 2º elemento de (2), e assim sucessivamente.

4º) Somamos os produtos obtidos.

Assim:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

**OBSERVAÇÕES**

- A definição garante a existência do produto $A \cdot B$ se o número de colunas de **A** é igual ao número de linhas de **B**.
- A matriz produto $C = A \cdot B$ é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de linhas de **A** e o número de colunas é igual ao número de colunas de **B**. Observemos o esquema abaixo:

$$A_{(m \times \mathbf{n})} \cdot B_{(\mathbf{n} \times p)} = C_{(m \times p)}$$

garante a existência do produto

**EXEMPLO 2**

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, vamos determinar, se existirem, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

- Como **A** é do tipo $2 \times 3$ e **B** é do tipo $3 \times 2$, segue que $C = A \cdot B$ existe e é do tipo $2 \times 2$.

  Escrevendo os elementos de **C** em sua forma genérica, temos $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$.

  Da definição, temos:

  - $\mathbf{c_{11}}$ (linha 1 de **A** e coluna 1 de **B**): $c_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 6$

    | 2 | 3 | 1 |
    |---|---|---|

    | 1 |
    |---|
    | 0 |
    | 4 |

  - $\mathbf{c_{12}}$ (linha 1 de **A** e coluna 2 de **B**): $c_{12} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 12$

    | 2 | 3 | 1 |
    |---|---|---|

    | −2 |
    |---|
    | 5 |
    | 1 |

  - $\mathbf{c_{21}}$ (linha 2 de **A** e coluna 1 de **B**): $c_{21} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 7$

    | −1 | 0 | 2 |
    |---|---|---|

    | 1 |
    |---|
    | 0 |
    | 4 |

  - $\mathbf{c_{22}}$ (linha 2 de **A** e coluna 2 de **B**): $c_{22} = (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 4$

    | −1 | 0 | 2 |
    |---|---|---|

    | −2 |
    |---|
    | 5 |
    | 1 |

Logo, $C = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

- Como **B** é do tipo $3 \times 2$ e **A** é do tipo $2 \times 3$, segue que $D = B \cdot A$ existe e é do tipo $3 \times 3$.

  Assim, $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$.

  Aplicando a definição, obtemos:

  - $\mathbf{d_{11}}$ (linha 1 de **B** e coluna 1 de **A**): $d_{11} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = 4$

    | 1 | −2 |
    |---|---|

    | 2 |
    |---|
    | −1 |

  - $\mathbf{d_{12}}$ (linha 1 de **B** e coluna 2 de **A**): $d_{12} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 3$

    | 1 | −2 |
    |---|---|

    | 3 |
    |---|
    | 0 |

  - $\mathbf{d_{13}}$ (linha 1 de **B** e coluna 3 de **A**): $d_{13} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -3$

    | 1 | −2 |
    |---|---|

    | 1 |
    |---|
    | 2 |

- $\mathbf{d_{21}}$ (linha 2 de **B** e coluna 1 de **A**): $d_{21} = 0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = -5$

| 0 | 5 |
|---|---|

| 2 |
|---|
| −1 |

- $\mathbf{d_{22}}$ (linha 2 de **B** e coluna 2 de **A**): $d_{22} = 0 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 0$

| 0 | 5 |
|---|---|

| 3 |
|---|
| 0 |

- $\mathbf{d_{23}}$ (linha 2 de **B** e coluna 3 de **A**): $d_{23} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 10$

| 0 | 5 |
|---|---|

| 1 |
|---|
| 2 |

- $\mathbf{d_{31}}$ (linha 3 de **B** e coluna 1 de **A**): $d_{31} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7$

| 4 | 1 |
|---|---|

| 2 |
|---|
| −1 |

- $\mathbf{d_{32}}$ (linha 3 de **B** e coluna 2 de **A**): $d_{32} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 12$

| 4 | 1 |
|---|---|

| 3 |
|---|
| 0 |

- $\mathbf{d_{33}}$ (linha 3 de **B** e coluna 3 de **A**): $d_{33} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6$

| 4 | 1 |
|---|---|

| 1 |
|---|
| 2 |

Logo, $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -5 & 0 & 10 \\ 7 & 12 & 6 \end{pmatrix}$.

Observe, neste exemplo, que $C = A \cdot B$ é uma matriz $2 \times 2$ e $D = B \cdot A$ é uma matriz $3 \times 3$.

**EXEMPLO 3**

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, vamos determinar, se existirem, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Como **A** é do tipo $2 \times 2$ e **B** também, concluímos que existem $A \cdot B$ e $B \cdot A$, pois:

$$A_{2 \times \underline{2}} \cdot B_{\underline{2} \times 2} \Rightarrow A \cdot B \text{ é do tipo } 2 \times 2$$

$$B_{2 \times \underline{2}} \cdot A_{\underline{2} \times 2} \Rightarrow B \cdot A \text{ é do tipo } 2 \times 2$$

**PENSE NISTO:**

É sempre possível multiplicar duas matrizes quadradas de mesma ordem? O que se pode afirmar em relação ao tipo da matriz produto?

Sim; qualquer que seja a ordem **n** dessas matrizes, temos:
$(n \times \underbrace{n)(n}_{\text{iguais}} \times n)$
A matriz produto também é quadrada de ordem **n**.

Temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

- $c_{11} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1$
- $c_{12} = (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 7$
- $c_{21} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 5$
- $c_{22} = 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 10$

Daí, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

- $d_{11} = 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 = -1$
- $d_{12} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 = -13$
- $d_{21} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -1$
- $d_{22} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 12$

Daí, $B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -13 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

Observe, neste exemplo, que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**4** Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 8}$, em que $b_{jk} = j + k$. Sendo $C = A \cdot B = (c_{ik})_{6 \times 8}$, qual é o valor do elemento $\mathbf{c_{35}}$?

**Solução:**

O elemento $\mathbf{c_{35}}$ da matriz produto **C** será obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha 3 de **A** e os da coluna 5 de **B** e, em seguida, somando os produtos obtidos.

Dessa forma, usamos a "regra de formação" dos elementos de **A** e **B** para determinar apenas as filas procuradas:

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}_{6 \times 3} ; B = \begin{pmatrix} \cdots & b_{15} & \cdots \\ \cdots & b_{25} & \cdots \\ \cdots & b_{35} & \cdots \end{pmatrix}_{3 \times 8} = \begin{pmatrix} \cdots & 6 & \cdots \\ \cdots & 7 & \cdots \\ \cdots & 8 & \cdots \end{pmatrix}$$

Assim, $c_{35} = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 8 = 19$.

**5** Resolva a equação matricial $A \cdot X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Solução:**

Precisamos, inicialmente, determinar o tipo da matriz **X**.

Temos:

$$\underset{(2 \times 2)}{\underset{\downarrow}{A}} \cdot \underset{(n \times p)}{\underset{\downarrow}{X}} = \underset{(2 \times 1)}{\underset{\downarrow}{B}}$$

Devemos ter:

- $n = 2$, para garantir a existência do produto;
- $p = 1$, pois o número de colunas de **X** é igual ao número de colunas de **B**.

Assim, $X = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$

Daí, $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Efetuando a multiplicação, obtemos:

$\begin{pmatrix} 5r + 7s \\ 2r + 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde resulta o sistema $\begin{cases} 5r + 7s = 4 \\ 2r + 3s = 1 \end{cases}$, cuja solução é $r = 5$ e $s = -3$.

Assim, $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

## EXERCÍCIOS

**34** Determine, se existirem, os produtos:

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

**c)** $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

**d)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

**e)** $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

**f)** $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

**g)** $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**h)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

**35** Sejam as matrizes:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Determine, se existir:

**a)** $A \cdot B$
**b)** $B \cdot A$
**c)** $A \cdot C$
**d)** $B^t \cdot C$
**e)** $B \cdot A^t$

# Matriz identidade

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**.

**A** é denominada **matriz identidade de ordem n** (indica-se por $\mathbf{I_n}$) se os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 1, e os demais elementos são iguais a zero. Assim:

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

$\vdots$

- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem **n**.

## Propriedades

Vamos observar, por meio de exemplos, algumas propriedades relativas à multiplicação de matrizes envolvendo a matriz identidade.

I. **A** é uma matriz quadrada de ordem **n**.

- Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

$A \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A$

$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A$

$B \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = B$

$I_3 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = B$

**PENSE NISTO:**

Seja $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Verifique que $B \cdot I_3 = B$ e $I_3 \cdot B = B$.

II. **A** não é uma matriz quadrada, isto é, $\mathbf{A}_{m \times n}$, com $m \neq n$:

- Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$. Temos:

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Note que $A \cdot I_2$ não existe.

$$A \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Note que $I_3 \cdot A$ não existe.

- Seja $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$.

$$I_3 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que $B \cdot I_3$ não existe.

$$B \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que $I_2 \cdot B$ não existe.

Em geral, pode-se dizer que:

- Se **A** é quadrada de ordem **n**, temos: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.
- Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, com $m \neq n$, temos: $I_m \cdot A = A$ e $A \cdot I_n = A$.

## Propriedades da multiplicação de matrizes

Supondo que as matrizes **A**, **B** e **C** sejam de tipos tais que as operações abaixo possam ser realizadas, valem as seguintes propriedades para a multiplicação de matrizes:

I. Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

II. Distributiva à direita em relação à adição: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

III. Distributiva à esquerda em relação à adição: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

Observe a validade das propriedades I e II nos exemplos a seguir.

- Propriedade I: Sejam $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 \\ -13 & 15 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 \\ -13 & 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 25 \end{pmatrix}$$

- Propriedade **II**: Sejam $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ 21 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 105 \end{pmatrix}; \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -84 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} -11 \\ 105 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -34 \\ -84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ 21 \end{pmatrix}$$, que coincide com (*).

Ao estudar as propriedades da multiplicação de matrizes, é importante observar que:

A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, em geral, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; vamos determinar $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

$$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\neq$$
$$B_{2 \times 2} \cdot A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Existem casos em que apenas uma das multiplicações pode ser feita. Por exemplo, se **A** é do tipo $2 \times 3$ e **B** é do tipo $3 \times 4$, então:

$\exists\ (A \cdot B)$ e é do tipo $2 \times 4$;

$\nexists\ (B \cdot A)$, pois o número de colunas de **B** é 4 e o número de linhas de **A** é 2.

Se $A \cdot B$ e $B \cdot A$ existem e $A \cdot B = B \cdot A$, dizemos que **A** e **B** comutam. Acompanhe o exemplo a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix}$$

Também é importante observar, ao estudar as propriedades da multiplicação de matrizes, que:

Não vale a propriedade do anulamento do produto na multiplicação de matrizes.

A conhecida propriedade $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$, válida para **a** e **b** reais, não é válida para matrizes. Isso significa que é possível que o produto entre duas matrizes seja a matriz nula sem que nenhuma das matrizes seja nula. Observe:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**PENSE NISTO:**

Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e verifique que $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

$(A + B) = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow C \cdot (A + B) = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55 & 48 \\ 67 & 33 \\ -6 & 24 \end{bmatrix}$

$C \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 0 \\ 4 & 39 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

$C \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & 48 \\ 63 & -6 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

$C \cdot A + C \cdot B = \begin{bmatrix} -19 & 0 \\ 4 & 39 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -36 & 48 \\ 63 & -6 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55 & 48 \\ 67 & 33 \\ -6 & 24 \end{bmatrix}$

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**6** Determine os valores reais de **x** e **y** de modo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ comutem.

**Solução:**

Devemos ter $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2x \\ -9 + 4y & -3x + 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3x & 4x \\ 2y - 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Daí:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2x \\ -9 + 4y & -3x + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3x & 4x \\ 2y - 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 - 3x & \Rightarrow x = 0 \\ 2x = 4x & \Rightarrow x = 0 \\ -9 + 4y = 2y - 3 & \Rightarrow y = 3 \\ -3x + 4 = 4 & \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 3$$

## EXERCÍCIOS

**36** Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Se $C = (c_{ij})_{3 \times 2}$ é a matriz produto $A \cdot B$, determine, se existirem, os elementos:

**a)** $c_{22}$ **b)** $c_{31}$ **c)** $c_{33}$

**37** Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 4}$, em que $b_{jk} = 2j - k$. Sendo $C = (c_{ik})_{6 \times 4}$ a matriz produto $A \cdot B$, determine o elemento $c_{43}$.

**38** Determine **x** e **y** reais, a fim de que: $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**39** Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**; definimos $A^2 = A \cdot A$. Assim, determine $A^2$ nos seguintes casos:

**a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

**40** Generalizando a definição dada no exercício anterior, temos:

Se $n \in \mathbb{N}^*$ e **A** é uma matriz quadrada, definimos $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\textbf{n} \text{ fatores}}$.

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine:

**a)** $A^2$ **b)** $A^3$ **c)** $A^4$ **d)** $A^{35}$ **e)** $A^{106}$

**41** Sabendo que $A = \begin{bmatrix} -4 & m \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $A^2 = \begin{bmatrix} 22 & -15 \\ -10 & m + 4 \end{bmatrix}$, determine o valor de **m**.

**42** A tabela abaixo mostra as notas obtidas pelos alunos **A**, **B** e **C** nas provas de Português, Matemática e conhecimentos gerais em um exame vestibular.

| | Português | Matemática | Conhecimentos gerais |
|---|---|---|---|
| **A** | 4 | 6 | 7 |
| **B** | 9 | 3 | 2 |
| **C** | 7 | 8 | 10 |

Se os pesos das provas são 7 (em Português), 6 (em Matemática) e 5 (em conhecimentos gerais), qual a multiplicação de matrizes que permite determinar a pontuação final de cada aluno? Determine a pontuação de cada um.

**43** Resolva a equação matricial $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

**44** Na festa junina organizada pelos alunos do Ensino Médio de um colégio, o sanduíche de "carne louca" e o *hot dog* (cachorro-quente) eram vendidos em três barracas I, II e III espalhadas pelo colégio. Na tabela seguinte está representada a quantidade de cada sanduíche vendida por barraca em certa noite; exceção feita a um campo cujo valor se perdeu.

| Barraca \ Sanduíche | *Hot dog* | "Carne louca" |
|---|---|---|
| I | 22 | 18 |
| II | 36 | 22 |
| III | ? | 28 |

Sabendo que os preços unitários do *hot dog* e da "carne louca" eram R$ 4,50 e R$ 6,00, respectivamente, e que a soma dos valores arrecadados nas três barracas foi R$ 777,00 naquela noite:

**a)** determine o valor desconhecido da tabela.

**b)** represente, por meio de uma multiplicação de matrizes, os valores arrecadados em cada uma das barracas.

**45** Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & x \\ y & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. Sabendo que $A \cdot B = 0_{4 \times 1}$, determine os valores de **x** e **y**.

**46** Determine **x** e **y** reais a fim de que as matrizes $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ comutem.

**47** Dê exemplos de matrizes quadradas de ordem 2 que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

**48** Um laboratório fabrica um antiácido efervescente em duas versões: tradicional (**T**) e especial (**E**). Na tabela seguinte, temos a composição de envelopes de 5 g, nas duas versões:

| Componente \ Versão | T | E |
|---|---|---|
| **Bicarbonato de sódio** | 2,3 g | 2,5 g |
| **Carbonato de sódio** | 0,5 g | 0,5 g |
| **Ácido cítrico** | 2,2 g | 2 g |

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

**a)** Em um certo mês foram fabricados 6000 envelopes na versão **T** e 4000 envelopes na versão **E**. Calcule, em quilogramas, a quantidade necessária de cada componente para a fabricação dessas 10000 unidades.

**b)** Represente, por meio de multiplicação de matrizes, os valores encontrados no item *a*.

**c)** Em um outro mês foram produzidos 15000 envelopes do antiácido. Calcule a quantidade produzida de cada versão, sabendo que o consumo total de bicarbonato de sódio foi de 35,6 kg.

**49** Resolva as seguintes equações matriciais:

**a)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix}$

**b)** $\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$

**50** Uma dona de casa registrou, na tabela seguinte, as quantidades (em gramas) de frutas compradas em duas semanas consecutivas, em um mesmo supermercado:

| Fruta / Quantidade (g) | Banana | Maçã | Laranja | Mamão |
|---|---|---|---|---|
| **1ª semana** | 2700 | 2430 | 3450 | 4155 |
| **2ª semana** | 1640 | 3120 | 3390 | 3700 |

Os preços do quilograma (kg) da banana, maçã, laranja e mamão, em vigor nesse período, eram respectivamente R$ 2,35, R$ 3,40, R$ 1,70 e R$ 2,60.

Determine, a partir do cálculo de um produto de matrizes, a quantia, em reais, gasta pela dona de casa, em cada semana.

**51** Na matriz **A**, a seguir, estão representadas as quantidades de cálcio e magnésio, em miligramas, encontradas em 100 g de algumas verduras:

Colunas: Couve-manteiga refogada; Couve-flor cozida; Espinafre cru; Acelga crua; Alface americana

$$A = \begin{bmatrix} 177 & 16 & 98 & 43 & 14 \\ 26 & 5 & 82 & 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Cálcio} \\ \leftarrow \text{Magnésio} \end{matrix}$$

Em um restaurante foram elaboradas três receitas (I, II, III) nas quais foram usadas porções de 100 g desses alimentos. Na matriz **B** a seguir estão representadas as quantidades de porções:

Colunas: Receita I; Receita II; Receita III

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Couve-manteiga} \\ \leftarrow \text{Couve-flor} \\ \leftarrow \text{Espinafre} \\ \leftarrow \text{Acelga} \\ \leftarrow \text{Alface americana} \end{matrix}$$

**a)** Determine a matriz $C = A \cdot B$.

**b)** Explique o significado do valor encontrado para o elemento $\mathbf{c}_{12}$ da matriz **C**.

**c)** Explique o significado do valor encontrado para o elemento $\mathbf{c}_{23}$ da matriz **C**.

Aplicações

# Computação gráfica e matrizes

As transformações geométricas no plano (ou transformações 2D — duas dimensões) são muito usadas pela computação gráfica para a construção de figuras e produção de imagens. Tais imagens podem ser percebidas nos efeitos especiais utilizados no cinema, na TV e nos sistemas multimídia em geral, além de servir de ferramenta de auxílio em várias áreas da atividade humana.

As três transformações básicas são: **translação**, **rotação** e **escala**. Vamos estudá-las, relacionando-as com a teoria das matrizes e com a Trigonometria.

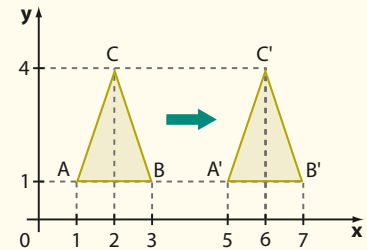
Representaremos um ponto qualquer P(x, y) de uma figura pela matriz coluna $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e o ponto correspondente P'(x', y'), obtido pela transformação, por $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Para cada transformação, vamos obter uma relação entre **P** e **P'** por meio de uma matriz (**M**) de transformação.

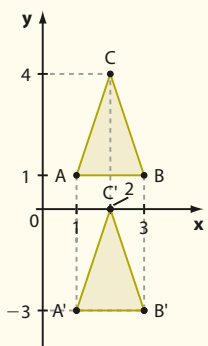
O filme *Guardiões da Galáxia* apresenta personagens criados por computação gráfica, como o Groot.

## Translação

A translação é uma transformação que desloca uma figura sem alterar sua forma e suas dimensões. Esse deslocamento pode ser vertical, horizontal ou segundo uma certa direção.

Consideremos o triângulo ABC ao lado, o qual é transformado no triângulo A'B'C' por uma translação horizontal.

Observe que, nessa transformação, a abscissa de cada ponto do △ABC é deslocada quatro unidades à direita, e a respectiva ordenada não sofre alteração.

Temos, portanto: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, isto é, P' = P + M, sendo $M = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ a matriz dessa transformação.

Suponha agora que o △ABC fosse deslocado, na vertical, quatro unidades para baixo, como mostra a figura seguinte:

Observe, no △A'B'C', obtido pela translação, que a ordenada de cada um de seus pontos é deslocada quatro unidades para baixo e a respectiva abscissa não sofre alteração.

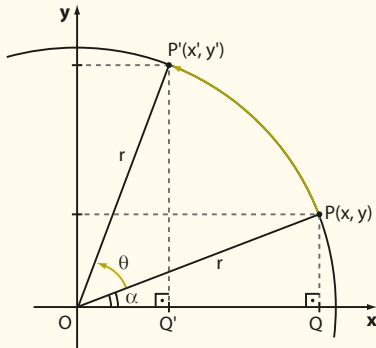
Assim, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e, desse modo, P' = P + M, sendo $M = -\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ a matriz dessa transformação.

**PENSE NISTO:**

Qual é a matriz que transforma o triângulo de vértices A(1, 1), B(3, 1) e C(2, 4) no triângulo de vértices A'(5, 6), B'(7, 6) e C'(6, 9)?

Se P(x, y) é um ponto do triângulo ABC e P'(x', y') é um ponto do triângulo A'B'C', temos $P' = P + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, ou seja, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

## Rotação

Vamos considerar unicamente a rotação (“giro”) de um ponto P(x, y), em torno da origem (0, 0), de um ângulo de medida **θ** graus (θ > 0), tomado no sentido anti-horário.

De acordo com o △OPQ, o ponto P(x, y) tem suas coordenadas expressas por:

$x = r \cdot \cos \alpha$ (1)

$y = r \cdot \text{sen } \alpha$ (2)

sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a medida do raio da circunferência de centro na origem, passando por **P** e **P'**.

Ao girarmos **P** de um ângulo de medida **θ** (graus), ele se transforma no ponto **P'**. Da Trigonometria, obtemos as fórmulas sen (a + b) = sen a · cos b + sen b · cos a e cos (a + b) = cos a · cos b − sen a · sen b, válidas para quaisquer **a** e **b** reais. De acordo com o △OP'Q', temos:

- $\cos(\alpha + \theta) = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot \cos(\alpha + \theta) = r \cdot (\cos \alpha \cos \theta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \theta)$ e, usando (1) e (2), escrevemos:

$$x' = r \cdot \left(\frac{x}{r} \cos \theta - \frac{y}{r} \text{sen } \theta\right) \Rightarrow \boxed{x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \text{sen } \theta}$$

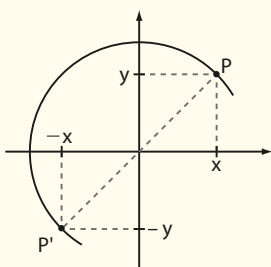
- $\text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot \text{sen}(\alpha + \theta) = r \cdot (\text{sen } \alpha \cos \theta + \text{sen } \theta \cos \alpha)$ e, usando (1) e (2), escrevemos:

$$y' = r \cdot \left(\frac{y}{r} \cos \theta + \text{sen } \theta \cdot \frac{x}{r}\right) \Rightarrow \boxed{y' = y \cdot \cos \theta + x \cdot \text{sen } \theta}$$

Assim, escrevemos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

isto é, P' = M · P, sendo $M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

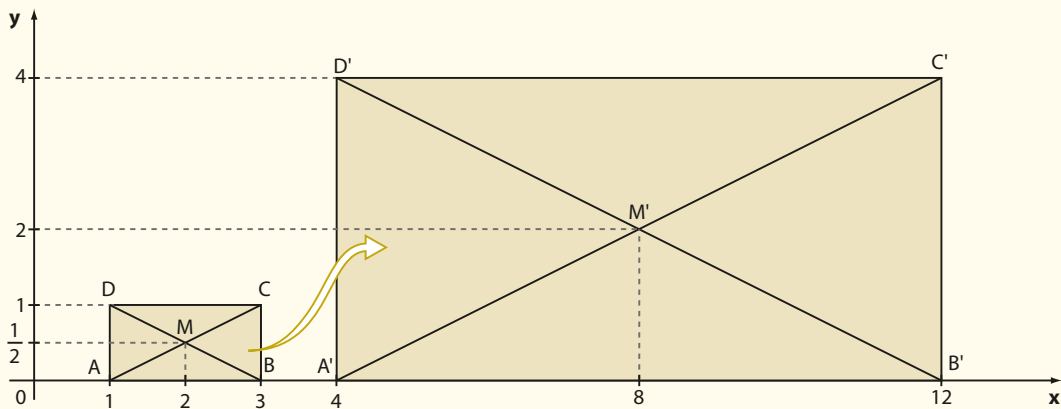
Observe a figura seguinte, em que o ponto P(x, y) é rotacionado em torno da origem, no sentido anti-horário, de 180°. Quais são suas novas coordenadas?

Como θ = 180°, temos:

$$M = \begin{bmatrix} \cos 180° & -\text{sen } 180° \\ \text{sen } 180° & \cos 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, $P' = M \cdot P \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x' = -x \text{ e } y' = -y$

## Escala

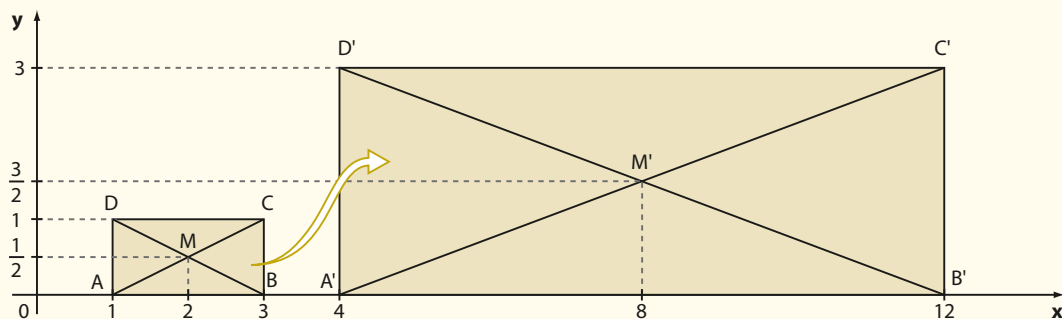
Nessa transformação, ocorre uma modificação no tamanho da figura (ampliação ou redução), originando outra figura, semelhante ou não à primeira.

Na figura seguinte, o retângulo ABCD é transformado no retângulo A'B'C'D'. Cada ponto (x, y) do retângulo ABCD é transformado no ponto (x', y') do retângulo A'B'C'D', com $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 4 \cdot y$; observe que os retângulos ABCD e A'B'C'D' são semelhantes.

Podemos escrever $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

As abscissas (e ordenadas) dos pontos **M** e **M'** são dadas pela média aritmética das abscissas (e ordenadas) das extremidades das diagonais. Professor, essa propriedade pode ser explorada do ponto de vista da Geometria Analítica (mesmo que esse conteúdo não seja visto neste volume). Observe que: A(1, 0) e C(3, 1) $\Rightarrow x_M = \frac{1+3}{2} = 2$ e $y_M = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ (obtemos a mesma abscissa e a mesma ordenada usando os pontos **B** e **D**) A'(4, 0) e C'(12, 4) $\Rightarrow x_{M'} = \frac{4+12}{2} = 8$ e $y_{M'} = \frac{0+4}{2} = 2$ (obtemos a mesma abscissa e a mesma ordenada usando os pontos **B'** e **D'**) Assim, as coordenadas do ponto médio de um segmento são dadas pela média aritmética das coordenadas dos extremos do segmento.

**PENSE NISTO:**

Em um retângulo, as diagonais intersectam-se em seus pontos médios. Veja os pontos **M** e **M'**. Qual é a relação entre suas abscissas (e ordenadas) e as abscissas (e ordenadas) das extremidades das diagonais?

Veja agora a transformação abaixo: cada ponto (x, y) do retângulo ABCD é transformado no ponto (x', y') do retângulo A'B'C'D', com $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 3 \cdot y$:

Observe, nesse caso, que os retângulos ABCD e A'B'C'D' **não** são semelhantes.

Temos: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

**Fonte de pesquisa:** BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia e WETZLER, Henry G. *Álgebra linear*. 3ª ed. São Paulo: Harbra, 1986.

## Matriz inversa

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**. A matriz **A** é dita inversível (ou invertível) se existe uma matriz **B** (quadrada de ordem **n**), tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Lembre que $\mathbf{I_n}$ representa a matriz identidade de ordem **n**.

Nesse caso, **B** é dita **inversa** de **A** e é indicada por $\mathbf{A^{-1}}$.

**EXEMPLO 4**

A inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

e

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Para verificar se uma matriz quadrada é ou não invertível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa, apresentaremos, a seguir, um processo baseado na definição de matriz inversa e na resolução de sistemas.

Vamos trabalhar com matrizes $2 \times 2$.

**EXEMPLO 5**

Vamos verificar se existe a inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Devemos verificar se existe $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que $A \cdot A^{-1} = I_2$.

Temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ 5a + 4c & 5b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do conceito de igualdade de matrizes seguem os sistemas:

$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ 5a + 4c = 0 \end{cases}$, cuja solução é $a = 2$ e $c = -\dfrac{5}{2}$

$\begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ 5b + 4d = 1 \end{cases}$, cuja solução é $b = -1$ e $d = \dfrac{3}{2}$

Assim, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\dfrac{5}{2} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

É fácil verificar que a outra condição, $A^{-1} \cdot A = I_2$, está satisfeita.

**EXEMPLO 6**

Vamos verificar se existe a inversa de $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Devemos verificar se existe $X^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $X \cdot X^{-1} = I_2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a + 2c & 4b + 2d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (1) \begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \text{ e } (2) \begin{cases} 4b + 2d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema (1):

$$\begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 2a + c = 0 \; (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{4a} + \cancel{2c} = 1 \\ -\cancel{4a} - \cancel{2c} = 0 \end{cases} (+)$$
$$0 = 1 \text{ (Falso)}$$

O sistema acima não admite soluções, pois não existem **a** e **c** reais tais que $0 \cdot a + 0 \cdot c = 1$. Desse modo, já podemos concluir que não existe a inversa de **X** (o sistema (2) também não admite solução. Verifique.).

• Para que a matriz nula $0_{2 \times 2}$ seja inversível, devemos ter **a**, **b**, **c** e **d** tais que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora, é fácil ver que, em qualquer posição da matriz produto, só aparecerão elementos nulos e a igualdade nunca será satisfeita. Logo, a matriz nula $0_{2 \times 2}$ não é inversível.

• $\mathbf{I_2}$ é inversível:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde obtemos: a = 1, b = 0, c = 0 e d = 1.
Assim, a inversa de $\mathbf{I_2}$ é a própria matriz $\mathbf{I_2}$.

**PENSE NISTO:**

A matriz nula $0_{2 \times 2}$ é inversível? A matriz identidade $\mathbf{I_2}$ é inversível?

**OBSERVAÇÃO**

O processo apresentado nos exemplos anteriores pode ser aplicado a matrizes quadradas de ordem **n**, $n \geqslant 2$. Vale lembrar, no entanto, que, para $n \geqslant 3$, o processo é, em geral, trabalhoso.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**7** Resolva a equação matricial $A \cdot X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Solução:**

*1º modo*:

Para garantir a existência do produto $A \cdot X$, **X** deve ser uma matriz $2 \times 1$, a saber $X = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$. Veja a continuação no exercício resolvido 5, na página 84.

*2º modo*:

Supondo que **A** seja invertível, de $A \cdot X = B$, temos:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$ (multiplicamos, à esquerda, por $A^{-1}$)

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$ (usamos a propriedade associativa da multiplicação)

$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ (usamos a definição de matriz inversa)

$X = A^{-1} \cdot B$ (*) (usamos a propriedade da matriz identidade)

Assim, verifiquemos se **A** é invertível:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a + 7c & 5b + 7d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poderíamos, mas não seria possível "isolar" a matriz X:
$A \cdot X = B \Rightarrow (A \cdot X) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow A \cdot (X \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}$
mas não podemos, neste ponto, dentro dos parênteses, trocar a ordem das duas matrizes, pois, em geral, não vale a comutativa da multiplicação de matrizes.

**PENSE NISTO:**

Na primeira passagem, poderíamos ter multiplicado, à direita, os dois membros por $A^{-1}$?

Seguem os sistemas:

$\begin{cases} 5a + 7c = 1 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } c = -2$ e $\begin{cases} 5b + 7d = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -7 \text{ e } d = 5$

Assim, concluímos que **A** é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Logo, substituindo $A^{-1}$ e **B** em $*$, temos: $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

## EXERCÍCIOS

**52** Verifique se $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ é a inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**53** Determine, se existir, a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**54** Determine, se existir, a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

**55** Para que valor(es) real(is) de **x** a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ é a própria matriz **A**?

**56** Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Determine:

**a)** $A^{-1} + B$ **b)** $A^{-1} \cdot B$ **c)** $B^{-1} \cdot A$

**57** Determine **x** e **y** reais sabendo que a inversa de $\begin{pmatrix} y & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} x & x - 4 \\ x - 5 & 1 \end{pmatrix}$.

**58** Sendo $A = \begin{pmatrix} x & -x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, com $x \in \mathbb{R}$, determine os valores de **x** para os quais $A + A^{-1} = I_2$, sendo $\mathbf{I_2}$ a matriz identidade de ordem 2.

**59** Sejam $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

**a)** Determine $A^{-1}$.

**b)** Usando o resultado do item *a*, resolva a equação $A \cdot X = B$.

**60** Determine a inversa da matriz $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**61** Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine a matriz **X** (quadrada de ordem 2) tal que $(X \cdot B)^{-1} = A$.

## DESAFIO

Uma matriz quadrada **A** se diz **ortogonal** se **A** é inversível e $A^{-1} = A^t$.

**a)** Determine os números reais **x**, **y** e **z** de modo que a matriz **B** seja ortogonal.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

**b)** Mostre que não existem **x** e **y** reais de modo que a matriz **C** seja ortogonal.

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

# Sistemas lineares

## Equação linear

Augusto foi sacar R$ 90,00 em um caixa eletrônico que só dispunha de cédulas de R$ 10,00 e de R$ 20,00. Como pode ser feita a distribuição das cédulas a fim de totalizar R$ 90,00?

Vamos representar por:

- **x** o número de cédulas de R$ 10,00;
- **y** o número de cédulas de R$ 20,00.

Devemos determinar quais são os possíveis valores de **x** e de **y** de modo que:

$$10 \cdot x + 20 \cdot y = 90$$

JUCA MARTINS/OLHAR IMAGEM

Caixa eletrônico de banco em São Paulo.

A equação obtida acima é um exemplo de **equação linear**.

> Equação linear nas incógnitas $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ é toda equação do tipo:
>
> $$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$
>
> em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e **b** são coeficientes reais.

Chamamos **b** de **coeficiente** (ou **termo**) **independente** da equação.

Acompanhe alguns exemplos de equações lineares:

- $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -7$
- $4x - 3y = -2$
- $x + y + z = 1$
- $4x - 2y + 3z - t = 0$
- $\sqrt{3} \cdot x - 2y + z = -\frac{1}{5}$
- $\frac{1}{2} \cdot x_1 = -3$

Observe que uma equação linear é uma equação do primeiro grau com uma ou mais incógnitas.

**OBSERVAÇÕES**

- Note que, numa equação linear, os expoentes de todas as incógnitas são sempre iguais a 1. Dessa forma, não representam equações lineares:

  $2x_1^2 - x_2 = 5 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad x^3 - y^2 = 0$

- Uma equação linear não apresenta termo misto (aquele que contém o produto de duas ou mais incógnitas). Dessa forma, não representam equações lineares:

  $2x_1 + x_2x_3 = 5 \qquad x + y + zw = 0 \qquad x^2 + yz = -4$

## Solução de uma equação linear

Dizemos que a sequência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ se a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira, isto é, quando, na equação dada, substituímos $\mathbf{x_1}$ por $\alpha_1$, $\mathbf{x_2}$ por $\alpha_2$, ..., $\mathbf{x_n}$ por $\alpha_n$ e, após efetuarmos as operações indicadas, obtemos uma sentença verdadeira.

Vejamos alguns casos:

- O par ordenado $(2, -3)$ é solução da equação $4x - 5y = 23$, pois, substituindo **x** por 2 e **y** por $-3$, obtemos:

$$4 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23 \Rightarrow \underbrace{23 = 23}_{\text{sentença verdadeira}}$$

- Considere a situação do saque no caixa eletrônico, apresentada na introdução deste capítulo.

Vamos apresentar as soluções da equação $10x + 20y = 90$, lembrando que **x** e **y** devem ser números naturais.

Temos as seguintes possibilidades:

| x<br>(Número de cédulas de R$ 10,00) | y<br>(Número de cédulas de R$ 20,00) |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 3 | 3 |
| 5 | 2 |
| 7 | 1 |
| 9 | 0 |

Assim, os pares ordenados (1, 4), (3, 3), (5, 2), (7, 1), (9, 0) são soluções da equação.

- A terna ou tripla ordenada $(-1, -1, 2)$ é solução da equação $2a - 3b + c = 3$, pois $2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) + 2 = -2 + 3 + 2 = 3$.

Já a tripla (5, 4, 1) não é solução dessa equação, pois $2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 1 = 10 - 12 + 1 = -1 \neq 3$.

Observe que, ao representarmos a solução de uma equação linear, obedecemos à ordem alfabética de suas incógnitas. Na equação acima, quando dizemos que $(-1, -1, 2)$ é uma solução, subentende-se que $a = -1$, $b = -1$ e $c = 2$.

Sim, basta observar que: $10x + 20y = 90 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 10 \cdot (x + 2y) = 90 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + 2y = 9$
Vale a pena comentar com os estudantes que, em uma equação linear, podemos multiplicar ou dividir seus membros por um número real não nulo de modo a obter equações equivalentes, isto é, com mesmas soluções.

**PENSE NISTO:**

As soluções da equação linear $10x + 20y = 90$ são as mesmas soluções da equação $x + 2y = 9$?

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**1** Obtenha três soluções da equação linear $x - 3y = -2$, em que **x** e **y** são números reais.

**Solução:**

Podemos escolher, arbitrariamente, um valor para uma das incógnitas (por exemplo, **x**) e, a partir daí, determinar o valor da outra incógnita:

$$x = 1 \Rightarrow 1 - 3y = -2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1, 1) \text{ é solução.}$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 - 3y = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(0, \frac{2}{3}\right) \text{ é solução.}$$

$$x = 7 \Rightarrow 7 - 3y = -2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (7, 3) \text{ é solução.}$$

Como podemos escolher qualquer valor real para **x** e calcular o valor de **y** correspondente obtendo a solução (x, y), concluímos que essa equação possui infinitas soluções.

**PENSE NISTO:**

Dê um exemplo de uma equação linear que não possui solução em $\mathbb{R}$.

$0 \cdot x + 0 \cdot y = 2$;
$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -3$ etc.

## EXERCÍCIOS

**1** Quais das equações seguintes podem ser classificadas como lineares?

**a)** $a - b + 2c = 3$

**b)** $x + \frac{1}{y} = 4$

**c)** $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_5$

**d)** $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

**e)** $ab + ac + bc = -2$

**f)** $x - y = 2$

**g)** $\sqrt{x} + y + 2z = 4$

**h)** $-m - n = p + 2$

**2** Verifique se os pares ordenados abaixo são soluções da equação linear $2x - y = 7$.

**a)** $(2, -3)$ **b)** $(2, 7)$ **c)** $(5, 3)$

**3** Verifique se as triplas ordenadas abaixo são soluções da equação $x + 2y + 4z = 1$.

**a)** $(-1, 3, -1)$

**b)** $(0, -4, -1)$

**c)** $(1, 1, 1)$

**d)** $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$

**4** A equação linear $3x - 2y + z = 1$ admite como solução $(1, -3, m)$. Qual é o valor de **m**?

**5** Para um jantar beneficente foram vendidos convites a R$ 80,00 ou R$ 120,00 por pessoa. A arrecadação obtida com a venda dos convites foi R$ 25 200,00.

**a)** Escreva uma equação linear relacionando as incógnitas **x** (número de convites de R$ 80,00 vendidos) e **y** (número de convites de R$ 120,00 vendidos) com a arrecadação obtida com a venda dos convites.

**b)** É possível que o número de convites vendidos por R$ 80,00 tenha sido 45? E 65?

**c)** É possível que o número de convites vendidos por R$ 120,00 tenha sido o triplo do número de convites vendidos por R$ 80,00? E a metade?

**6** Determine **m** real, de modo que o par $(m, 2m + 1)$ seja solução da equação $3x - 11y = 4$.

**7** Determine duas soluções de cada uma das equações seguintes:

**a)** $4x_1 + 3x_2 = -5$

**b)** $x + y - z = 0$

**c)** $x + y = 2$

**d)** $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 16$

**8** Cíntia tem de pagar uma compra de R$ 35,00 e só dispõe de moedas de R$ 1,00 e de notas de R$ 5,00. De quantos modos distintos poderá fazer o pagamento?

**9** Considerando o problema anterior, determine o número de maneiras distintas de se fazer o pagamento, supondo que Cíntia disponha apenas de:

**a)** moedas de R$ 1,00 e notas de R$ 2,00;

**b)** notas de R$ 2,00, notas de R$ 5,00 e notas de R$ 10,00.

**10** Uma equação linear com duas incógnitas apresenta os pares ordenados $(1, 1)$ e $(-2, -3)$ como algumas de suas soluções.

**a)** Escreva uma equação linear que satisfaça tais condições.

**b)** Obtenha mais três soluções dessa equação.

## Sistemas lineares 2 × 2

Tina passeava pelo calçadão da praia quando avistou um quiosque que vendia sanduíches e água de coco. Em um cartaz havia as seguintes sugestões de pedidos:

GRAPHORAMA

Tina ficou interessada em saber o preço unitário do sanduíche e da água de coco. Estudante aplicada, representou por **x** e **y** os preços unitários da água de coco e do sanduíche, respectivamente, obtendo as seguintes equações:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$$

O conjunto dessas duas equações lineares é exemplo de um **sistema linear** de duas equações e duas incógnitas.

Um **sistema linear 2 × 2**, nas incógnitas **x** e **y**, é um conjunto de duas equações lineares em que **x** e **y** são as incógnitas de cada uma dessas equações.

Retomando o problema de Tina, para resolvê-lo, ela utilizará o método da adição, já estudado no Ensino Fundamental. Esse método consiste em adicionar, convenientemente, as duas equações, a fim de que se obtenha uma equação com apenas uma incógnita.

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$$

Se multiplicarmos a segunda equação por −2 e a adicionarmos à primeira, eliminaremos a incógnita **y**, de modo que a equação obtida somente apresentará a incógnita **x**.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ -4x - 2y = -34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + \cancel{2y} = 30 \\ -4x - \cancel{2y} = -34 \end{cases} \oplus$$

$$-x = -4 \Rightarrow x = 4$$

Logo, a água de coco custa 4 reais.

Substituímos esse valor em qualquer uma das equações anteriores:

$$3x + 2y = 30 \Rightarrow 3 \cdot 4 + 2y = 30 \Rightarrow 2y = 18 \Rightarrow y = 9$$

Logo, o sanduíche custa 9 reais.

Observe que $x = 4$ e $y = 9$ satisfazem simultaneamente as duas equações:

$$\begin{cases} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 = 12 + 18 = 30 \\ 2 \cdot 4 + 9 = 8 + 9 = 17 \end{cases}$$

Assim, dizemos que o conjunto solução do sistema é: $S = \{(4, 9)\}$.

Observe que esse método utiliza duas propriedades conhecidas de uma igualdade que envolve números reais:

- Multiplicando os dois membros de uma igualdade por um número real não nulo, a igualdade é mantida.

$$x = y \text{ e } z \in \mathbb{R}^* \Rightarrow x \cdot z = y \cdot z$$

- Adicionando-se (ou subtraindo-se), membro a membro, duas igualdades, obtemos uma nova igualdade.

$$x = y \text{ e } z = w \Rightarrow x + z = y + w$$

Professor, caso considere pertinente, é possível relembrar os métodos de comparação e de substituição na resolução de sistemas 2 × 2.
Vamos lembrar os dois métodos resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$$

Comparação:
$2y = 30 - 3x$ $\quad$ $2x + y = 17$
$y = \dfrac{30 - 3x}{2}$ $\quad$ $y = 17 - 2x$

Daí: $\dfrac{30 - 3x}{2} = 17 - 2x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 4$ e $y = 9$

Substituição:
De $y = 17 - 2x$, temos:
$3x + 2 \cdot (17 - 2x) = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x + 34 = 30 \Rightarrow x = 4$ e $y = 9$

**PENSE NISTO:**

Você se lembra dos outros dois processos de resolução de sistemas 2 × 2 — substituição e comparação? Resolva o sistema por meio de um desses processos.

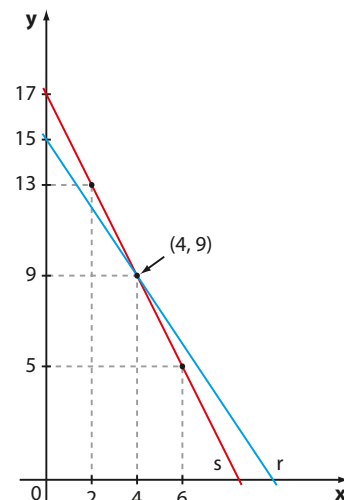
## Interpretação geométrica e classificação

Além do processo algébrico, um sistema linear $2 \times 2$ pode ser resolvido graficamente. Acompanhe as situações a seguir.

**I.** Voltemos ao exemplo de Tina.

A equação linear $3x + 2y = 30$ é equivalente a $y = \frac{30 - 3x}{2}$, isto é, $y = 15 - \frac{3}{2}x$, que é a lei de uma função afim cujo gráfico é a reta **r** representada ao lado. Já a equação linear $2x + y = 17$ equivale a $y = -2x + 17$, que é a lei de uma função afim cujo gráfico é a reta **s**.

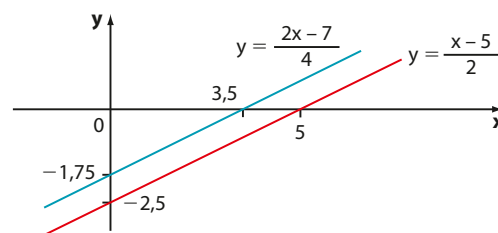
As retas **r** e **s** intersectam-se unicamente no ponto P(4, 9), isto é, o par ordenado (4, 9) é a única solução do sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$, pois verifica, simultaneamente, as duas equações.

Nesse caso, dizemos que o **sistema é possível e determinado** (**S.P.D.**).

**II.** Seja o sistema $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases}$

Resolvendo-o pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \cdot (-2) \\ 2x - 4y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -10 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases} \oplus$$
$$0 \cdot x + 0 \cdot y = -3$$

Observe que, quaisquer que sejam os valores de **x** e **y**, a equação obtida nunca é satisfeita, pois seu primeiro membro sempre resultará nulo e $0 \neq -3$. Assim, o sistema não admite solução.

Graficamente, as funções afim dadas pelas leis $y = \frac{x - 5}{2}$ e $y = \frac{2x - 7}{4}$ têm por gráficos retas paralelas distintas, como mostrado ao lado.

Como as retas são paralelas distintas, não há ponto de interseção. Assim, o sistema não admite solução.

Nesse caso, dizemos que o **sistema é impossível** e indicamos por **S.I.** Seu conjunto solução é $S = \varnothing$.

**III.** Ao resolvermos algebricamente o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$, usando o método da adição, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 1 \cdot (-2) \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \oplus$$
$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \text{ (ou } 0 = 0)$$

Observe a 2ª equação: $2x + 2y = 2$. Dividindo seus dois membros por 2, obtemos $x + y = 1$, ou seja, a 1ª equação. Desse modo, o sistema proposto se reduz à equação $x + y = 1$, que possui infinitas soluções, por exemplo:

$(0, 1)$; $(2, -1)$; $(1, 0)$; $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$; $(-5, 6)$ etc.

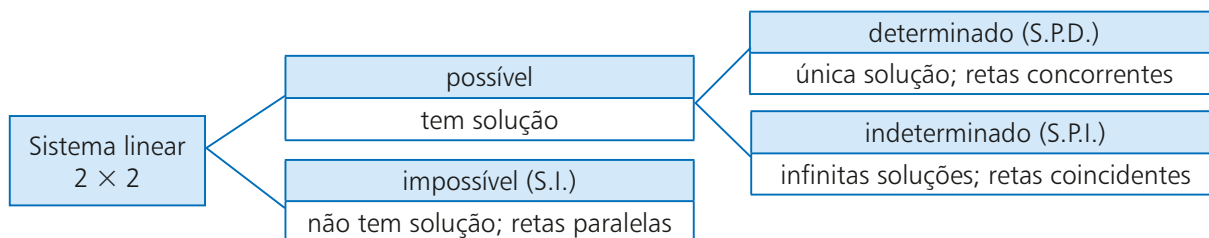
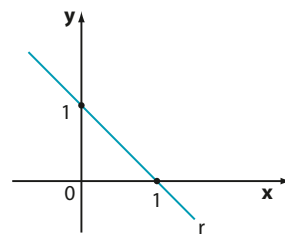
Expressando-se **y** em função de **x**, obtemos $y = 1 - x$ e, deste modo, todo par ordenado da forma $(x, 1 - x)$, em que $x \in \mathbb{R}$, é solução do sistema e escrevemos: $S = \{(x, 1 - x); x \in \mathbb{R}\}$ (1)

Nesse caso, dizemos que o **sistema é possível e indeterminado (S.P.I.)**.

Poderíamos também expressar **x** em função de **y**. De $x + y = 1$ obtemos: $x = 1 - y$ e, deste modo, o conjunto solução do sistema seria $S = \{(1 - y, y); y \in \mathbb{R}\}$ (2). Não é difícil verificar que (1) e (2) são formas equivalentes de expressar a solução do sistema.

Geometricamente, as funções do 1º grau dadas por $y = -x + 1$ e $y = \frac{-2x + 2}{2} = \frac{2 \cdot (-x + 1)}{2} = -x + 1$ têm por gráficos retas coincidentes e, portanto, possuem como interseção todos os pontos de **r**. Como **r** tem infinitos pontos, o sistema admite infinitas soluções.

Desse modo, um sistema linear $2 \times 2$ pode ser classificado de acordo com o número de soluções que possui. Veja:

- Sistema linear $2 \times 2$
  - possível — tem solução
    - determinado (S.P.D.) — única solução; retas concorrentes
    - indeterminado (S.P.I.) — infinitas soluções; retas coincidentes
  - impossível (S.I.) — não tem solução; retas paralelas

## EXERCÍCIOS

**11** Resolva os seguintes sistemas, algébrica e graficamente, e classifique cada um deles.

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases}$

**12** Para uma festa infantil foram compradas 72 unidades de refrigerante, algumas de 2 L e outras de 1,5 L, num total de 129 L. Determine a quantidade de refrigerantes de 1,5 L comprada.

**13** Em uma padaria, dois cafés e cinco minipães de queijo custam R$ 14,20; três cafés e sete minipães de queijo custam R$ 20,60.
Quanto custarão quatro cafés e dez minipães de queijo?

**14** Luísa e Maíra foram fazer compras, cada qual com certa quantia. Se Maíra desse R$ 40,00 a Luísa, elas ficariam com a mesma quantia; se Luísa tivesse R$ 30,00 a menos, teria a metade do que Maíra possui. Quantos reais elas possuem juntas?

**15** Em uma prova com 20 testes, cada resposta correta vale 5 pontos e cada resposta errada acarreta uma perda de 2 pontos. Em cada teste há apenas uma alternativa correta.

**a)** Maurício acertou 13 dos 20 testes. Qual foi sua pontuação final?

**b)** Amanda obteve pontuação final de 23 pontos. Quantas questões ela errou?

**c)** É possível que se termine a prova com 17 pontos?

**16** Ao resolver graficamente o sistema $\begin{cases} x + y = m \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$, em que **m** é um número real, obtêm-se duas retas paralelas distintas. Quais são os possíveis valores de **m**?

**17** Duas retas **r** e **s** correspondem, respectivamente, às funções afim definidas por: $y = x + 2$ e $y = -2x + m$, em que $m \in \mathbb{R}$. Se **r** e **s** intersectam-se no ponto (3, 5), qual é o valor de **m**?

**18** Determine **m** e **n** reais para os quais a solução gráfica do sistema linear $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ mx + ny = -6 \end{cases}$ é formada por infinitos pontos.

# Sistema linear m × n

Um conjunto de **m** equações lineares e **n** incógnitas $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}$ é chamado **sistema linear m × n**.

- $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ é um sistema linear com três equações e três incógnitas.

- $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - y - z + 2w = 7 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e quatro incógnitas.

- $\begin{cases} a + b = 3 \\ b - c = 0 \\ c + d = 5 \\ a - d = -1 \end{cases}$ é um sistema linear com quatro equações e quatro incógnitas.

Os sistemas lineares 2 × 2, estudados na seção anterior, são um caso particular de um sistema linear m × n, em que m = n = 2.

## UM POUCO DE **HISTÓRIA**

### Os sistemas lineares

O estudo dos sistemas lineares desenvolveu-se, historicamente, com maior intensidade nas civilizações orientais. Um dos capítulos do livro chinês *Nove capítulos sobre a arte matemática* (aproximadamente século III a.C.) contém um tópico sobre equações indeterminadas e a solução de um problema envolvendo um sistema linear com quatro equações e cinco incógnitas. Os coeficientes do sistema eram escritos com barras de bambu sobre um tabuleiro, que desempenhava o papel hoje ocupado pelas matrizes.

Credita-se aos chineses a descoberta de um processo de resolução de sistemas equivalente ao atual método do escalonamento, que estudaremos neste capítulo.

**Fonte de pesquisa:** BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

# Solução de um sistema

Dizemos que a sequência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é **solução de um sistema linear** de **n** incógnitas se é solução de cada uma das equações do sistema.

Observe:

- O par ordenado (4, 1) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ -6x + 10y = -14 \end{cases}$, pois,

  substituindo **x** por 4 e **y** por 1 em cada equação do sistema, obtemos sentenças verdadeiras: $4 + 1 = 5$; $4 - 1 = 3$; $-6 \cdot 4 + 10 \cdot 1 = -14$.

- A tripla ordenada (5, 3, 2) é solução do sistema $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y + z = 4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$, pois,

  fazendo $x = 5$, $y = 3$ e $z = 2$, obtemos sentenças verdadeiras:
  $5 + 3 + 2 = 10$; $5 - 3 + 2 = 4$; $5 - 3 - 2 = 0$.

## Matrizes associadas a um sistema

Podemos associar a um sistema linear duas matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

Observe os sistemas lineares a seguir:

- Ao sistema $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$ podemos associar as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, chamada **matriz incompleta** formada pelos coeficientes das incógnitas, e a matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, chamada **matriz completa**.

- Ao sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 3 \\ 2x - y - z = -4 \end{cases}$ podemos associar as matrizes **A** e **B**, incompleta e completa, respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

- Ao sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 5y + z = 1 \\ -2y + z = 3 \\ z = -2 \end{cases}$ podemos associar as matrizes **A** e **B**, incompleta e completa, respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Note que **B** é obtido de **A** acrescentando-se a coluna relativa aos coeficientes independentes de cada uma das equações do sistema.

## Representação matricial de um sistema

Lembrando o processo de multiplicação de matrizes e utilizando a matriz incompleta de um sistema, é possível representá-lo na forma matricial. Vejamos alguns casos:

- O sistema $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$ pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- O sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ pode ser representado pela equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- A equação matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ é outra forma de representar o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - y - z + 2w = 7 \end{cases}$$

## EXERCÍCIOS

**19** Com relação ao sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$:

**a)** Verifique se os pares ordenados (3, −2) e $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ são soluções dele.

**b)** Represente-o na forma de uma equação matricial.

**20** Dado o sistema linear, indique quais triplas ordenadas são soluções:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 4 \\ -x + y + 2z = -5 \end{cases}$$

**a)** (2, 1, 3) **b)** $\left(2, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ **c)** (−1, 1, 0)

**21** Construa a matriz incompleta **A** e a completa **B** de cada um dos sistemas:

**a)** $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 8 \\ y + z = 9 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 4x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x - z = -5 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ x - y = -7 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} 2x + y + 3z = -13 \\ -x + y + 10z = 4 \end{cases}$

**22** Escreva, em cada caso, o sistema associado à representação matricial dada:

**a)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

**b)** $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$

**c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$

**23** Em cada caso, determine o valor real de **m**:

**a)** A tripla ordenada (2, −1, 3) é solução do sistema

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ -x + 2z = 4 \\ 2x + my - z = 0 \end{cases}$$

**b)** O par ordenado (5, m) é solução do sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ -4x + 5y = -5 \end{cases}$$

**c)** A tripla ordenada (m, 0, −2) é solução do sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 3x + 2z = 5 \end{cases}$$

**24** Dado o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$:

**a)** Represente-o na forma de uma equação matricial.

**b)** Verifique que (−5, 4, 2) é uma solução desse sistema, mas (1, 1, 1) não é.

**c)** Verifique que toda terna ordenada (−15 + 5z, 10 − 3z, z), em que $z \in \mathbb{R}$, é solução desse sistema.

**d)** Se (p, 16, −2) é solução desse sistema, determine o valor de **p**.

## Sistemas escalonados

Observe os sistemas lineares seguintes:

- $\begin{cases} 4x - y + 2z = 5 \\ 0x + y - 3z = 7 \\ 0x + 0y + z = -2 \end{cases}$ ou, simplesmente, $\begin{cases} 4x - y + 2z = 5 \\ y - 3z = 7 \\ z = -2 \end{cases}$

- $\begin{cases} 3x - y + 2z = -4 \\ 3y - z = 7 \end{cases}$

- $\begin{cases} 4a + b - c + d = 0 \\ -2b + c + 3d = 1 \\ -2c + d = 3 \\ -5d = 1 \end{cases}$

- $\begin{cases} 2x - y + z - 4w = 3 \\ y + 3w = 2 \end{cases}$

Todos eles apresentam as seguintes características comuns:

- Em cada equação existe pelo menos um coeficiente (de alguma incógnita) não nulo.
- Considerando a ordem "de cima para baixo", o número de coeficientes nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Os sistemas que apresentam tais características são chamados **sistemas escalonados**.

## Resolução de um sistema na forma escalonada

Vamos estudar a seguir dois tipos de sistemas escalonados.

### 1º tipo: Sistema com número de equações igual ao número de incógnitas

Seja o sistema escalonado: $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ y + 2z = -3 \\ 3z = -6 \end{cases}$

Partindo da última equação, obtemos **z**. Substituindo o valor obtido para **z** na segunda equação, obtemos **y**. Por fim, substituindo **y** e **z** na 1ª equação, obtemos **x**.

Acompanhe:

$3z = -6 \Rightarrow z = -2$ (1)

$y + 2 \cdot (-2) = -3 \Rightarrow y - 4 = -3 \Rightarrow y = 1$ (2)

$x - 2 \cdot 1 + (-2) = -5 \Rightarrow x - 4 = -5 \Rightarrow x = -1$ (3)

Assim, a solução do sistema é $(-1, 1, -2)$.

Se um sistema escalonado apresenta número de equações igual ao número de incógnitas, ele é possível e determinado, isto é, ele tem uma única solução.

### 2º tipo: Sistema com número de equações menor que o número de incógnitas

Considere o seguinte problema:

Encontre três números reais cuja soma seja 100, sendo um deles o dobro do outro.

Chamando de **x**, **y** e **z** os números procurados, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ y = 2z \end{cases} \text{ ou ainda: } \begin{cases} x + y + z = 100 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Observe que o último sistema está escalonado. Podemos, por tentativa, encontrar algumas soluções desse sistema, seguindo os passos a seguir:

| | Escolha um número qualquer | → | O outro número (y) é o dobro do escolhido (y = 2z) | → | O terceiro número (x) é calculado por meio da diferença: 100 − soma dos dois números anteriores (x = 100 − (y + z)) |
|---|---|---|---|---|---|
| | (z) | → | (y) | → | (x) |
| | 10 | → | 20 | → | 70 |
| | 30 | → | 60 | → | 10 |
| | 4,5 | → | 9 | → | 86,5 |
| | −30 | → | −60 | → | 190 |
| | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ |
| Em geral, se $\alpha \in \mathbb{R}$: | $\alpha$ | → | $2\alpha$ | → | $100 - 3\alpha$ |
| | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ |

Observe que, para cada escolha do primeiro número (**z**), encontramos uma única solução para o sistema. Como **z** pode assumir qualquer valor real, concluímos que o sistema apresenta infinitas soluções.

O conjunto solução do sistema é:

$$S = \{(100 - 3\alpha, 2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$$

## Processo prático

Vamos apresentar um procedimento que permitirá obter diretamente a solução geral de um sistema escalonado que possui número de equações menor que o número de incógnitas.

Para isso, vamos utilizar o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

Acompanhe os passos:

1º) Identificamos a incógnita que não aparece no início de cada uma das equações do sistema (geralmente, esta é a "última" incógnita de todas as equações), chamada **variável livre** (ou **incógnita livre**). A variável livre poderá assumir qualquer valor real e, para cada valor assumido por ela, obtemos os valores das demais incógnitas, encontrando uma solução do sistema (se houver mais de uma variável livre, procederemos de modo análogo). Nesse sistema, a variável livre é **z**.

2º) Reescrevemos cada equação do sistema de modo que o termo com a variável livre fique no 2º membro e obtemos:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 - 3z \\ y = 1 + 2z \end{cases} \quad (1)$$

3º) Se atribuirmos um valor para **z**, obteremos um sistema (escalonado) determinado. Resolvendo-o, encontraremos uma solução do sistema.

Se atribuirmos outro valor para **z**, obteremos outro sistema, também determinado, que, resolvido, fornecerá outra solução do sistema. E assim por diante.

Façamos, então, $z = \alpha$ ($\alpha$ é um número real qualquer) e em (1) teremos:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 - 3\alpha \quad (2) \\ y = 1 + 2\alpha \quad (3) \end{cases}$$

4º) Substituímos (3) em (2):

$$x - 2 \cdot (1 + 2\alpha) = 5 - 3\alpha \Rightarrow x - 2 - 4\alpha = 5 - 3\alpha \Rightarrow x = 7 + \alpha$$

5º) Por fim, as soluções do sistema podem ser representadas pela solução geral:

$(7 + \alpha, 1 + 2\alpha, \alpha)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$; temos $S = \{(7 + \alpha, 1 + 2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

Esse tipo de sistema apresenta sempre infinitas soluções, sendo, portanto, um sistema possível e indeterminado (S.P.I.).

Atribuindo valores reais para $\alpha$, obtemos algumas de suas soluções:

$$\alpha = 0 \Rightarrow (7, 1, 0)$$
$$\alpha = 1 \Rightarrow (8, 3, 1)$$
$$\alpha = -2 \Rightarrow (5, -3, -2)$$
$$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2}\right) \text{ etc.}$$

Quando um sistema escalonado apresenta número de equações menor que o número de incógnitas, ele é possível e indeterminado, isto é, tem infinitas soluções.

**OBSERVAÇÕES**

- É importante destacar que, na identificação da(s) variável(is) livre(s), levamos em consideração que, em cada equação do sistema, os termos que contêm as incógnitas aparecem sempre em uma mesma ordem (em geral, a ordem alfabética).
- A escolha da variável livre é, na verdade, arbitrária. Poderíamos, por exemplo, ter escolhido **y** como variável livre. No caso do sistema que acabamos de resolver, teríamos $z = \frac{y-1}{2}$ e $x = \frac{y+13}{2}$ (faça as contas) e o conjunto solução do sistema seria $S = \left\{\left(\frac{y+13}{2}, y, \frac{y-1}{2}\right); y \in \mathbb{R}\right\}$. Pode-se mostrar que os dois conjuntos solução obtidos são iguais, isto é, possuem os mesmos elementos.

No entanto, vamos seguir a convenção adotada a fim de facilitar a verificação das respostas e estabelecer um procedimento comum.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**2** Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$.

**Solução:**

O sistema proposto está escalonado e tem o número de equações menor que o número de incógnitas. Trata-se de um sistema indeterminado.

A variável livre do sistema é **z**.

Reescrevendo o sistema de modo que **z** fique no 2º membro, temos: $\begin{cases} x + 2y = 2 - z \\ y = 1 + 3z \end{cases}$

Fazendo $z = \alpha$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$), obtemos: $\begin{cases} x + 2y = 2 - \alpha & (1) \\ y = 1 + 3\alpha & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$x + 2 \cdot (1 + 3\alpha) = 2 - \alpha \Rightarrow x = -7\alpha$$

Assim:

$$S = \{(-7\alpha, 1 + 3\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Vejamos algumas soluções particulares:

- $\alpha = 3 \Rightarrow (-21, 10, 3)$
- $\alpha = -2 \Rightarrow (14, -5, -2)$
- $\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(-\frac{7}{3}, 2, \frac{1}{3}\right)$

⋮

**3** Resolva o sistema $\begin{cases} a - b + c + d = 1 \\ 2c - d = 0 \end{cases}$.

**Solução:**

O sistema está escalonado e tem o número de equações menor que o número de incógnitas.

As variáveis livres são: **b** e **d**.

Reescrevendo o sistema de modo que as variáveis livres fiquem no 2º membro e fazendo $b = \alpha$ e $d = \beta$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$), temos:

$$\begin{cases} a + c = 1 + \alpha - \beta & (1) \\ 2c = \beta & (2) \end{cases}$$

De (2) obtemos: $c = \frac{\beta}{2}$

Em (1) temos: $a + \frac{\beta}{2} = 1 + \alpha - \beta \Rightarrow a = 1 + \alpha - \frac{3}{2}\beta$

O conjunto solução do sistema é: $S = \left\{\left(1 + \alpha - \frac{3}{2}\beta, \alpha, \frac{\beta}{2}, \beta\right); \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \beta \in \mathbb{R}\right\}$.

Atribuindo-se valores reais quaisquer a $\alpha$ e a $\beta$, obtemos algumas soluções particulares do sistema:

- $\alpha = 0$ e $\beta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$
- $\alpha = 1$ e $\beta = 2 \Rightarrow (-1, 1, 1, 2)$ etc.

## EXERCÍCIOS

**25** Verifique se cada um dos sistemas abaixo está escalonado.

**a)** $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2y = 5 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} -3x + 2y = 11 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 5 \\ 2z = 8 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y + 7z = -2 \\ 2y - 5z = 3 \end{cases}$

**26** Resolva e classifique os seguintes sistemas:

**a)** $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -y = -7 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ -2z = 8 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ y - 3z = 2 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} x + y + z - 2w = 5 \\ y - z + 3w = 3 \\ 2z - w = 4 \\ 3w = 6 \end{cases}$

**e)** $\begin{cases} 4x + y + 2z = -1 \\ 5y - z = 0 \\ 0z = -5 \end{cases}$

**27** O sistema $\begin{cases} a + b - c = \alpha \\ 2b + c = \beta \\ 3c = \gamma \end{cases}$, nas incógnitas **a**, **b** e **c**, é possível e determinado e sua solução é $(-1, 2, -2)$. Determine os valores das constantes reais $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$.

**28** Considere o problema: "Determine dois números reais cuja diferença seja igual a 8".

**a)** Represente esse problema por meio de um sistema linear.

**b)** Apresente ao menos quatro soluções do problema.

**c)** Classifique o sistema do item *a*, obtendo também sua solução geral.

**29** Uma das soluções de $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 2z = m \end{cases}$ é $(1, -1, 0)$. Determine o conjunto solução desse sistema.

# Escalonamento

STOCKFOLIO/ALAMY/FOTOARENA

Uma loja vende componentes eletrônicos de três tipos diferentes: **A**, **B** e **C**.

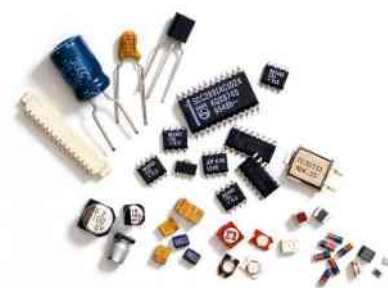
Um levantamento sobre as vendas desses componentes, realizado durante três dias consecutivos, revelou que:

- no primeiro dia, foram vendidos um componente do tipo **A**, dois do tipo **B** e três do tipo **C**, arrecadando-se R$ 260,00;
- no 2º dia, foram vendidos dois componentes do tipo **A**, um do tipo **B** e um do tipo **C**, resultando num total de vendas igual a R$ 150,00;
- no 3º dia, foram vendidos quatro componentes do tipo **A**, três do tipo **B** e um do tipo **C**, num total de R$ 290,00.

Qual é o preço unitário de venda de cada tipo de componente?

Vamos representar o preço unitário dos componentes dos tipos **A**, **B** e **C** por **a**, **b** e **c**, respectivamente.

Temos: 1º dia → ; 2º dia → ; 3º dia →
$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 260 \\ 2a + b + c = 150 \\ 4a + 3b + c = 290 \end{cases}$$

O método do escalonamento, que será estudado a seguir, possibilitará resolver esse sistema.

## Sistemas equivalentes

Dois sistemas lineares, $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$, são equivalentes se toda solução de $\mathbf{S}_1$ é solução de $\mathbf{S}_2$, e vice-versa.

Os sistemas $S_1: \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ e $S_2: \begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$, por exemplo, são equivalentes, pois ambos admitem apenas o par $(3, -1)$ como solução.

Dado um sistema linear qualquer, nosso objetivo é transformá-lo em um outro equivalente, porém na forma escalonada. Procederemos dessa maneira, pois, como vimos, não é difícil resolver um sistema na forma escalonada.

Para isso, poderemos usar os seguintes procedimentos:

I. Multiplicar por **k**, $k \in \mathbb{R}^*$, os dois membros de uma equação qualquer do sistema.

II. Substituir uma equação do sistema pela soma dela, membro a membro, com alguma outra equação. Cada uma dessas equações pode ou não estar previamente multiplicada por um número real não nulo.

III. Trocar a posição de duas equações do sistema.

Observe que os dois primeiros procedimentos já foram usados quando estudamos a resolução de sistemas lineares $2 \times 2$.

Para escalonar um sistema linear qualquer, vamos seguir o roteiro abaixo.

1º) Escolhemos para a 1ª equação aquela em que o coeficiente da 1ª incógnita seja não nulo.
Se possível, fazemos a escolha para que esse coeficiente seja igual a $-1$ ou 1, pois os cálculos ficam, em geral, mais simples.

2º) Anulamos o coeficiente da 1ª incógnita das demais equações, usando o procedimento **II** citado acima.

3º) Fixamos a 1ª equação e aplicamos os dois primeiros passos com as equações restantes.

4º) Fixamos a 1ª e a 2ª equações e aplicamos os dois primeiros passos nas equações restantes, até o sistema ficar escalonado.

**EXEMPLO 1**

Vamos escalonar e, depois, resolver o sistema $\begin{cases} a + 2b + 3c = 260 \\ 2a + b + c = 150 \\ 4a + 3b + c = 290 \end{cases}$, proposto na situação da loja de componentes eletrônicos apresentada na página anterior.

Em primeiro lugar, precisamos anular os coeficientes de **a** na 2ª e na 3ª equações.

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 260 \\ -3b - 5c = -370 \\ -5b - 11c = -750 \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por $-2$:

$$\begin{array}{r} -2a - 4b - 6c = -520 \\ 2a + b + c = 150 \\ \hline -3b - 5c = -370 \end{array} \oplus$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por $-4$:

$$\begin{array}{r} -4a - 8b - 12c = -1\,040 \\ 4a + 3b + c = 290 \\ \hline -5b - 11c = -750 \end{array} \oplus$$

Fixando a 1ª equação, vamos repetir o processo para a 2ª e a 3ª equações.

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 260 \\ -3b - 5c = -370 \\ -8c = -400 \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela, multiplicada por 3, com a 2ª, multiplicada por −5:

$$\begin{array}{rl} -15b - 33c = -2\,250 & \leftarrow (3 \cdot 3^a \text{ eq.}) \\ 15b + 25c = +1\,850 \; \oplus & \leftarrow (-5 \cdot 2^a \text{ eq.}) \\ \hline -8c = -400 & \end{array}$$

O sistema obtido está escalonado e tem o mesmo número de equações e de incógnitas, isto é, o sistema é possível e determinado.

Resolvendo-o, obtemos:

- na 3ª equação → $c = 50$;
- na 2ª equação → $-3b - 5 \cdot 50 = -370 \Rightarrow -3b = -120 \Rightarrow b = 40$;
- na 1ª equação → $a + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 50 = 260 \Rightarrow a + 230 = 260 \Rightarrow a = 30$.

Desse modo, os preços unitários dos componentes dos tipos **A**, **B** e **C** são, respectivamente, R$ 30,00, R$ 40,00 e R$ 50,00.

**EXEMPLO 2**

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$.

Vamos trocar as posições das duas primeiras equações, a fim de que o 1º coeficiente de **x** seja igual a 1: $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$.

Precisamos anular os coeficientes de **x** na 2ª e 3ª equações:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \\ 5y + 4z = 2 \end{cases} \; *$$

$(-3) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.})$:

$$\begin{array}{r} -3x + 6y + 3z = 0 \\ 3x - y + z = 2 \; \oplus \\ \hline 5y + 4z = 2 \end{array}$$

$(-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.})$:

$$\begin{array}{r} -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \; \oplus \\ \hline 5y + 4z = 2 \end{array}$$

Fixando a 1ª equação, repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equações:

Obtemos:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$(-1) \cdot (2^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.})$:

$$\begin{array}{r} -5y - 4z = -2 \\ 5y + 4z = 2 \; \oplus \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

**OBSERVAÇÃO**

No processo de escalonamento, podemos encontrar duas equações com os coeficientes da mesma incógnita iguais (ou proporcionais), o mesmo ocorrendo com os coeficientes independentes (veja * no exemplo 2). Nesses casos, já podemos retirar uma delas do sistema, pois são equações equivalentes.

A 3ª equação pode ser suprimida do sistema, pois, apesar de ser sempre verdadeira, ela não traz informação sobre os valores das incógnitas. Assim, obtemos o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 & (1) \\ 5y + 4z = 2 & (2) \end{cases}$$, cujo número de equações é menor que o número de incógnitas e, portanto, é possível e indeterminado.

A variável livre do sistema é **z**. Fazendo $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos:

- em (2): $y = \dfrac{2 - 4\alpha}{5}$
- em (1): $x = 2y + z \Rightarrow x = 2\left(\dfrac{2 - 4\alpha}{5}\right) + \alpha \Rightarrow x = \dfrac{-3\alpha + 4}{5}$

Assim, $S = \left\{\left(\dfrac{-3\alpha + 4}{5}, \dfrac{2 - 4\alpha}{5}, \alpha\right); \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

**EXEMPLO 3**

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -5x - 20y - 15z = 11 \\ 3x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$.

Precisamos anular os coeficientes de **x** na 2ª e na 3ª equações:

$5 \cdot (1^a \text{ eq.}) + 2 \cdot (2^a \text{ eq.})$:

$$\begin{array}{r} 10x - 5y + 5z = -5 \\ -10x - 40y - 30z = 22 \\ \hline -45y - 25z = 17 \end{array} \oplus$$

$(-3) \cdot (1^a \text{ eq.}) + 2 \cdot (3^a \text{ eq.})$:

$$\begin{array}{r} -6x + 3y - 3z = 3 \\ 6x + 6y + 8z = 6 \\ \hline 9y + 5z = 9 \end{array} \oplus$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -45y - 25z = 17 \\ 9y + 5z = 9 \end{cases} \; (*)$$

**OBSERVAÇÃO**

No processo de escalonamento, podemos encontrar duas equações incompatíveis entre si. No exemplo 3, em (*), poderíamos ter dividido os coeficientes da 2ª equação por (−5), obtendo a equação $9y + 5z = -\dfrac{17}{5}$, que é incompatível com a 3ª equação: $9y + 5z = 9$. Quando isso ocorrer, podemos concluir que se trata de um sistema impossível.

Repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equações, fixando a 1ª equação. Vamos anular o coeficiente de **y** na 3ª equação.

$(2^a \text{ eq.}) + 5 \cdot (3^a \text{ eq.})$:

$$\begin{array}{r} -45y - 25z = 17 \\ 45y + 25z = 45 \\ \hline \underbrace{0 \cdot y + 0 \cdot z}_{0} = 62 \end{array} \oplus$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -45y - 25z = 17 \\ 0 = 62 \end{cases}$$

A equação obtida é sempre falsa, pois, para todo $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$, o primeiro membro se anula e $0 \neq 62$.

Logo, o sistema é impossível, isto é, não admite solução.

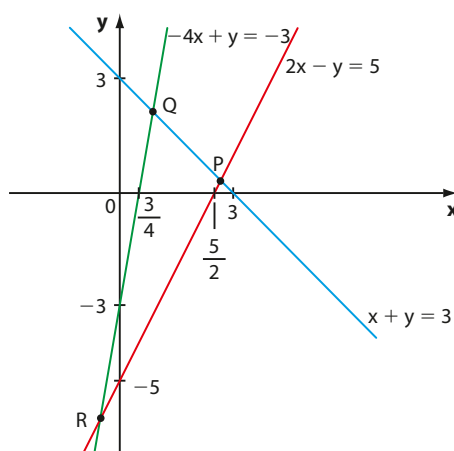
**EXEMPLO 4**

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 5. \\ -4x + y = -3 \end{cases}$

É preciso anular o coeficiente de **x** na 2ª e na 3ª equações. Temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -3y = -1 \leftarrow (-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ 5y = 9 \leftarrow (4) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Esse sistema é impossível, pois a 2ª e a 3ª equações não podem ser satisfeitas simultaneamente. Assim, $S = \varnothing$.

É interessante interpretar graficamente esse sistema. Já vimos que uma equação linear com duas incógnitas é representada, graficamente, por uma reta. Façamos, em um mesmo plano cartesiano, a representação dessas três retas.

Observe que as três retas obtidas são, duas a duas, concorrentes entre si (veja os pontos **P**, **Q** e **R**), mas não existe um ponto que pertença, simultaneamente, às três retas.

**EXEMPLO 5**

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x - y + 5z = 2 \end{cases}$.

Devemos anular o coeficiente de **x** na 2ª equação:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ -7y + 7z = 0 \leftarrow (-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado, tem o número de equações menor que o número de incógnitas e é possível e indeterminado; sua variável livre é **z**.

Se $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos:

2ª equação: $-7y + 7\alpha = 0 \Rightarrow y = \alpha$

1ª equação: $2x + 3\alpha - \alpha = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1 - 2\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} - \alpha$

$$S = \left\{\left(\frac{1}{2} - \alpha, \alpha, \alpha\right); \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

## EXERCÍCIOS

**30** Resolva os seguintes sistemas, por meio do escalonamento, e classifique-os.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - z = -1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

**31** Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 3z = 1 \\ 3x - 2z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a - b - c = -1 \\ a - b + c = 1 \\ a + b - c = 1 \end{cases}$

**32** Um casal de namorados jantou, em um *fast-food* de cozinha árabe, três vezes em um mesmo mês.

- Na primeira noite, consumiram dois quibes, cinco esfirras e dois sucos e pagaram R$ 32,00.
- Na segunda noite, consumiram três quibes, seis esfirras e três sucos e pagaram R$ 44,70.
- Na terceira noite, consumiram dois quibes, dez esfirras e três sucos e pagaram R$ 49,00.

Qual é o preço unitário do quibe, da esfirra e do suco?

**33** Uma vendedora de loja de roupas atendeu, no mesmo dia, três clientes e efetuou as seguintes vendas dos mesmos produtos:

Cliente 1 — 1 calça, 2 camisas e 3 pares de meias
Valor: R$ 287,00

Cliente 2 — 2 calças, 5 camisas e 7 pares de meias
Valor: R$ 674,00

Cliente 3 — 2 calças, 3 camisas e 4 pares de meias
Valor: R$ 462,00

JOSE LUIS PELAEZ INC/BLEND RF/DIOMEDIA

Quanto custou cada camisa?

**34** Em um programa de prêmios na TV, o participante começa com R$ 500,00. Para cada pergunta respondida corretamente, recebe R$ 200,00; e para cada resposta errada perde R$ 150,00.
Se um participante respondeu todas as 25 questões formuladas e terminou com R$ 600,00, quantas questões ele errou?

**35** Resolva, utilizando o escalonamento, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 3x + 7y = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 3x - y = 9 \\ x + y = 1 \\ 5x + 7y = -10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x + 3y = 16 \\ 2x + 5y = 27 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - z + w = -4 \\ y - z - w = -2 \\ x - z + 2w = -2 \end{cases}$

**36** Resolva, graficamente, os sistemas correspondentes aos itens *a* e *c* do exercício anterior.

**37** Três amigas, Ana, Bia e Carol, têm juntas R$ 340,00. Se Ana gastar R$ 10,00, passará a ter o dobro do que tem Bia. Se Ana gastar 40% do total que possui, passará a ter R$ 9,00 a menos que Carol. Quanto tem cada uma?

**38** Em uma papelaria foram feitos os seguintes pedidos:

- pedido I: 4 canetas, 3 lapiseiras e 6 borrachas.
- pedido II: 2 canetas, 2 lapiseiras e 3 borrachas.

Os valores dos pedidos I e II eram, respectivamente, R$ 37,20 e R$ 20,60.

Com base nessas informações, determine, se possível:

**a)** o preço unitário da lapiseira;

**b)** o preço de cada caneta;

**c)** o preço pago por 5 lapiseiras, 2 canetas e 3 borrachas;

**d)** a diferença entre o preço da caneta e o preço da borracha.

**39** Para a final de um campeonato de futebol, foram colocados à venda 40 000 ingressos, divididos entre arquibancada, numerada descoberta e numerada coberta.

Sabe-se que:

- todos os ingressos foram vendidos;
- o preço do ingresso para a numerada coberta é igual à soma dos preços dos ingressos dos outros dois setores;
- 60% do total de ingressos foram vendidos para a arquibancada, 25% para a numerada descoberta e os demais para a numerada coberta, gerando uma arrecadação de 4,32 milhões de reais;
- a razão entre os preços dos ingressos para a numerada descoberta e coberta é, nessa ordem, igual a $\frac{3}{5}$. Determine o preço dos ingressos para cada setor.

**40** Uma fábrica de colchões utiliza três tipos de molas $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ e $\mathbf{M_3}$ na confecção de três tipos de colchões $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ e $\mathbf{C_3}$, todos com dimensões 2 m × 1,20 m. O número de molas usados na confecção dos três tipos de colchões é dado na tabela seguinte.

| Mola \ Colchão | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|---|---|---|---|
| $M_1$ | 96 | 144 | 240 |
| $M_2$ | 96 | 48 | 24 |
| $M_3$ | 96 | 96 | 24 |

Sabendo que, em uma semana, foram utilizados, 19 200 molas do tipo $\mathbf{M_1}$, 10 080 molas do tipo $\mathbf{M_2}$ e 12 480 molas do tipo $\mathbf{M_3}$, determine a soma das quantidades de colchões produzidos naquela semana.

# Determinantes

Algumas operações envolvendo os coeficientes das incógnitas de um sistema linear permitem classificá-lo como possível (determinado ou indeterminado) ou impossível.

Se o número de equações do sistema é igual ao seu número de incógnitas, há um método geral de discussão.

## Caso 2 × 2

Seja o sistema linear $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, de incógnitas **x** e **y**.

Vamos construir um sistema equivalente a ele, porém na forma escalonada:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ (ad - bc) \cdot y = af - ce \end{cases} \quad (*)$$

$(-c) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (a) \cdot (2^a \text{ eq.})$

$$\begin{array}{r} -acx - bcy = -ce \\ acx + ady = af \\ \hline (ad - bc) \cdot y = af - ce \end{array} \quad (+)$$

Podemos ter:

- $ad - bc \neq 0$: nesse caso, podemos obter o valor de **y**, que é único, e, em seguida, obter o valor de **x**, que também é único.

  Trata-se de um sistema possível e determinado (S.P.D.).
- $ad - bc = 0$: nesse caso, o 1º membro de (*) se anularia.

  Se o 2º membro de (*) também se anulasse, teríamos $0 = 0$, e o sistema se reduziria à sua 1ª equação, sendo, portanto, possível e indeterminado (S.P.I.).

  Se o 2º membro de (*) não se anulasse, a 2ª equação seria uma sentença falsa, $\forall y \in \mathbb{R}$.

  Logo, o sistema não teria solução: seria um sistema impossível (S.I.).

O número real $ad - bc$ é definido como o **determinante** da matriz incompleta (**M**) dos coeficientes do sistema. Temos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } \det M = a \cdot d - b \cdot c$$

Indicaremos esse número por: det M ou $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Observe que det M é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de **M** e o produto dos elementos de sua diagonal secundária.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

diagonal secundária — diagonal principal

Temos: $\det M = a \cdot d - b \cdot c$

**EXEMPLO 6**

- O determinante (**D**) da matriz $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) = 18 + 4 = 22$$

- O determinante da matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ é:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) = 5$$

- $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) = -1 - 1 = -2$

O símbolo [ ] é usado para representar uma matriz e nunca o determinante da matriz.

**PENSE NISTO:**

Note que escrevemos $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, porém $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ não faz sentido.

**PENSE NISTO:**

Qual é o valor do determinante da matriz $I_2$ (identidade de ordem 2)?

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

## Caso 3 × 3

Consideremos o sistema linear seguinte nas incógnitas **x**, **y** e **z**:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = p \end{cases}$$

Seguindo raciocínio análogo ao desenvolvido no caso 2 × 2 (veja um pouco mais sobre determinantes de matrizes de ordem 3 e a regra de Sarrus na página 124), define-se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ pelo número real:

$$aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi \quad (*)$$

Existe uma maneira mais fácil de se obter esse valor por meio da **regra prática de Sarrus** (1798-1861):

1º) Copiamos ao lado da matriz **A** as suas duas primeiras colunas.

2º) Multiplicamos os elementos da diagonal principal de **A**. Seguindo a direção da diagonal principal, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais".

3º) Multiplicamos os elementos da diagonal secundária de **A**, trocando o sinal do produto obtido. Seguindo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais", também trocando o sinal dos produtos.

4º) Somamos todos os produtos obtidos no 2º e no 3º passos.

Observe:

1º passo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$\underbrace{-ceg - afh - bdi}_{3^{\text{o}}\text{ passo}}$ $\underbrace{aei \quad bfg \quad cdh}_{2^{\text{o}}\text{ passo}}$

4º passo: O determinante da matriz é igual a:

$aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$, que coincide com (*).

Acompanhe os dois exemplos seguintes.

**EXEMPLO 7**

Vamos calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{matrix}$$

+80 −6 +6 −4 −72 +10

$$\det A = +80 - 6 + 6 - 4 - 72 + 10 = 14$$

**EXEMPLO 8**

Vamos calcular o determinante da matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Temos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{matrix}$$

$+36 \quad 0 \quad -4 \qquad 0 \quad -16 \quad -3$

Temos:
det B = 36 − 4 − 16 − 3 = 13

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; pela regra prática de Sarrus

**PENSE NISTO:**

Qual é o valor de det $I_3$, sendo $\mathbf{I}_3$ a matriz identidade de ordem 3?

**OBSERVAÇÃO**

Só se define o determinante de matrizes quadradas (1 × 1, 2 × 2, 3 × 3, ...).
No caso 1 × 1 (matriz com um único elemento), o determinante da matriz é igual ao seu elemento.
Vejamos:
- $A = [5] \Rightarrow \det A = 5$
- $B = (-2) \Rightarrow \det B = -2$

O estudo dos determinantes de matrizes quadradas de ordem superior a 3 não faz parte dos objetivos desta coleção.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**4** Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \geq j \\ i + j, & \text{se } i < j \end{cases}$.

Calcule det A.

**Solução:**

Escrevemos a matriz **A** em sua forma genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Utilizamos a lei de formação dos elementos de **A** e obtemos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$-4 \quad -5 \quad -3 \qquad 1 \quad 15 \quad 4$

$\Rightarrow \det A = -12 + 20 = 8$

**5** Resolva, em ℝ, a equação:

$$\begin{vmatrix} x & 4 & -2 \\ x-1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

**Solução:**

O 1º membro representa o determinante de uma matriz 3 × 3:

$$\begin{vmatrix} x & 4 & -2 \\ x-1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & 4 \\ x-1 & x \\ 1 & x+1 \end{matrix}$$

$2x \quad -(x^2 + x) \quad -12(x - 1) \qquad 3x^2 \quad 4 \quad -2(x^2 - 1)$

Seu valor é:
$2x - (x^2 + x) - 12(x - 1) + 3x^2 + 4 - 2(x^2 - 1) =$
$= -11x + 18$

O 2º membro é igual ao determinante de uma matriz 2 × 2:

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x - 6$$

Como os dois determinantes são iguais, temos:

$$-11x + 18 = x - 6 \Rightarrow x = 2$$

S = {2}

**6** Considere o sistema nas incógnitas **x** e **y** e $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + 4y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Determine os possíveis valores de **m** para os quais o sistema:

**a)** admite um única solução;

**b)** admite infinitas soluções;

**c)** não admite solução.

**Solução:**

Como vimos, um sistema com número de equações igual ao número de incógnitas pode ser classificado de acordo com o anulamento ou não do determinante **D** da matriz incompleta dos coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 4$$

**a)** Se $D \neq 0 \Rightarrow 2m - 4 \neq 0$, isto é, $m \neq 2$, então o sistema é possível e determinado e apresenta uma única solução.

**b)** Se $D = 0$, isto é, se $m = 2$, o sistema pode ser indeterminado ou impossível. É preciso substituir **m** por 2 e analisar:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Dividindo por 2 os coeficientes da 1ª equação, obtemos $x + 2y = 4$ e o sistema se reduz à equação linear $x + 2y = 4$, que possui infinitas soluções $\left((4, 0), (0, 2), \left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ e } (-2, 3) \text{ são algumas de suas soluções}\right)$.

Assim, se $m = 2$, o sistema admite infinitas soluções, isto é, é indeterminado.

**c)** Pelo que vimos no item *b*, não existe $m \in \mathbb{R}$ para o qual o sistema é impossível, isto é, não admite solução.

## UM POUCO DE **HISTÓRIA**

### A origem dos determinantes

Os primeiros trabalhos sobre determinantes teriam surgido, quase na mesma época, no Oriente e no Ocidente: em 1683, em um artigo do matemático japonês Seki Kowa (1642-1708) e, dez anos depois, com o alemão Gottfried Leibniz (1646-1716). Ambos desenvolveram expressões matemáticas ligadas aos coeficientes das incógnitas das equações de um sistema linear. Em linguagem e notação atuais, tais expressões definem o determinante da matriz incompleta dos coeficientes de um sistema.

Outros matemáticos, como Cramer, Bézout, Laplace e Vandermonde também publicaram, no século XVIII, artigos sobre determinantes e deixaram contribuições valiosas.

No entanto, somente no século XIX a teoria dos determinantes ganhou maior impulso na Europa, com os trabalhos de Jacobi (1804-1851) e Cauchy (1789-1857). A esse último atribui-se o título de criador do termo "determinante", além de ser o responsável por reunir, em 1812, tudo o que era conhecido até então sobre o assunto.

ALEX SEGRE/ALAMY/FOTOARENA

Estátua de Leibniz na parte externa da Royal Academy of Arts de Londres.

**Fontes de pesquisa:** BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.; BATISTA, I. L; LUCCAS, S. Abordagem histórico-filosófica e Educação Matemática — uma proposta de interação entre domínios de conhecimento. *Educ. Mat. Pesqui.*, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 101-133, 2004. Disponível em: <www.uel.br/grupo-pesquisa/ifhiecem/arquivos/4682-10997-1-PB.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

## EXERCÍCIOS

**41** Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & -a \\ -a & -a \end{vmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$

g) $\begin{vmatrix} \text{sen}\,\frac{\pi}{2} & \text{tg}\,\pi \\ \text{tg}\,\frac{\pi}{4} & \cos\pi \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} \text{sen}\,8° & -\cos 8° \\ \cos 8° & \text{sen}\,8° \end{vmatrix}$

**42** Sejam $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Calcule o determinante das seguintes matrizes:

**a)** A

**b)** B

**c)** A + B

**d)** A − B

**e)** A + 2B

**f)** $A \cdot B$

**g)** $A + I_2$

**h)** $A^t$

**43** Seja $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = 4i - 3j$. Calcule det A.

**44** Calcule o valor de cada um dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

**45** Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = (i - j)^2$. Obtenha o valor de:

**a)** det A

**b)** $\det A^t$

**46** Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3\times3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i \geq j \\ 2, \text{ se } i < j \end{cases}$,

e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ se } i \geq j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$.

Calcule det A, det B, det (A + B) e det $(A \cdot B)$.

**47** Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ x+2 & x-2 \end{vmatrix} = 8$

b) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2x & x & 2 \\ 3 & 2x & x \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & x & x+1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 6$

**48** Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \leq x$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -5 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

**49** Considere o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$ em que as incógnitas são **x** e **y** e $m \in \mathbb{R}$.
Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema:

**a)** admita uma única solução;

**b)** admita infinitas soluções;

**c)** não admita solução.

**50** Determine **a** e **b** reais tais que $\begin{vmatrix} b & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} = 14$ e $\begin{vmatrix} b & a & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

**51** Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

**a)** Construa a matriz $M - k \cdot I$, sendo $k \in \mathbb{R}$ e **I** a matriz identidade 2 × 2.

**b)** Quais os valores de **k** que tornam nulo o determinante da matriz $M - k \cdot I$?

**52** Considere o sistema linear representado pela equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ k+1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

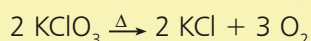
Para quais valores reais de **k** o sistema admite solução única?

## TROQUE **IDEIAS**

### Os sistemas lineares e o balanceamento de equações químicas

Nas aulas de Química, você provavelmente já deve ter aprendido a balancear uma equação química, ao estudar sobre a estequiometria das reações.

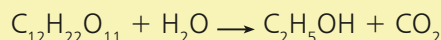
A reação seguinte representa a decomposição térmica do clorato de potássio ($KClO_3$):

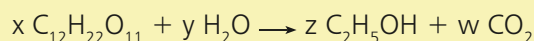
$$2\ KClO_3 \xrightarrow{\Delta} 2\ KCl + 3\ O_2$$

Ela está balanceada. Os números inteiros 2, 2 e 3 são coeficientes estequiométricos dos compostos $KClO_3$, $KCl$ e $O_2$, respectivamente. Note que a quantidade de átomos de potássio (K), cloro (Cl) e oxigênio (O) é a mesma nos dois lados (reagentes e produtos) da reação.

Vamos conhecer outro método de balanceamento, baseado na resolução de sistemas lineares. A reação seguinte, não balanceada, representa o processo de obtenção do etanol ($C_2H_5OH$) a partir da sacarose ($C_{12}H_{22}O_{11}$). A sacarose é o chamado "açúcar de mesa" ou "açúcar comercial comum" encontrado em frutas e na cana-de-açúcar.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Usina de açúcar e de álcool, Pontal (SP), 2013.

$$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O \longrightarrow C_2H_5OH + CO_2$$

- Vamos atribuir incógnitas aos coeficientes de cada composto envolvido na equação:

$$x\ C_{12}H_{22}O_{11} + y\ H_2O \longrightarrow z\ C_2H_5OH + w\ CO_2$$

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

**a)** Para cada elemento químico da reação, faça a contagem da quantidade de átomos, igualando a quantidade no lado dos reagentes à quantidade no lado dos produtos e escreva em seu caderno as equações lineares obtidas:

i) oxigênio (O) ii) carbono (C) iii) hidrogênio (H)

**b)** Escreva, em seu caderno, o sistema linear de três equações e quatro incógnitas obtido.

**c)** Escalone o sistema linear obtido.

**d)** Classifique o sistema escalonado e obtenha sua solução geral em função de **w**.

**e)** Como **w** pode assumir qualquer valor real, escolha **w** de modo a obter uma solução em que todas as incógnitas são os menores inteiros positivos possíveis; em seguida, escreva, em seu caderno, a equação balanceada.

**f)** Usando esse processo, faça o balanceamento das seguintes equações químicas:

i) $C_6H_{12}O_6 \longrightarrow CO_2 + C_2H_5OH$

ii) $Al_2(CO_3)_3 \longrightarrow Al_2O_3 + CO_2$

iii) $C_4H_{10} + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$

**Fonte de pesquisa:** ATKINS, P.; JONES, L. *Princípios da Química*: questionando a vida moderna e o meio ambiente. 5ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

# Sistemas homogêneos

Dizemos que um sistema linear é homogêneo se o termo (ou coeficiente) independente de cada uma de suas equações é igual a zero. Assim, são exemplos de sistemas homogêneos:

$$S_1: \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ -x + 5y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \quad S_3: \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

**PENSE NISTO:**

O sistema $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$ é homogêneo?

Não;
$x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + y - z = -3$,
e assim por diante; trata-se do sistema
$\begin{cases} x + y - z = -3 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - z = -2 \end{cases}$

Vamos observar uma propriedade característica dos sistemas homogêneos:

- Em $\mathbf{S_1}$, o par ordenado (0, 0) é uma solução, pois verifica as duas equações.
- Em $\mathbf{S_2}$, a tripla ordenada (0, 0, 0) é uma solução, pois verifica as três equações.
- Em $\mathbf{S_3}$, o par ordenado (0, 0) é uma solução, pois verifica as três equações.

De modo geral, um sistema homogêneo com **n** incógnitas sempre admite a sequência $\underbrace{(0, 0, ..., 0)}_{\textbf{n} \text{ zeros}}$ como solução. Essa solução é chamada solução **nula**, **trivial** ou **imprópria**. Desse modo, um sistema homogêneo é sempre possível, pois possui, ao menos, a solução nula.

Se o sistema só possui a solução nula, ele é possível e determinado.

Havendo outras soluções, além da solução nula, ele é possível e indeterminado. Essas soluções recebem o nome de **soluções próprias** ou **não triviais**.

**EXEMPLO 9**

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$ por escalonamento, obtemos:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ \quad\; - y = 0 \end{cases} \leftarrow (1^a \text{ eq.}) \cdot (-3) + (2^a \text{ eq.}) \cdot 4$$

Temos um sistema escalonado com mesmo número de equações e de incógnitas, ou seja, um sistema possível e determinado; sua única solução é (0, 0).

**EXEMPLO 10**

O sistema homogêneo $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -5x + 15y = 0 \end{cases}$ admite infinitas soluções. Observe:

Notando que $-5x + 15y = 0$ equivale a $-5 \cdot (x - 3y) = 0$, isto é, $x - 3y = 0$, temos que o sistema se reduz à equação linear $x - 3y = 0$, que possui infinitas soluções.

Como $x = 3y$, sua solução geral é $(3\alpha, \alpha)$; $\alpha \in \mathbb{R}$. Vejamos algumas soluções:

$\alpha = 0 \rightarrow (0, 0)$ é a solução nula, trivial ou imprópria.

$\alpha = 1 \rightarrow (3, 1)$

$\alpha = -4 \rightarrow (-12, -4)$

$\alpha = \frac{1}{9} \rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$

⋮

soluções próprias ou diferentes da trivial.

**PENSE NISTO:**

Observe que o determinante da matriz incompleta dos coeficientes desse sistema é zero. Podemos, então, garantir que o sistema é indeterminado?

Sim. Conforme vimos na página 116, quando o determinante se anula, o sistema é impossível ou indeterminado. Nesse exemplo, trata-se de um sistema homogêneo, que sempre apresenta solução, isto é, não pode ser impossível. Logo, só pode ser indeterminado.

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**53** Resolva e classifique os seguintes sistemas homogêneos:

**a)** $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 7x - 14y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$

**54** Seja o sistema:

$\begin{cases} x - y + 4z = m - 2 \\ mx + 3y - z = 0 \\ 6x + (m - 3)y + 15z = 0 \end{cases}$

**a)** Determine **m** real para que o sistema seja homogêneo.

**b)** Utilizando o resultado do item *a*, resolva o sistema.

**55** O sistema a seguir é escalonado:

$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ (m + 1)y = 0 \end{cases}$

Para quais valores reais de **m** o sistema admite somente a solução nula ou trivial?

**56** Considere o sistema $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -4x + my = 0 \end{cases}$, no qual **x** e **y** são incógnitas e $m \in \mathbb{R}$.

**a)** Para quais valores de **m** o sistema admite soluções próprias?

**b)** Nas condições do item *a*, forneça três soluções próprias desse sistema.

## DESAFIO

Patrícia fez um pagamento de R$ 5 200,00 usando cédulas de R$ 20,00, R$ 50,00 e R$ 100,00, num total de 96 cédulas. Sabe-se que as quantidades de cédulas de R$ 20,00, R$ 50,00 e R$ 100,00 formavam, nessa ordem, uma progressão aritmética (P.A.). Qual é a razão dessa P.A.?

## UM POUCO MAIS SOBRE

# Determinantes de matrizes de ordem 3 e a regra de Sarrus

Consideremos o sistema linear seguinte nas incógnitas **x**, **y** e **z**:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = p \end{cases}$$

Vamos construir um sistema equivalente a ele, porém na forma escalonada:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ (bd - ae) \cdot y + (cd - af) \cdot z = md - an \quad \leftarrow d \cdot (1^a \text{ eq.}) + (-a) \cdot (2^a \text{ eq.}) \\ (bg - ah) \cdot y + (cg - ai) \cdot z = mg - ap \quad \leftarrow g \cdot (1^a \text{ eq.}) + (-a) \cdot (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ (bd - ae) \cdot y + (cd - af) \cdot z = md - an \\ (aie + cdh + bfg - afh - ecg - bid) \cdot z = (mdh + nbg + ape - anh - mge - pbd) \leftarrow -(bg - ah) \cdot (2^a \text{ eq.}) + (bd - ae) \cdot (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

O último sistema obtido está escalonado.
Observe que:

- se $(aie + cdh + bfg - afh - ecg - bid) \neq 0$, obtemos um único valor para **z**; substituindo-se **z** na 2ª equação, obtemos o valor de **y**, e, em seguida, obtemos o valor de **x**, chegando à única solução desse sistema. Nesse caso, teríamos um sistema possível e determinado;
- se $(aie + cdh + bfg - afh - ecg - bid) = 0$, podemos ter um sistema indeterminado ou impossível, conforme o 2º membro da última equação seja nulo ou não nulo, respectivamente.

O número real **aei + cdh + bfg − afh − ecg − bid** é definido como o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, que é a matriz incompleta dos coeficientes do sistema e indicamos: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$

$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$.

Observe o cálculo de $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ por meio da regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

# CAPÍTULO 7 Geometria Espacial de Posição

## UM POUCO DE **HISTÓRIA**

### O desenvolvimento da Geometria

Nas civilizações mais antigas — egípcia e babilônica —, a Geometria desenvolveu-se quase sempre visando à resolução de problemas de medições, como o cálculo de distâncias, áreas e volumes, os quais estavam diretamente ligados à atividade de subsistência.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Conhecimentos de Geometria permitiram construções como este teatro, no Peloponeso, na Grécia, em 350 a.C.

Foi na Grécia, aproximadamente no século V a.C., que a Geometria se desvinculou das questões de mensuração para tomar um rumo mais abstrato. Passou-se a exigir que as propriedades das figuras geométricas fossem validadas por meio de uma demonstração lógica, e não mais por métodos experimentais.

O primeiro pensador grego associado ao método demonstrativo foi Tales de Mileto (cerca de 625-546 a.C.). Acredita-se que Tales provou as seguintes propriedades usando esse método:

- "Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então são congruentes."
- "Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é ângulo reto."
- "Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes."
- "Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão entre as medidas dos respectivos segmentos correspondentes da outra transversal" (essa propriedade é conhecida como teorema de Tales).

Outro pensador grego de grande importância para a Geometria foi Pitágoras, que viveu por volta de 585-500 a.C. Pitágoras fundou uma "escola", ou seja, uma espécie de academia para estudo da filosofia e da ciência, na qual reuniu vários pensadores e discípulos. Como os ensinamentos da escola pitagórica eram transmitidos oralmente, não há documentos de suas descobertas. Uma grande contribuição dos pitagóricos se deu com a teoria dos números (em Aritmética), e seu maior legado para a Geometria é a demonstração da propriedade que leva o nome de seu mestre.

Teorema de Pitágoras — "Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos."

O maior pensador grego ligado à Matemática, e especialmente à Geometria, foi Euclides (cerca de 300 a.C.), que se formou no Museu de Alexandria — espécie de universidade da época. Esse museu foi criado por Alexandre Magno — rei da Macedônia que conquistou a Grécia. A obra-prima de Euclides é *Os elementos*, com treze volumes. Os três últimos volumes dessa obra abordam a Geometria Espacial, reunindo algumas descobertas anteriores, mas apresentando-as de forma lógico-dedutiva.

Nessa formulação, Euclides pretendia que as noções ou conceitos geométricos fossem definidos, ou seja, caracterizados objetivamente por palavras e baseados apenas em conceitos estabelecidos anteriormente. Além disso, tinha o objetivo de que todas as propriedades ou proposições fossem demonstradas, ou seja, de que sua validade fosse estabelecida por meio de argumentos lógicos e utilizando nas demonstrações apenas propriedades demonstradas anteriormente. Isso caracterizou uma ruptura definitiva com a Matemática de base experimental e empírica dos séculos anteriores. É bem verdade que, muitos séculos depois, os matemáticos verificaram que o método criado por Euclides não foi usado de maneira perfeita na sua obra e que *Os elementos* tem ainda vários apelos à intuição. De todo modo, o valor da obra de Euclides é inestimável e ela perdura até nossos dias, com alguns aperfeiçoamentos feitos por matemáticos dos séculos XIX e XX.

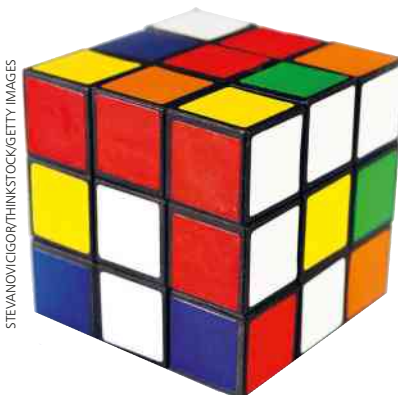
**Fontes de pesquisa:** MILIES, C. F. P.; BUSSAB, J. H. O. *A Geometria na antiguidade clássica*. São Paulo: FTD, 1999.; BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

THE ELEMENTS of the most aunci-ent Philosopher EVCLIDE of Megara.

CHARLES THOMAS-STANFORD

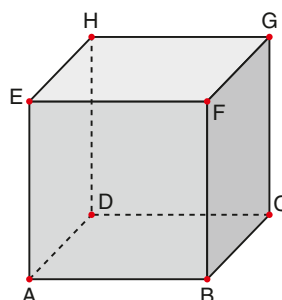
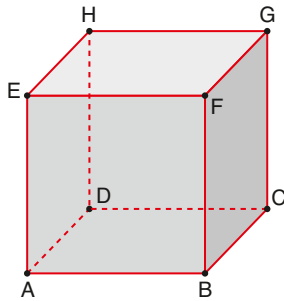
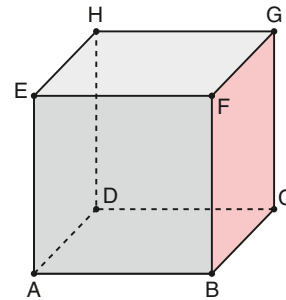
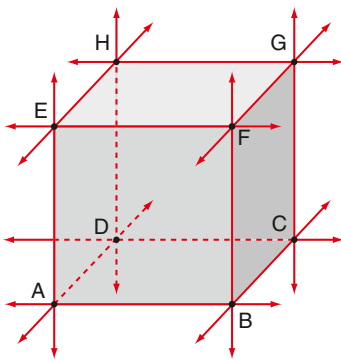
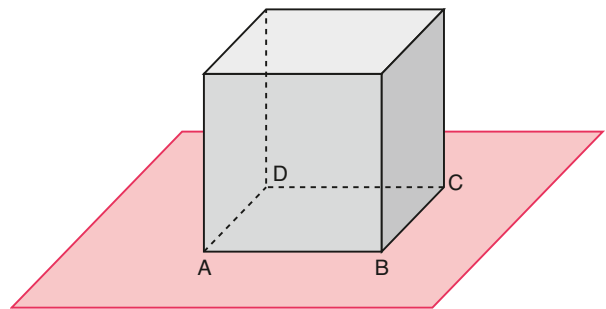
Frontispício da primeira tradução para o inglês, em 1570, da obra *Os elementos*, escrita por Euclides.

Vamos examinar uma figura geométrica que conhecemos da nossa vivência cotidiana: o cubo. Há vários objetos que remetem à forma de um cubo: caixas, dados de jogar, brinquedos, móveis etc.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

STEVANOVICIGOR/THINKSTOCK/GETTY IMAGES

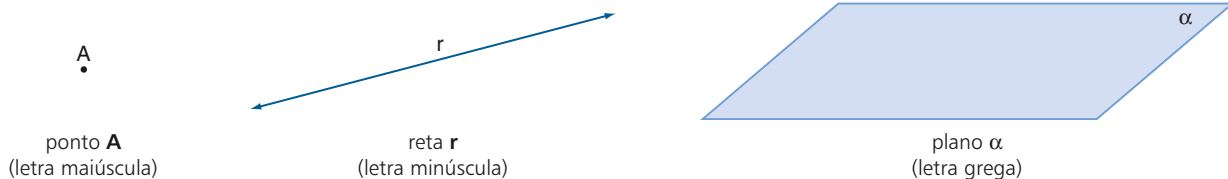
THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Ao analisar um cubo, podemos notar que:

- possui oito **vértices**. Os oito vértices (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**) de um cubo são exemplos de **pontos**. O ponto não tem dimensão.

- possui 12 **arestas**. As 12 arestas de um cubo ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$, $\overline{EA}$, $\overline{FB}$, $\overline{GC}$, $\overline{HD}$) são exemplos de **segmentos de reta**.

- é formado por seis quadrados denominados **faces**. As seis faces de um cubo são exemplos de **superfícies planas**. Na figura abaixo, a face BCGF aparece destacada.

Na figura a seguir, ao imaginarmos que cada aresta do cubo foi "prolongada" nos dois sentidos, estaremos imaginando **retas**. Cada uma dessas retas contém uma aresta do cubo.

Se imaginarmos que cada face do cubo foi "expandida", como na face ABCD da figura abaixo, estaremos imaginando **planos**. Cada um desses planos contém uma face do cubo.

## Noções primitivas (ou iniciais)

A construção da Geometria se baseia em três noções iniciais, das quais temos um conhecimento intuitivo, decorrente da observação do mundo concreto. Essas noções são as de **ponto**, **reta** e **plano**.

Vamos convencionar como representá-las da seguinte forma:

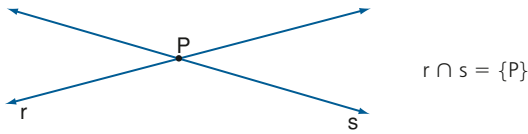
ponto **A** (letra maiúscula) — reta **r** (letra minúscula) — plano α (letra grega)

As noções primitivas ou iniciais não são definidas. Todas as demais noções ou conceitos geométricos podem ser definidos, isto é, caracterizados objetivamente por meio de palavras, obedecendo-se a uma regra básica: só se poderá definir um novo conceito se forem utilizados na definição conceitos já estabelecidos.

Neste capítulo, toda definição será indicada por [DEF].

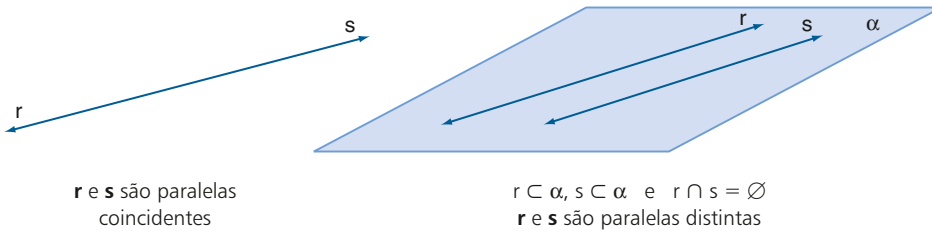
Vejamos as três primeiras definições:

- [DEF] **Espaço**: é o conjunto formado por todos os pontos.

- [DEF] **Retas concorrentes**: duas retas são concorrentes se possuem um único ponto comum.

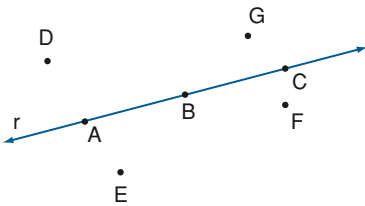
$r \cap s = \{P\}$

- [DEF] **Retas paralelas**: duas retas são paralelas se são coincidentes ou são coplanares (estão contidas em um mesmo plano) e não têm ponto comum.

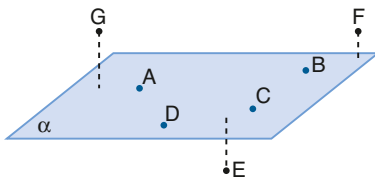
**r** e **s** são paralelas coincidentes

$r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$ e $r \cap s = \varnothing$
**r** e **s** são paralelas distintas

## Proposições primitivas (ou iniciais)

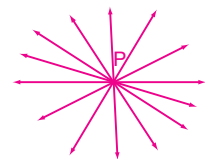
O estudo lógico da Geometria se apoia em algumas propriedades relacionadas a pontos, retas e planos. Essas propriedades são aceitas como verdadeiras, sem necessidade de demonstração lógica, e são chamadas **proposições iniciais**, **proposições primitivas** ou **postulados**.

### Postulados da existência

- Numa reta e fora dela existem infinitos pontos.

Por exemplo:
$A \in r$, $B \in r$, $C \in r$ etc.
$D \notin r$, $E \notin r$, $F \notin r$, $G \notin r$ etc.

- Num plano e fora dele existem infinitos pontos.

Por exemplo:
$A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$ etc.
$E \notin \alpha$, $F \notin \alpha$, $G \notin \alpha$ etc.

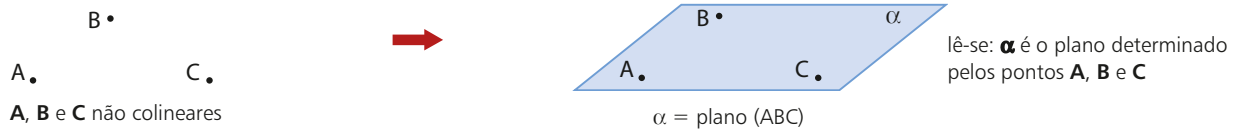
### Postulados da determinação

- Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Infinitas.

**PENSE NISTO:**

Dado um ponto **P**, quantas retas passam por ele?

De outra forma, podemos dizer que: dados dois pontos distintos **A** e **B**, existe uma só reta que tem **A** e **B** como seus elementos (ou uma só reta que passa por eles).

- Três pontos não colineares determinam um único plano.

De outra forma, podemos dizer que: dados três pontos **A**, **B** e **C** não pertencentes a uma mesma reta, existe um só plano que tem **A**, **B** e **C** como seus elementos (ou um só plano que passa por eles).

## Postulado da inclusão

- Se uma reta possui dois pontos distintos num plano, ela está contida nesse plano.

De outra forma, dizemos que, se uma reta tem dois pontos distintos num plano, todos os seus pontos pertencem a esse plano.

## Postulado das paralelas (ou postulado de Euclides)

- Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

De outro modo, podemos dizer que, dado um ponto **P** não pertencente a uma reta **r**, por **P** podemos traçar uma única reta **s** paralela a **r**. No caso de o ponto **P** pertencer a **r**, também é única a paralela, pois é a própria reta **r**.

Os quatro postulados enunciados são aceitos como verdadeiros sem demonstração. Todas as demais propriedades, proposições ou teoremas de Geometria podem ser demonstrados, ou seja, terão sua validade estabelecida por meio de uma argumentação lógica, obedecendo-se a uma regra básica: só se poderá demonstrar (ou provar) uma nova propriedade se forem utilizadas, na demonstração, propriedades já estabelecidas como verdadeiras.

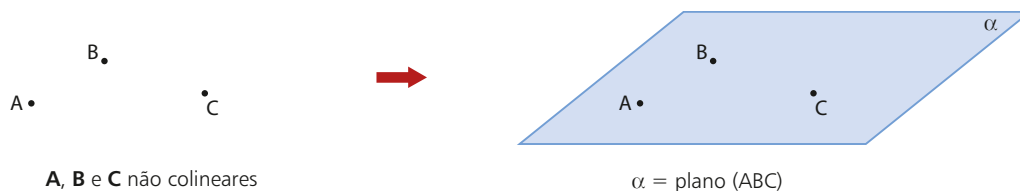
Neste capítulo, as proposições serão indicadas por [PROP]. Para não nos estendermos demais, omitiremos algumas demonstrações; entretanto, algumas das proposições mais importantes estarão demonstradas no item *Teoremas fundamentais*, na página 145 deste capítulo.

## Determinação de planos

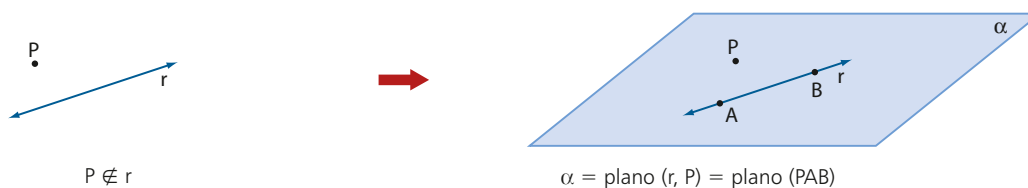
Há quatro modos de determinar a posição de um plano no espaço. Vejamos:

1º) [POSTULADO] por meio de três pontos não colineares.

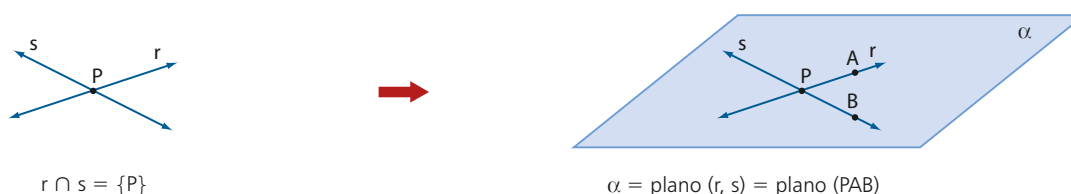
**A**, **B** e **C** não colineares

$\alpha$ = plano (ABC)

2º) [PROP] por meio de uma reta e um ponto fora dela.

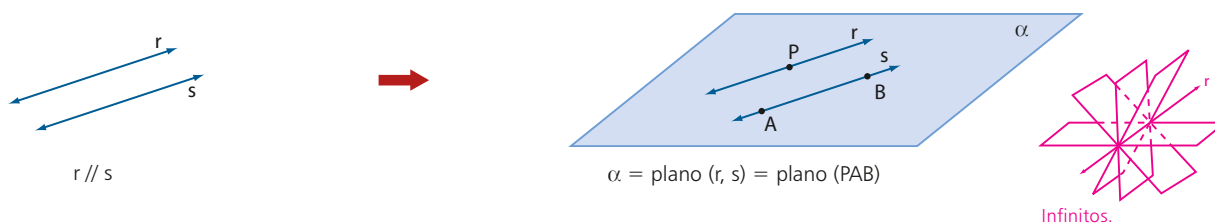
$P \notin r$

$\alpha$ = plano (r, P) = plano (PAB)

3º) [PROP] por meio de duas retas concorrentes.

$r \cap s = \{P\}$

$\alpha$ = plano (r, s) = plano (PAB)

4º) [PROP] por meio de duas retas paralelas e distintas.

$r // s$

$\alpha$ = plano (r, s) = plano (PAB)

No 1º modo, a unicidade do plano $\alpha$ é garantida pelo postulado da determinação. Já nos 2º, 3º e 4º modos, a unicidade é garantida pelo fato de que existe um único plano que passa pelos pontos **P**, **A** e **B** não colineares.

Infinitos.

**PENSE NISTO:**

Dada uma reta **r**, quantos são os planos que a contêm?

**EXEMPLO 1**

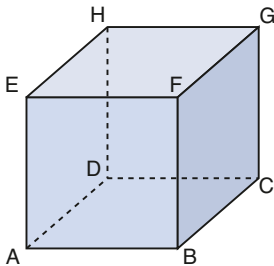
O sólido ABCDEFGH ao lado é um bloco retangular também chamado paralelepípedo retorretângulo.

Ele é formado por seis faces retangulares, congruentes duas a duas.

Vamos ilustrar os dois últimos modos de determinação de planos:

- as retas $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ são concorrentes em **A** e determinam o plano $\alpha$ que contém o retângulo ABCD. As retas $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são concorrentes em **C** e determinam o mesmo plano $\alpha$.
- as retas $\overline{CD}$ e $\overline{GH}$ são paralelas distintas e determinam o plano $\beta$, que contém o retângulo CDHG.

## EXERCÍCIOS

**1** Observe o cubo ABCDEFGH e reproduza-o em seu caderno.

Para cada item, pinte, em seu caderno, o plano determinado pelas retas:

**a)** $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BD}$

**b)** $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{EH}$

**c)** $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$

**d)** $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$

Sugestão: Veja como modelo o plano indicado no paralelepípedo da página 130.

**2** Quantos são os planos determinados por três retas distintas, duas a duas, paralelas entre si?

**3** Quantos são os planos determinados por quatro pontos dois a dois distintos?

**4** Quantos planos distintos são determinados por quatro retas distintas, duas a duas, concorrentes em pontos todos distintos?

**5** É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas para que fiquem firmes. Explique por que isso não acontece em uma mesa de 3 pernas.

# Posições relativas de dois planos

## Planos secantes

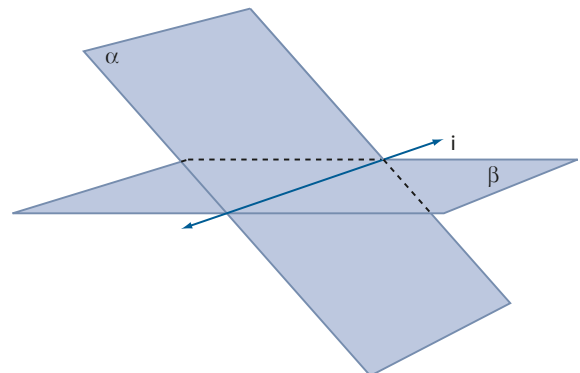
[DEF] Dois planos distintos que têm um ponto comum são chamados **planos secantes**.

## Postulado da interseção

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm pelo menos um outro ponto comum.

## Propriedade da interseção de planos

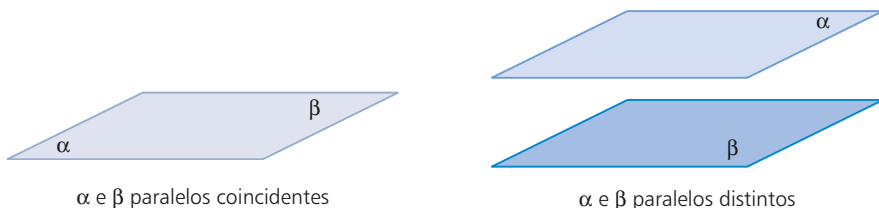
Se dois planos distintos têm um ponto comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto. [PROP] Essa reta é denominada **interseção** ou **traço** de um deles no outro.

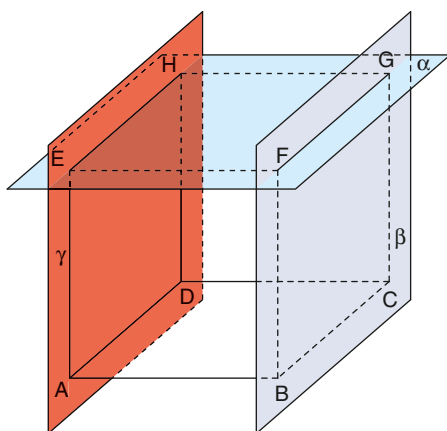
Veja a demonstração do teorema 1 na página 145.

$\alpha$ e $\beta$ secantes; $\alpha \cap \beta = i$; **i** é a interseção

## Planos paralelos

[DEF] Dois planos são **paralelos** se não têm ponto comum ou são coincidentes.

$\alpha$ e $\beta$ paralelos coincidentes

$\alpha$ e $\beta$ paralelos distintos

**EXEMPLO 2**

Observe, no cubo seguinte, os planos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, que contêm, respectivamente, as faces EFGH, BCGF e ADHE.

Temos que:

- $\beta$ e $\gamma$ são planos paralelos distintos;
- $\alpha$ e $\beta$ são planos secantes; $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{FG}$;
- $\alpha$ e $\gamma$ são planos secantes; $\alpha \cap \gamma = \overleftrightarrow{EH}$.

## EXERCÍCIOS

**6** Classifique as afirmações a seguir como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

**a)** Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm uma reta comum que passa pelo ponto.

**b)** Dois planos distintos que têm uma reta comum são secantes.

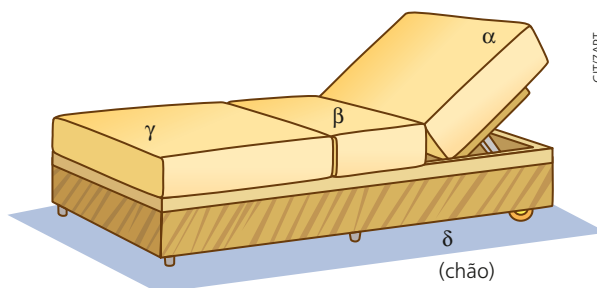
**c)** Se dois planos têm uma única reta comum, eles são secantes.

**d)** Dois planos secantes têm infinitos pontos comuns.

**e)** Dois planos distintos, paralelos a um terceiro, são paralelos entre si.

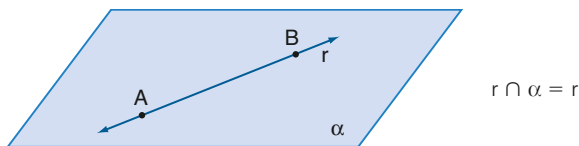
**7** Objetos do nosso dia a dia permitem imaginar planos secantes e planos paralelos. Na espreguiçadeira mostrada na figura:

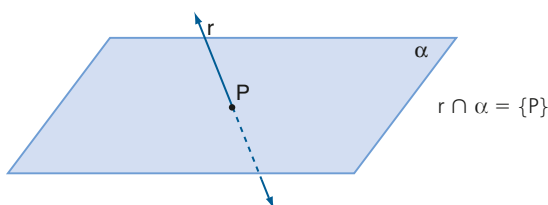
**a)** quais planos são secantes?

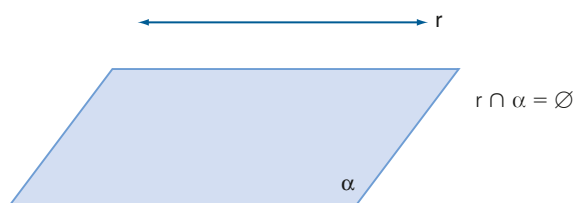
**b)** quais planos são paralelos?

CJT/ZAPT

# Posições relativas de uma reta e um plano

A posição de uma reta em relação a um plano depende exclusivamente do número de pontos que eles têm em comum. Podem ocorrer três situações:

- A reta e o plano têm em comum dois pontos distintos; nesse caso, conforme o postulado da inclusão, a reta está contida no plano.

Todos os pontos da reta **r** pertencem também ao plano α.

- [DEF] A reta e o plano têm em comum um único ponto; nesse caso, a reta e o plano são **secantes**.

O ponto **P** é aquele em que a reta **r** intersecta o plano α. Dizemos que **P** é o traço da reta **r** no plano α.

- [DEF] A reta e o plano não têm nenhum ponto comum; nesse caso, a reta e o plano são **paralelos**.

## Propriedades

[PROP] Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

Veja a demonstração do teorema 2, na página 146.

[PROP] Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

Veja a demonstração do teorema 3, nas páginas 146 e 147.

## EXERCÍCIOS

**8** Classifique as afirmações a seguir em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

**a)** Uma reta e um plano que têm um ponto comum são secantes.

**b)** Uma reta e um plano secantes têm um único ponto comum.

**c)** Uma reta e um plano paralelos não têm ponto comum.

**d)** Um plano e uma reta podem ter exatamente 2 pontos em comum.

**e)** Se uma reta está contida num plano, eles têm infinitos pontos em comum.

**9** Observe o cubo ao lado.

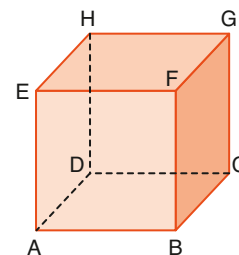
Determine a posição relativa entre:

**a)** a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano (CDG);

**b)** a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (CDG);

**c)** a reta $\overleftrightarrow{ED}$ e o plano (ABC);

**d)** o plano (ABC) e o plano (EHD);

**e)** o plano determinado pelas retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ e o plano determinado pelas retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.

**10** Observe a figura ao lado, que é a representação geométrica de uma cadeira apoiada sobre uma superfície plana no solo.

Usando elementos dessa figura, dê exemplos de:

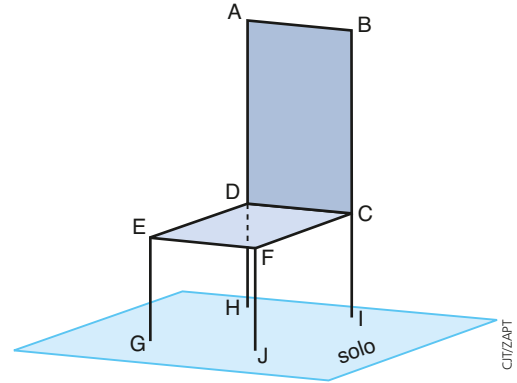
**a)** dois planos paralelos distintos.

**b)** dois planos secantes e sua interseção.

**c)** duas retas paralelas distintas.

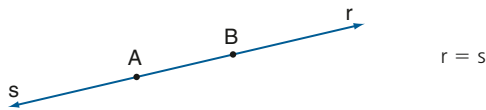
**d)** duas retas concorrentes e o plano por elas determinado.

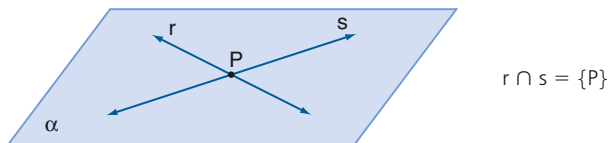
**e)** uma reta secante a um plano e o traço da reta no plano.

**f)** uma reta paralela a um plano.

## Posições relativas de duas retas

Vamos analisar as posições relativas de duas retas observando inicialmente se elas têm ou não ponto em comum. Podem ocorrer quatro situações:

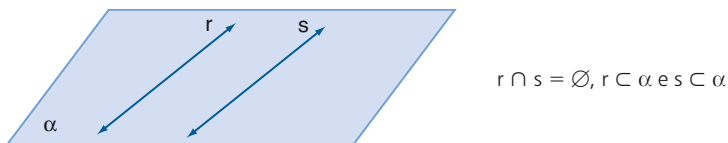
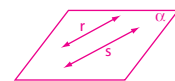
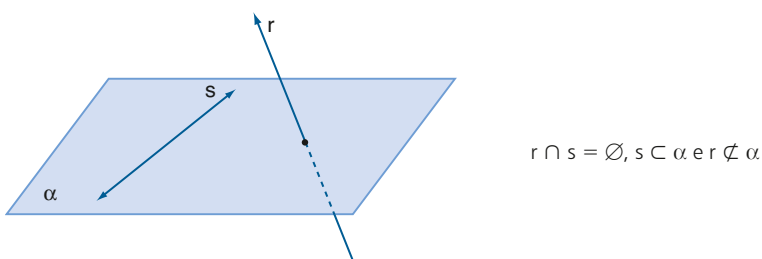
- As duas retas têm em comum dois pontos distintos; nesse caso, conforme o postulado da determinação, as retas são **coincidentes**.

$r = s$

- [DEF] As duas retas têm em comum um único ponto; nesse caso, elas são **concorrentes** e existe um único plano que as contém.

$r \cap s = \{P\}$

- [DEF] As duas retas não têm nenhum ponto em comum, mas existe um plano que as contém; nesse caso, elas são **paralelas**.

$r \cap s = \varnothing, r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha$

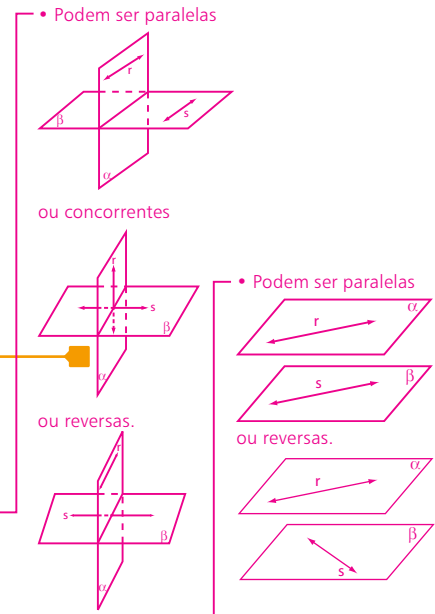
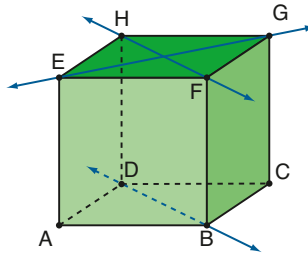
- [DEF] As duas retas não têm nenhum ponto em comum e não existe plano que as contenha; nesse caso, elas são **reversas**.

$r \cap s = \varnothing, s \subset \alpha \text{ e } r \not\subset \alpha$

Professor, o objetivo deste *Pense nisto* é levar o estudante a fazer a síntese:
Se estiverem em um mesmo plano, são paralelas.

Se não houver um plano que as contenha, são reversas, como as que contêm as arestas do cubo abaixo.

**PENSE NISTO:**

Qual é a posição relativa de duas retas **r** e **s** que não têm ponto comum?

**EXEMPLO 3**

No cubo ao lado, temos que:

- as retas $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são concorrentes;
- as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são paralelas;
- as retas $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são reversas;
- as retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são reversas;
- as retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são reversas.

**PENSE NISTO:**

- Se dois planos α e β são secantes e uma reta **r** está contida em α, qual é a posição relativa de **r** em relação a uma reta **s** contida em β?
- Se dois planos α e β são paralelos e uma reta **r** está contida em α, qual é a posição relativa de **r** em relação a uma reta **s** contida em β?

• Podem ser paralelas

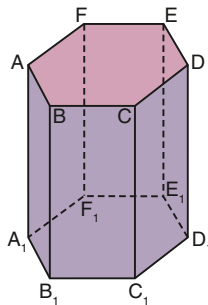
ou concorrentes

ou reversas.

• Podem ser paralelas

ou reversas.

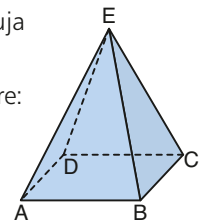
## EXERCÍCIOS

**11** A figura ao lado representa a superfície de um sólido chamado prisma hexagonal regular. Ela é constituída por dois hexágonos regulares ABCDEF e $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ congruentes, contidos em planos paralelos, e seis retângulos $A_1B_1BA$, $B_1C_1CB$, $C_1D_1DC$, $D_1E_1ED$, $E_1F_1FE$ e $A_1F_1FA$ congruentes entre si.

Analise a veracidade das afirmações seguintes, referentes a posições relativas de retas e planos, contendo os vértices desse prisma:

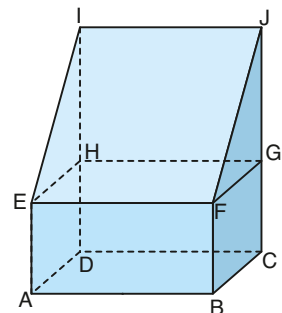
**a)** A reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta $\overleftrightarrow{D_1E_1}$ são paralelas.
**b)** A reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta $\overleftrightarrow{C_1D_1}$ são reversas.
**c)** O plano $(ABB_1)$ e o plano $(DEE_1)$ são paralelos.
**d)** O plano $(ABB_1)$ e o plano $(CDD_1)$ são paralelos.
**e)** A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela ao plano $(CDD_1)$.

**12** Classifique as afirmações a seguir em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

**a)** Duas retas ou são coincidentes ou são distintas.
**b)** Duas retas ou são coplanares ou são reversas.
**c)** Duas retas distintas determinam um plano.
**d)** Duas retas concorrentes têm um único ponto comum.
**e)** Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.
**f)** Duas retas concorrentes são coplanares.
**g)** Duas retas coplanares ou são paralelas ou são concorrentes.
**h)** Duas retas não coplanares são reversas.

**13** Observe a pirâmide ao lado, cuja base é um retângulo.

Determine a posição relativa entre:

**a)** as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$;
**b)** as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EC}$;
**c)** as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$;
**d)** a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano (BEC);
**e)** a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (BEC);
**f)** as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{EC}$.

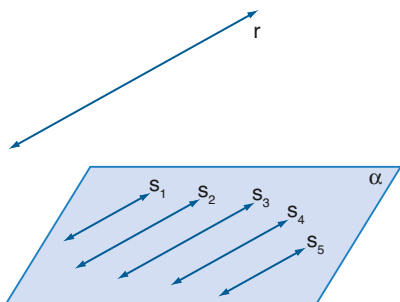
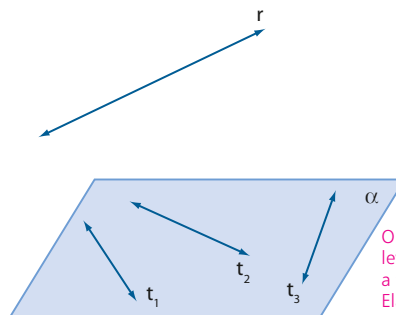
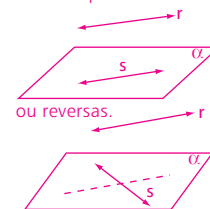
**14** Observe o sólido geométrico ao lado e os pontos assinalados.

Classifique em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações seguintes.

**a)** As retas $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{BG}$ são coplanares.
**b)** As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são coplanares.
**c)** As retas $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{FJ}$ são coplanares.
**d)** Os planos (FGJ) e (IEH) são paralelos distintos.
**e)** Os planos (ABE) e (EFJ) são paralelos distintos.
**f)** As retas $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são reversas.
**g)** As retas $\overleftrightarrow{EI}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são reversas.

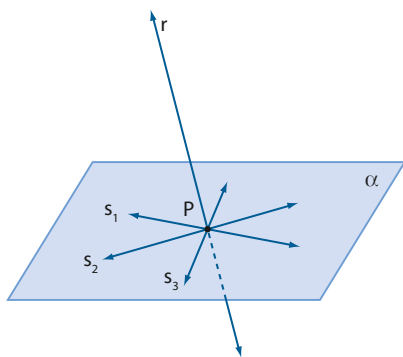
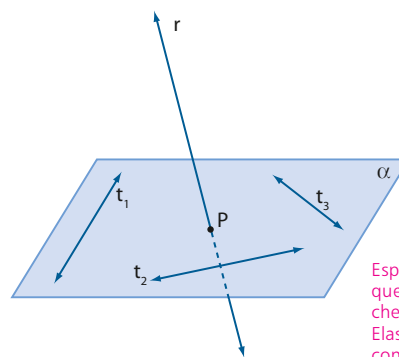
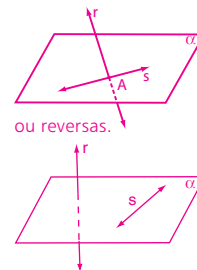
## Algumas propriedades

Essas propriedades podem ajudar o estudante a compreender os conceitos que estão sendo apresentados.

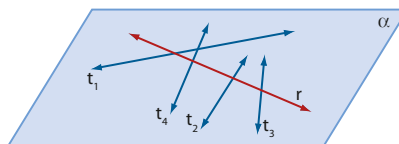
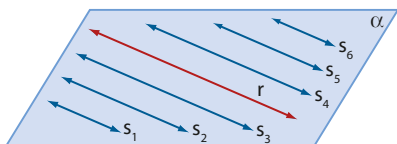
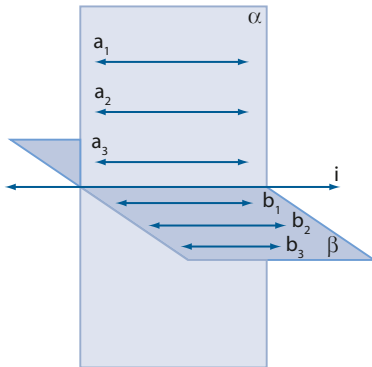
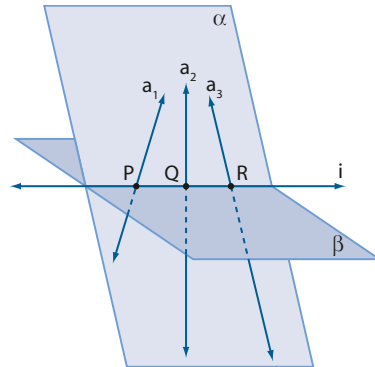
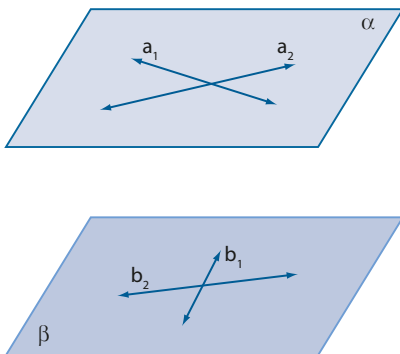
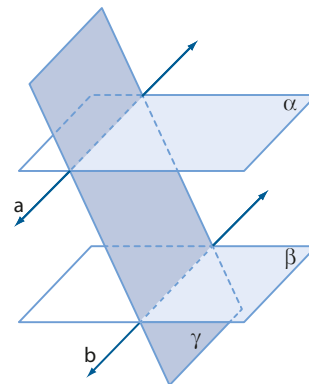
Vamos enunciar algumas propriedades referentes a retas e planos, as quais são consequências das definições que acabamos de ver.

- 1ª propriedade: Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a infinitas retas do plano [PROP].

- 2ª propriedade: Se uma reta é paralela a um plano, então ela é reversa com infinitas retas do plano [PROP].

O objetivo é levar o estudante a fazer a síntese: Elas são paralelas ou reversas.

**PENSE NISTO:**

Se uma reta **r** é paralela a um plano α, qual é a posição relativa de **r** em relação a uma reta **s** contida em α?

- 3ª propriedade: Se uma reta é secante com um plano, então ela é concorrente com infinitas retas do plano [PROP].

- 4ª propriedade: Se uma reta é secante com um plano, então ela é reversa com infinitas retas do plano [PROP].

Espera-se que o estudante chegue à síntese: Elas são concorrentes ou reversas.

**PENSE NISTO:**

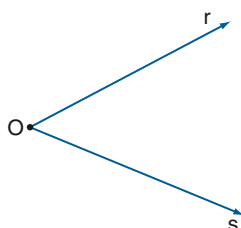
Se uma reta **r** é secante com um plano α, qual é a posição de **r** em relação a uma reta **s** contida em α?

- 5ª propriedade: Se uma reta está contida num plano, então ela é paralela ou concorrente com infinitas retas do plano [PROP].

- 6ª propriedade: Se dois planos α e β são secantes, sendo **i** a interseção deles, então existem infinitas retas de um que são paralelas ao outro (retas paralelas a **i**) [PROP].

- 7ª propriedade: Se dois planos α e β são secantes, sendo **i** a interseção deles, então existem infinitas retas de um que são secantes ao outro (retas concorrentes com **i**) [PROP].

- 8ª propriedade: Se dois planos são paralelos e distintos, então toda reta de um deles é paralela ao outro [PROP].

- 9ª propriedade: Se um plano intersecta dois planos paralelos, então as interseções são retas paralelas [PROP].

**PENSE NISTO:**

Se dois planos são paralelos e distintos entre si, toda reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro?

Não, pode ser também reversa.

## Ângulos de duas retas

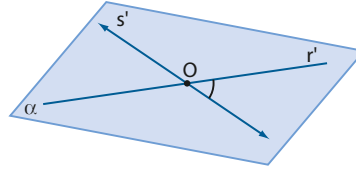
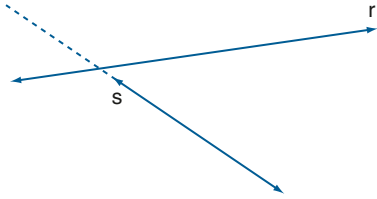
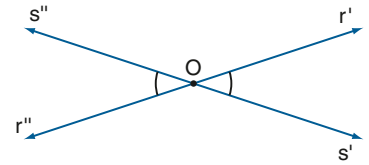
Já vimos, em anos anteriores, que duas semirretas distintas de mesma origem formam um ângulo.

semirretas: $\overrightarrow{Or}$ e $\overrightarrow{Os}$
ângulo: $r\hat{O}s$

Sejam **r** e **s** duas retas concorrentes em **O**. O ponto **O** divide **r** em duas semirretas ($\overrightarrow{Or'}$ e $\overrightarrow{Or''}$) e divide **s** em duas semirretas ($\overrightarrow{Os'}$ e $\overrightarrow{Os''}$).

Nesse caso, são formados quatro ângulos: r'Ôs', r'Ôs'', r''Ôs' e r''Ôs''. Podemos provar que os ângulos r'Ôs' e r''Ôs'', ditos opostos pelo vértice, são congruentes.

Também são congruentes os ângulos r'Ôs'' e r''Ôs', opostos pelo vértice.

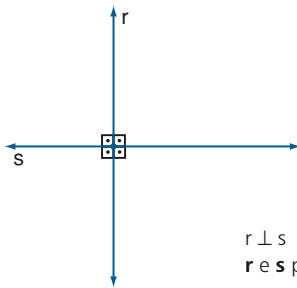
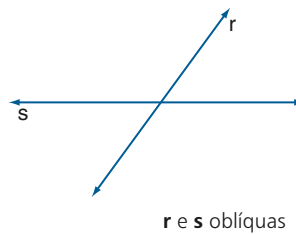
Chama-se **ângulo das retas concorrentes r e s** qualquer um desses quatro ângulos [DEF].

Sejam duas retas **r** e **s** reversas. Tomemos um ponto **O** qualquer e consideremos as retas **r**' paralela a **r** e **s**' paralela a **s**, ambas passando por **O**:

Como **r**' e **s**' são concorrentes em **O**, o ângulo r'Ôs' é chamado **ângulo formado pelas retas r e s reversas**, em que r'//r e s'//s [DEF].

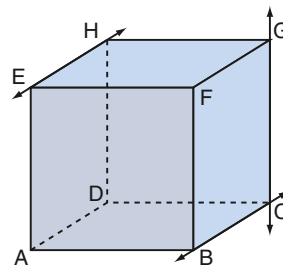
## Retas que formam ângulo reto

Vimos que duas retas concorrentes formam quatro ângulos. Quando esses quatro ângulos são congruentes, cada um deles é chamado **ângulo reto** e as retas são chamadas **retas perpendiculares** [DEF].

Se duas retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que elas são **oblíquas** [DEF].

Se duas retas são reversas e formam ângulo reto, as retas são chamadas **ortogonais** [DEF].

$r \perp s$
**r** e **s** perpendiculares

**r** e **s** oblíquas

**EXEMPLO 4**

Consideremos o cubo ABCDEFGH. As retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{GC}$ são concorrentes em **G** e formam ângulo reto; logo, são perpendiculares. As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GC}$ são reversas e formam ângulo reto; logo, são ortogonais.

$\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GC}$ $\quad\perp$ (lê-se: é perpendicular a)

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{GC}$ $\quad\perp$ (lê-se: é ortogonal a)

**PENSE NISTO:**

Indique um par de retas concorrentes não perpendiculares (oblíquas) e um par de retas reversas não ortogonais no cubo ao lado.

Possível resposta: • $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são concorrentes não perpendiculares • $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{AE}$ são reversas não ortogonais

## EXERCÍCIOS

**15** Classifique as afirmações a seguir como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

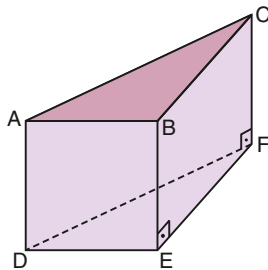
**a)** Duas retas perpendiculares são sempre concorrentes.

**b)** Se duas retas formam ângulo reto, então elas são perpendiculares.

**c)** Duas retas que formam ângulo reto podem ser reversas.

**d)** Duas retas perpendiculares a uma terceira são perpendiculares entre si.

**e)** Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.

**16** A figura abaixo representa um sólido chamado prisma reto de base triangular.

Ele é formado por dois triângulos congruentes e três retângulos.

Classifique cada uma das afirmações seguintes como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**). As retas:

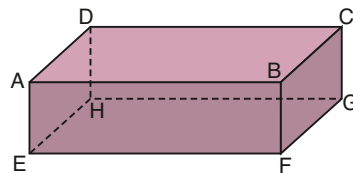
**a)** $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são reversas.

**b)** $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{FC}$ são concorrentes.

**c)** $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ são coplanares.

**d)** $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são paralelas.

**e)** $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ são ortogonais.

**17** Observe o paralelepípedo retângulo seguinte. Use duas retas determinadas pelos vértices desse paralelepípedo para justificar, em cada caso, que a sentença dada é falsa.

**a)** Duas retas que estão contidas num plano são paralelas.

**b)** Duas retas coplanares são concorrentes.

**c)** Se duas retas são ortogonais, toda paralela a uma delas é perpendicular à outra.

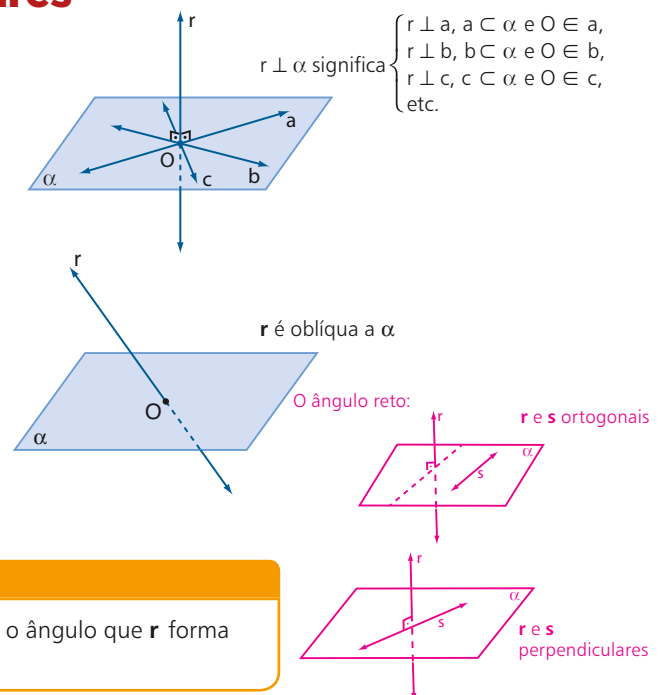
**d)** Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.

## Reta e plano perpendiculares

Se uma reta é secante com um plano num ponto **O** e é perpendicular a todas as retas do plano que passam por **O**, diz-se que a reta é **perpendicular ao plano** [DEF].

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano [PROP].

Veja a demonstração do teorema 4, nas páginas 147 e 148.

Se uma reta e um plano são secantes e a reta não é perpendicular ao plano, diz-se que a reta é **oblíqua** ao plano [DEF].

**PENSE NISTO:**

Se uma reta **r** é perpendicular a um plano α, qual é o ângulo que **r** forma com uma reta **s** contida em α?

## EXERCÍCIOS

**18** Classifique cada uma das afirmações seguintes como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

**a)** Para que uma reta e um plano sejam perpendiculares é necessário que eles sejam secantes.

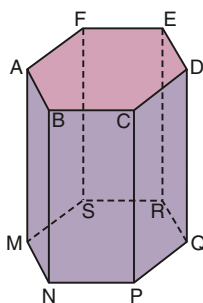
**b)** Uma reta perpendicular a um plano forma ângulo reto com qualquer reta do plano.

**c)** Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

**d)** Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas e distintas de um plano, então ela está contida no plano.

**e)** Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.

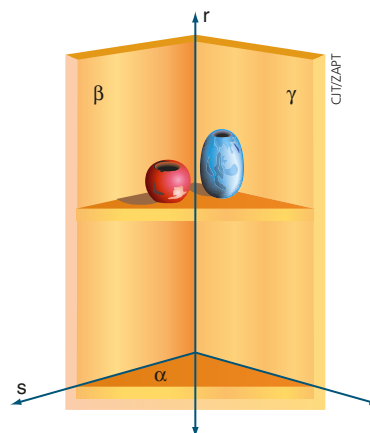
**f)** Uma reta e um plano são perpendiculares. Toda reta perpendicular à reta dada é paralela ao plano ou está contida nele.

**19** A figura ao lado representa um sólido chamado prisma hexagonal regular. Suas bases são hexágonos regulares e suas faces laterais são retângulos. Considerando apenas as retas que contêm suas arestas e os planos que contêm suas faces, responda às questões seguintes.

**a)** A reta $\overleftrightarrow{AM}$ é perpendicular a quais planos?

**b)** Quais são as retas perpendiculares ao plano (AEC)?

**c)** O plano (CDQ) é paralelo a quais planos?

**d)** O plano (BCP) é secante com quais planos?

**20** A figura abaixo mostra uma cantoneira instalada na parede. Na figura, a reta **r** é perpendicular ao plano α. Com base nas retas e nos planos assinalados, responda:

Elementos sem proporção entre si.

**a)** Qual é a interseção de β com γ?

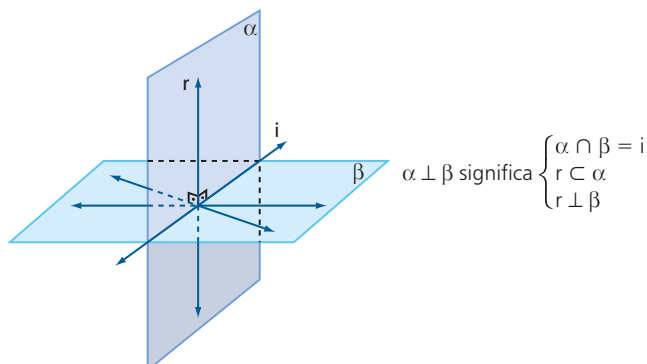
**b)** Qual é a interseção de α com β?

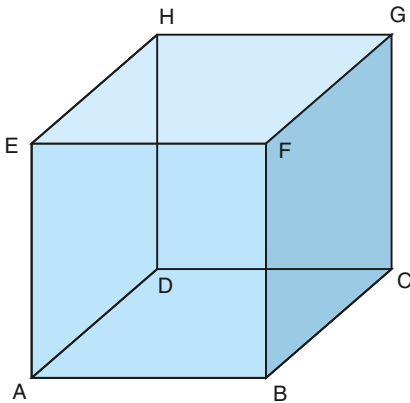
**c)** Qual é a interseção de α com γ?

**d)** Quanto medem os ângulos $\widehat{rs}$ e $\widehat{rt}$?

## Planos perpendiculares

Se dois planos são secantes e um deles contém uma reta perpendicular ao outro, diz-se que os planos são **perpendiculares** [DEF].

$$\alpha \perp \beta \text{ significa } \begin{cases} \alpha \cap \beta = i \\ r \subset \alpha \\ r \perp \beta \end{cases}$$

EXEMPLO 5

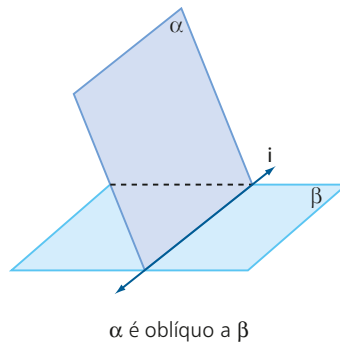
Observe o cubo ABCDEFGH:

Os planos (ABC) e (ADE) são secantes (sua interseção é $\overleftrightarrow{AD}$), $\overleftrightarrow{AE}$ é perpendicular ao plano (ABC) e $\overleftrightarrow{AE}$ está contida no plano (ADE). Assim, os planos (ABC) e (ADE) são perpendiculares.

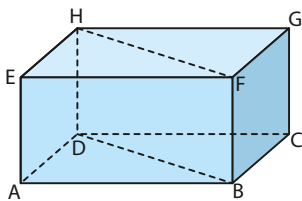
**PENSE NISTO:**

Que outros planos (determinados pelas faces do cubo) são perpendiculares ao plano (ABC)?

(BCF), (CDG) e (ABE).

Se dois planos são secantes e não são perpendiculares, diz-se que eles são **oblíquos**.

α é oblíquo a β

## EXERCÍCIOS

**21** Observe abaixo o paralelepípedo retorretângulo ABCDEFGH.

**a)** $\overleftrightarrow{FG}$ é perpendicular ao plano (ABE)? Qual é o traço dessa reta nesse plano? Quais planos, determinados pelas faces do cubo, contêm $\overleftrightarrow{FG}$ e são perpendiculares ao plano (ABE)?

**b)** Os planos (ABC) e (CDG) são perpendiculares? Qual é o traço de um deles no outro?

**c)** O plano (BDF) é perpendicular ao plano (ABC)? Explique. Qual é o traço de um deles no outro?

**22** Classifique as afirmações a seguir como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

**a)** Se dois planos são secantes, então eles são perpendiculares.

**b)** Se dois planos são perpendiculares, então eles são secantes.

**c)** Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.

**d)** Se uma reta é perpendicular a um plano, por ela passa um único plano, perpendicular ao plano dado.

**e)** Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.

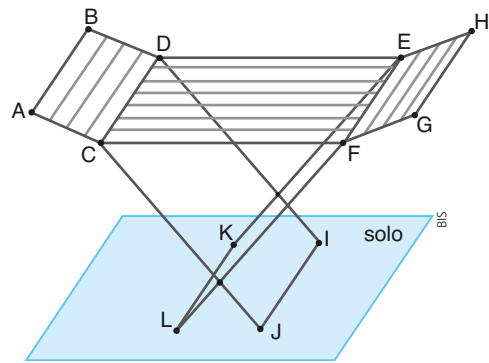
**f)** Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são paralelos.

**g)** Se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

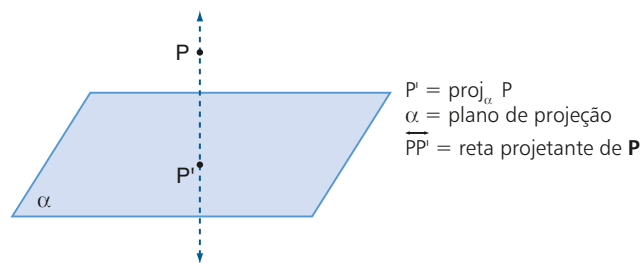
**23** O projeto de varal de chão, mostrado na figura ao lado, permite-nos imaginar retas e planos.

**a)** Quais planos, determinados por 3 pontos não colineares entre os assinalados, são oblíquos ao plano (CDE)?

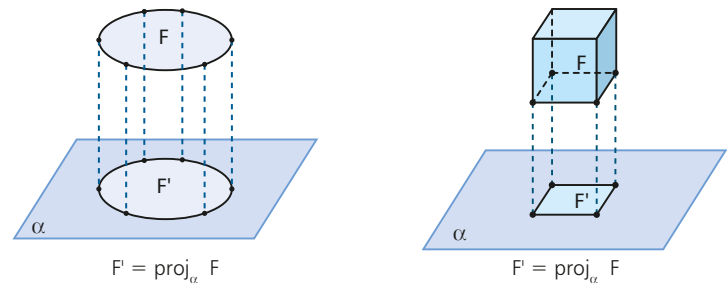
**b)** Os planos (KLE) e (EFG) são secantes? Qual é o traço de um deles no outro? Esses planos são perpendiculares ou oblíquos?

**c)** Os planos (ABC) e (EFG) são paralelos ou secantes?

## Projeções ortogonais

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é o ponto de interseção entre a reta perpendicular ao plano conduzida pelo ponto e o plano [DEF].

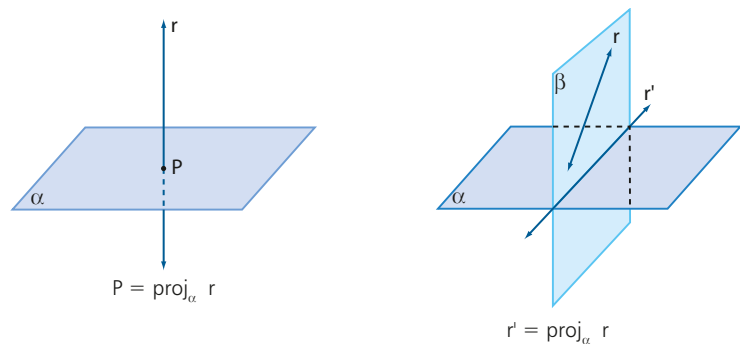
P' = $proj_{\alpha}$ P
α = plano de projeção
$\overleftrightarrow{PP'}$ = reta projetante de **P**

Projeção ortogonal de uma figura plana, ou não plana, sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da figura sobre esse plano [DEF].

F' = $proj_{\alpha}$ F

F' = $proj_{\alpha}$ F

A projeção ortogonal de uma reta **r** sobre um plano α é assim definida:

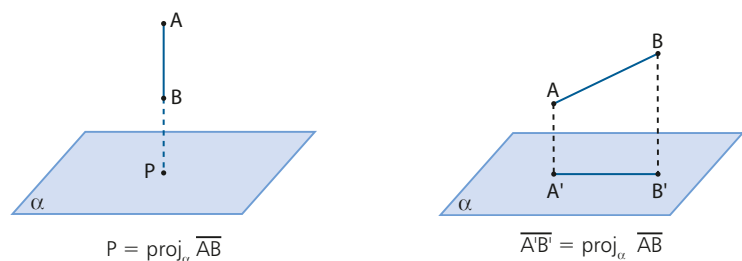
- Se **r** é perpendicular a α, a projeção de **r** sobre α é o ponto **P** em que **r** intersecta α [DEF].
- Se **r** não é perpendicular a α, a projeção de **r** sobre α é a reta **r**', interseção de α com o plano β, perpendicular a α conduzido por **r** [DEF].

P = $proj_{\alpha}$ r

r' = $proj_{\alpha}$ r

A projeção ortogonal de um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre um plano α é assim definida:

- Se $\overline{AB}$ é perpendicular a α, a projeção de $\overline{AB}$ sobre α é o ponto **P** em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intersecta α [DEF].
- Se $\overline{AB}$ não é perpendicular a α, a projeção de $\overline{AB}$ sobre α é o segmento $\overline{A'B'}$ tal que **A**' e **B**' são, respectivamente, as projeções de **A** e **B** sobre α [DEF].

P = $proj_{\alpha}$ $\overline{AB}$

$\overline{A'B'}$ = $proj_{\alpha}$ $\overline{AB}$

## EXERCÍCIOS

**24** Classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das afirmações seguintes.

**a)** A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é um ponto.

**b)** A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é uma reta.

**c)** A projeção ortogonal de um segmento sobre um plano é um segmento.

**d)** A projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano, sobre o plano, tem medida menor que a medida do segmento.

**e)** Se dois segmentos são congruentes, então suas projeções ortogonais sobre qualquer plano são congruentes.

**f)** Projetando-se ortogonalmente um triângulo sobre um plano podemos obter um segmento de reta.

**g)** A projeção ortogonal de um cilindro sobre um plano é um círculo.

**25** Classifique as afirmações a seguir como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

**a)** Se as projeções ortogonais de duas retas sobre um plano são paralelas, então as retas são paralelas.

**b)** Duas retas paralelas não perpendiculares ao plano de projeção têm projeções paralelas.

**c)** A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser uma semirreta.

**d)** A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser um segmento de reta.

**e)** A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser uma reta.

## Distâncias

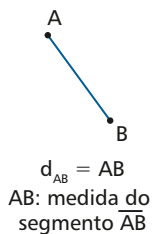
A distância entre dois pontos **A** e **B** pode ser assim definida:

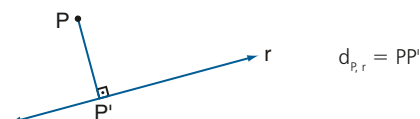
- Se **A** e **B** coincidem, a distância entre eles é nula.

A = B

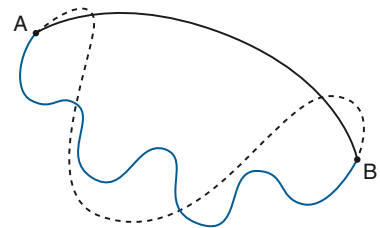
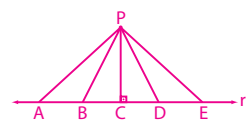
$d_{AB} = 0$

- Se **A** e **B** são distintos, a distância entre eles é a medida do segmento de reta $\overline{AB}$.

$d_{AB} = AB$
AB: medida do segmento $\overline{AB}$

A distância de um ponto **P** a uma reta **r** é a distância de **P** a **P'**, em que **P'** é a interseção entre a reta perpendicular a **r**, conduzida por **P**, e a reta **r**. [DEF].

$d_{P,\,r} = PP'$

O menor comprimento a ser percorrido entre dois pontos distintos quaisquer é o percurso definido pelo segmento de reta que os une. Nesse caso, o segmento de reta $\overline{AB}$ é o caminho procurado.

**PENSE NISTO:**

Qual é o caminho de menor comprimento para ir do ponto **A** ao ponto **B**?

A menor distância é igual à medida do segmento $\overline{PC}$, em que **C** é o pé da perpendicular a **r** traçada por **P**.

**PENSE NISTO:**

Se um ponto **P** não pertence a uma reta **r**, qual é a menor distância entre **P** e um ponto qualquer de **r**?

r

A distância entre duas retas **r** e **s** paralelas é a distância de um ponto **P** qualquer de uma delas até a outra [DEF].

A figura abaixo mostra que a distância entre **r** e **s** foi obtida tomando-se um ponto **P** em **r** e traçando-se $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a **s**, com **P'** em **s** (**P'** é o ponto de interseção entre a reta perpendicular a **s** conduzida por **P** e a reta **s**).

$d_{r,\,s} = d_{P,\,s} = PP'$

A distância de um ponto **P** a um plano α é a distância de **P** a **P'**, em que **P'** é o ponto de interseção entre a reta perpendicular a α, conduzida por **P** e o plano α [DEF].

$d_{P,\,\alpha} = d_{PP'} = PP'$

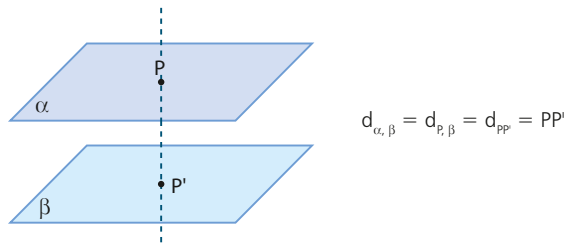
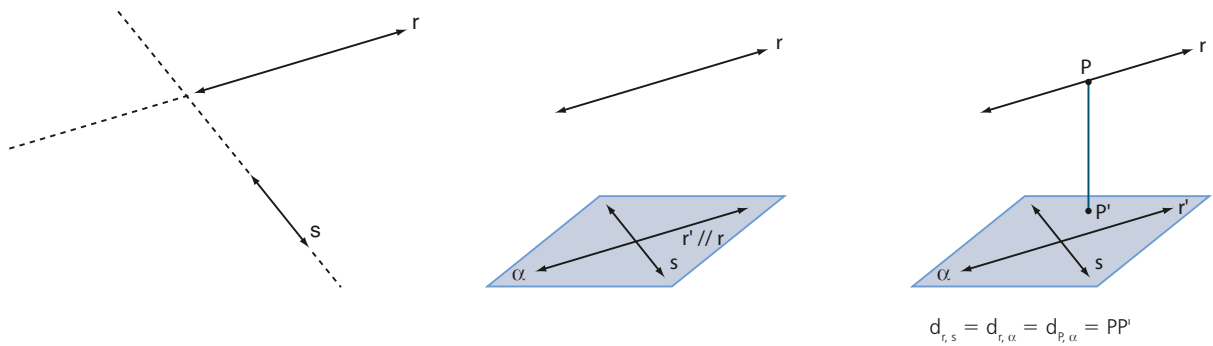
A distância entre uma reta **r** e um plano α, sendo **r** contida em α ou **r** paralela a α, é a distância de um ponto **P** qualquer de **r** ao plano α [DEF].

A figura abaixo mostra que a distância entre **r** e α foi obtida tomando-se um ponto **P** em **r** e traçando-se $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a α, com **P'** em α (**P'** é o ponto de interseção entre a reta perpendicular a α conduzida por **P** e o plano α).

$d_{r,\,\alpha} = d_{P,\,\alpha} = d_{PP'} = PP'$

A distância entre dois planos $\alpha$ e $\beta$ paralelos é a distância de um ponto **P** qualquer de um deles ao outro plano [DEF].

A figura abaixo mostra que a distância entre $\alpha$ e $\beta$ foi obtida tomando-se um ponto **P** qualquer em $\alpha$ e traçando-se $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a $\beta$, com **P'** em $\beta$.

$d_{\alpha,\beta} = d_{P,\beta} = d_{PP'} = PP'$

A distância entre duas retas reversas **r** e **s** é a distância de um ponto qualquer **P** da reta **r** ao plano $\alpha$ que contém **s** e é paralelo à reta **r** [DEF].

## EXERCÍCIO

FAÇA NO CADERNO

**26** Observe o bloco retangular representado abaixo com as medidas indicadas.

Determine a distância:

**a)** entre os pontos **C** e **G**;

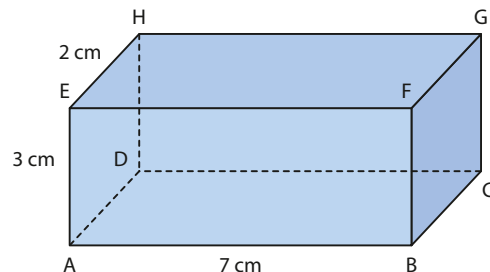
**b)** do ponto **E** à reta $\overleftrightarrow{FG}$;

**c)** do ponto **A** ao plano (CDG);

**d)** do plano (ADE) ao plano (BCF);

**e)** do ponto **E** ao plano (ABC);

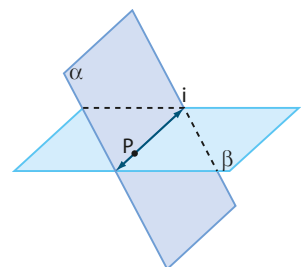
**f)** entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$;

**g)** entre as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CF}$.

# Teoremas fundamentais

## Teorema 1

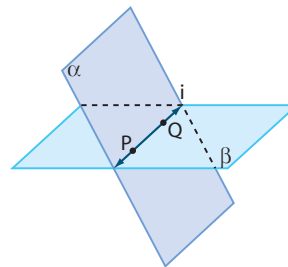
Se dois planos distintos têm um ponto comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.

Hipóteses:
1. $\alpha \neq \beta$ (o plano $\alpha$ é distinto do plano $\beta$).
2. $P \in \alpha$ (o ponto **P** pertence a $\alpha$).
3. $P \in \beta$ (o ponto **P** pertence a $\beta$).

Tese: $\exists i \mid i = \alpha \cap \beta$ e $P \in i$ (existe uma única reta **i** que é a interseção de $\alpha$ com $\beta$, e **P** pertence a **i**).

**Demonstração**:

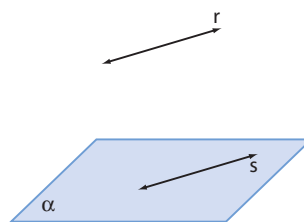
I. Se $\alpha$ e $\beta$ são distintos e têm um ponto comum **P**, existe outro ponto **Q** que também pertence a $\alpha$ e a $\beta$ (veja o postulado da interseção na página 131).

II. Chamando de **i** a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, temos que **i** está contida em $\alpha$ (pois $P \in \alpha$ e $Q \in \alpha$) e **i** também está contida em $\beta$ (pois $P \in \beta$ e $Q \in \beta$).
Para provarmos que **i** é a interseção de $\alpha$ e $\beta$, devemos provar que todos os pontos que estão em $\alpha$ e em $\beta$ estão em **i**.

III. Vamos supor, por absurdo, que exista um ponto **X** tal que $X \in \alpha$, $X \in \beta$ e $X \notin i$. Então os planos $\alpha$ e $\beta$ teriam em comum o ponto **X** e a reta **i** e, desse modo, deveriam coincidir, o que é absurdo, pois contraria a hipótese (1).
A contradição vem do fato de admitirmos que $X \notin i$. Assim, **X** deve pertencer à reta **i** e, portanto, **i** é a interseção de $\alpha$ e $\beta$.

## Teorema 2

Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

Hipóteses:
- (1) $r \not\subset \alpha$ (a reta **r** não está contida em $\alpha$).
- (2) $r // s$ (a reta **r** é paralela à reta **s**).
- (3) $s \subset \alpha$ (a reta **s** está contida no plano $\alpha$).

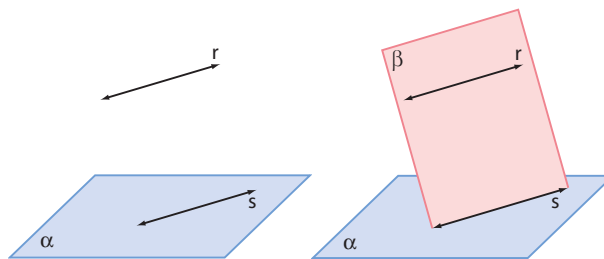
Tese: $r // \alpha$ (a reta **r** é paralela ao plano $\alpha$).

**Demonstração**:

I. Como as retas **r** e **s** são paralelas distintas, elas determinam um plano $\beta$.

II. Como $s \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, com $\alpha$ e $\beta$ distintos, então $s = \alpha \cap \beta$.

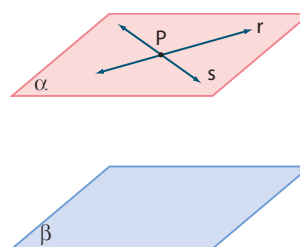
III. Vamos supor, por absurdo, que **r** e $\alpha$ tivessem um ponto **P** em comum:

$$P \in r \text{ e } r \subset \beta \text{ (item I)} \Rightarrow P \in \beta$$

Como **P** pertence a $\alpha$ e a $\beta$, então **P** pertence à interseção de $\alpha$ com $\beta$, que é a reta **s**.
Daí, as retas **r** e **s** teriam em comum o ponto **P**, o que é absurdo, pois contraria a hipótese (2). A contradição vem do fato de supormos que **r** e $\alpha$ têm o ponto **P** em comum. Logo, **r** e $\alpha$ não podem ter ponto comum, ou seja, **r** é paralela a $\alpha$.

## Teorema 3

Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a outro plano, então esses planos são paralelos.

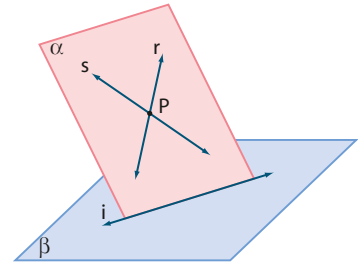
Hipóteses:
- (1) $r \subset \alpha$ (a reta **r** está contida no plano $\alpha$).
- (2) $s \subset \alpha$ (a reta **s** está contida no plano $\alpha$).
- (3) $r \cap s = \{P\}$ (**r** e **s** são concorrentes no ponto **P**).
- (4) $r // \beta$ (**r** é paralela ao plano $\beta$).
- (5) $s // \beta$ (**s** é paralela ao plano $\beta$).

Tese: $\alpha // \beta$ (o plano $\alpha$ é paralelo ao plano $\beta$).

**Demonstração**:

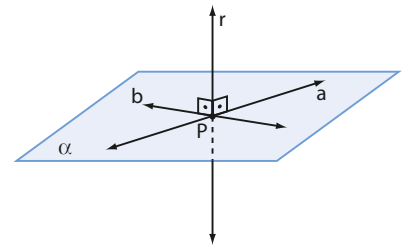
I. Os planos $\alpha$ e $\beta$ são distintos, pois $\alpha$ contém retas paralelas a $\beta$.

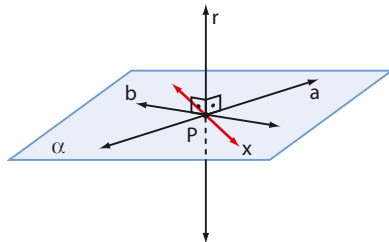
II. Vamos supor, por absurdo, que $\alpha$ e $\beta$ sejam secantes, isto é, que exista uma reta **i** tal que $\alpha \cap \beta = i$.

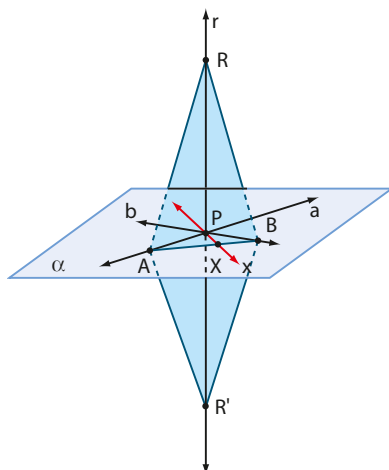
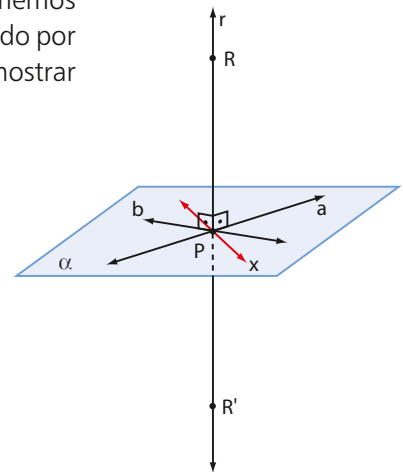
- $r \,//\, \beta$, $r \subset \alpha$, $i = \alpha \cap \beta \Rightarrow r \,//\, i$
- $s \,//\, \beta$, $s \subset \alpha$, $i = \alpha \cap \beta \Rightarrow s \,//\, i$

Assim, as retas **r** e **s** passariam por **P** e ambas seriam paralelas a **i**, o que é absurdo, pois contraria o postulado das paralelas de Euclides. A contradição veio do fato de admitirmos que $\alpha$ e $\beta$ são secantes. Logo, $\alpha$ e $\beta$ não podem ser secantes, e devemos ter $\alpha \,//\, \beta$.

## Teorema 4

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Hipóteses:
1. $r \perp a$ (a reta **r** é perpendicular à reta **a**).
2. $r \perp b$ (a reta **r** é perpendicular à reta **b**).
3. $a \subset \alpha$ (a reta **a** está contida no plano $\alpha$).
4. $b \subset \alpha$ (a reta **b** está contida no plano $\alpha$).
5. $a \cap b = \{P\}$ (as retas **a** e **b** são concorrentes em **P**).

Tese: $r \perp \alpha$ (a reta **r** é perpendicular ao plano $\alpha$).

**Demonstração:**

I. Devemos mostrar que **r** é perpendicular a todas as retas de $\alpha$ que passam por **P**. Para isso, tomemos no plano $\alpha$ uma reta **x** passando por **P** e distinta de **a** e **b**. Vamos mostrar que **r** é perpendicular a **x**.

II. Tomemos na reta **r** dois pontos **R** e **R'** simétricos em relação ao ponto **P**. Teremos, portanto, $\overline{PR} \equiv \overline{PR'}$.

III. Tomemos agora um ponto **A** na reta **a** e um ponto **B** na reta **b**, com $A \neq P$ e $B \neq P$, de tal forma que $\overline{AB}$ intersecte a reta **x** num ponto **X**.

IV. Temos:

- **a** é mediatriz de $\overline{RR'}$; então, $\overline{RA} \equiv \overline{R'A}$.
- **b** é mediatriz de $\overline{RR'}$; então, $\overline{RB} \equiv \overline{R'B}$.

V. Comparando os triângulos RAB e R'AB, encontramos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{RA} \equiv \overline{R'A}\\ \overline{RB} \equiv \overline{R'B}\\ \overline{AB} \text{ é comum}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle RAB \equiv \triangle R'AB \text{ (critério LLL) e, daí, } R\hat{A}X \equiv R'\hat{A}X.$$

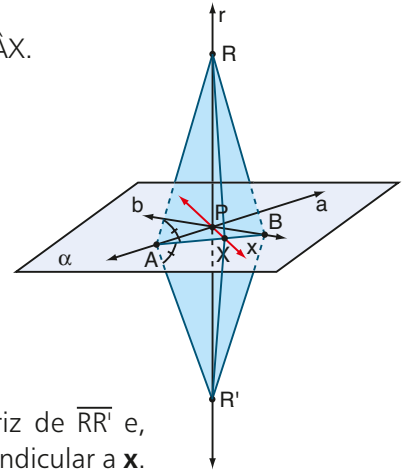
VI. Comparando os triângulos RAX e R'AX, encontramos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{RA} \equiv \overline{R'A}\\ R\hat{A}X \equiv R'\hat{A}X\\ \overline{AX} \text{ é comum}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle RAX \equiv \triangle R'AX \text{ (critério LAL)}$$

e, daí, $\overline{RX} \equiv \overline{R'X}$.

Temos:

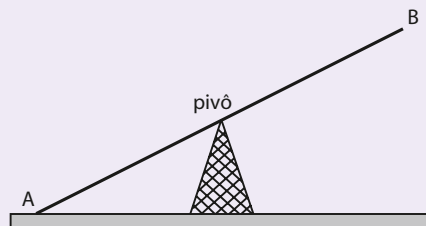
- **X** equidista de **R** e **R'**
- $X \in x$
- **x** passa por **P** (ponto médio de $\overline{RR'}$)

$\Rightarrow$ A reta **x** é a mediatriz de $\overline{RR'}$ e, assim, $r = \overleftrightarrow{RR'}$ é perpendicular a **x**.

Assim, mostramos que a reta **r** é perpendicular à reta **x**, qualquer que seja **x** contida em $\alpha$ e passando por **P**.

Conclusão: a reta **r** é perpendicular ao plano $\alpha$.

## DESAFIO

(Enem-MEC) Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos **A** e **B** são equidistantes do pivô:

A projeção ortogonal da trajetória dos pontos **A** e **B**, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

**a)** A B

**b)** A B

**c)**

**d)**

**e)** A B

# CAPÍTULO 8 Poliedros

## Introdução

As inúmeras obras de engenharia, arquitetura, artes plásticas etc. mostram a imensa quantidade de formas que podem ser relacionadas com figuras estudadas na Geometria.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

MASP, Museu de Arte de São Paulo. Obra da arquiteta Lina Bo Bardi, construída em 1968.

ROMAN SLAVIK/THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Pirâmide de vidro no Museu do Louvre, em Paris, França, construída em 1988.

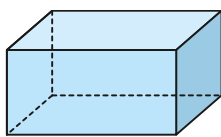
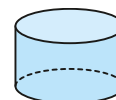
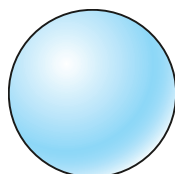
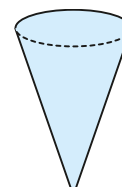
THINKSTOCK/GETTY IMAGES

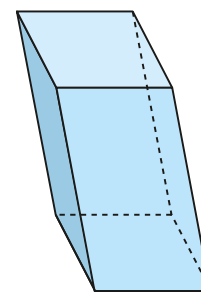
Catedral Nacional em Brasília. Obra do arquiteto Oscar Niemeyer, construída em 1960.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Palácio Taj Mahal, em Agra, Índia, construído no século XVII.

Muitas formas reais encontradas em objetos do cotidiano, embalagens de produtos, construções, entre outros, lembram **sólidos geométricos**, os quais são figuras tridimensionais idealizadas pela Geometria.

Veja algumas fotos de objetos que constituem formas reais. Ao lado de cada uma está desenhada a figura correspondente ao sólido geométrico mais próximo da forma real.

PEDRO SALAVERRÍA/EASY FOTOSTOCK/AGB PHOTO

Porta da Europa em Madri, Espanha, 2015.

prisma oblíquo quadrangular

No nosso dia a dia, encontramos também uma grande variedade de formas reais tridimensionais que são mais complexas e que, de modo geral, não estão associadas aos sólidos geométricos mais "comuns". Observe as imagens.

FILIZ76/THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Hotel Burj Al Arab em Dubai, Emirados Árabes, 2015.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

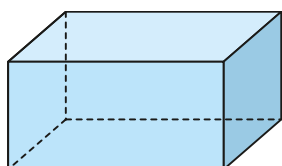
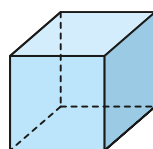
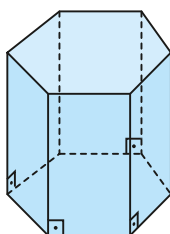
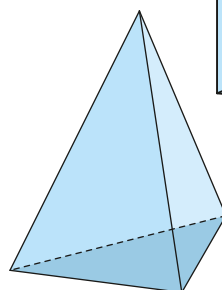
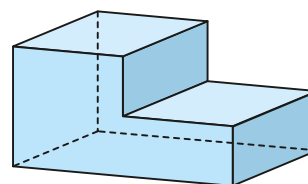
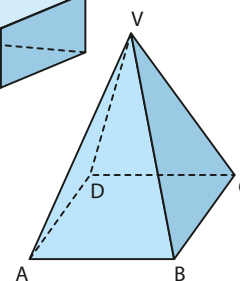
suporte para fita adesiva

SHUTTERSTOCK

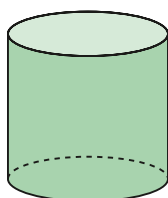
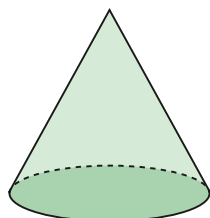
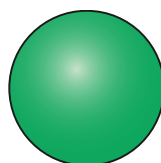
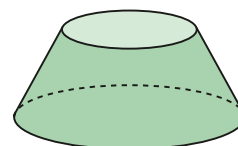
vaso decorativo

Quando examinamos as formas tridimensionais idealizadas pela Geometria, estamos observando sólidos geométricos.

Os sólidos geométricos mais simples podem ser de dois tipos:

- **Poliedros**: são sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos etc.). A palavra *poliedro* vem do grego antigo, em que *poli* significa "vários", e *edro*, "face". Veja alguns exemplos de poliedros:

Em um poliedro podemos distinguir:

- **faces**: são os polígonos que formam a superfície do poliedro. Observe, por exemplo, que o prisma hexagonal apresenta 8 faces: 2 hexágonos e 6 quadriláteros (retângulos).
- **arestas**: são os lados dos polígonos que constituem as faces do poliedro. Cada aresta é um segmento de reta determinado pela interseção de duas faces. Observe, por exemplo, que a pirâmide triangular possui 6 arestas.
- **vértices**: são as extremidades das arestas. Cada vértice é a interseção de duas ou mais arestas. Observe, por exemplo, que, na pirâmide quadrangular na página anterior, os 5 vértices são: **A**, **B**, **C**, **D**, **V**. No vértice **A** concorrem 3 arestas e o vértice **V** é o "ponto de encontro" de 4 arestas.

- **Corpos redondos**: são sólidos geométricos cujas superfícies têm ao menos uma parte que é arredondada (não plana). Veja os exemplos:

cilindro

cone

esfera

tronco de cone de bases paralelas

Faremos um estudo dos principais poliedros neste capítulo. Já os principais corpos redondos serão estudados no capítulo 9.

## Prisma

Observe ao lado alguns objetos encontrados em nosso cotidiano. Cada um deles apresenta características comuns, tais como:

- suas superfícies são constituídas de polígonos;
- tem pelo menos dois polígonos congruentes contidos em planos paralelos;
- os outros polígonos são paralelogramos.

Sólidos com essas características são chamados **prismas**.

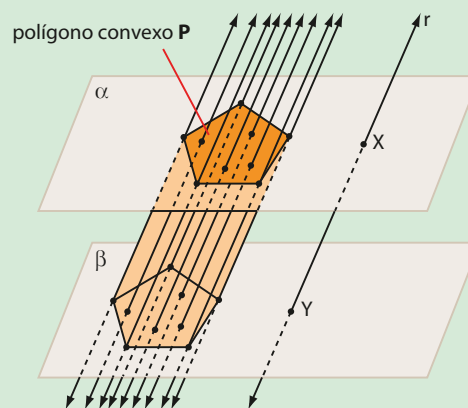
FOTOS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

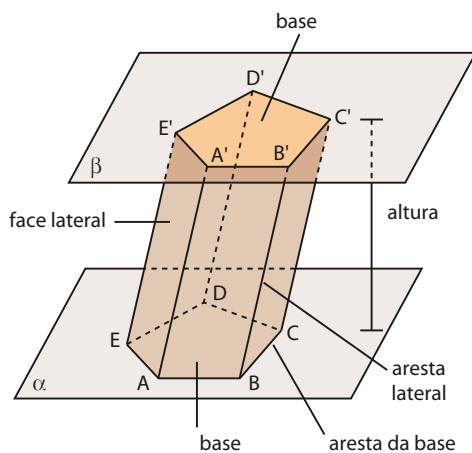
Diversos objetos comuns em nosso dia a dia lembram prismas.

Consideremos dois planos $\alpha$ e $\beta$, distintos e paralelos entre si, um polígono convexo **P**, contido em $\alpha$, e uma reta **r** que intersecta $\alpha$ e $\beta$ nos pontos **X** e **Y**, respectivamente.

Por todos os pontos de **P**, tracemos retas paralelas a **r**, conforme mostrado na figura ao lado.

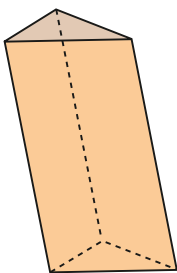
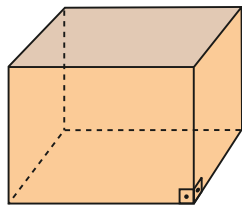
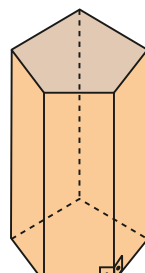
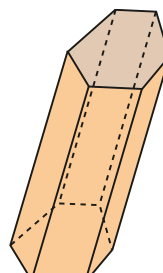
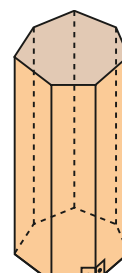
Observe que os pontos de interseção dessas retas com $\alpha$ e $\beta$ determinam segmentos congruentes ao segmento $\overline{XY}$.

A reunião de todos os segmentos assim obtidos é um sólido chamado **prisma**.

## Elementos e classificação

Considerando o prisma representado na figura abaixo, temos:

- os polígonos ABCDE e A'B'C'D'E', chamados **bases** do prisma, são congruentes e estão contidos em planos paralelos entre si (α e β);
- os paralelogramos AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E e EE'A'A são chamados **faces laterais**;
- os lados dos polígonos das bases $(\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'E'}$ e $\overline{E'A'})$ são as **arestas das bases**;
- os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$ são as **arestas laterais**;
- a distância entre os planos α e β, que contêm as bases, é a **altura** do prisma.

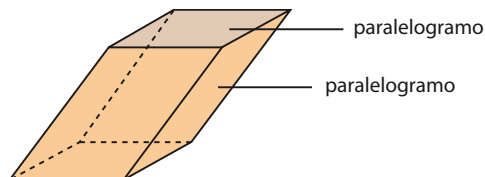
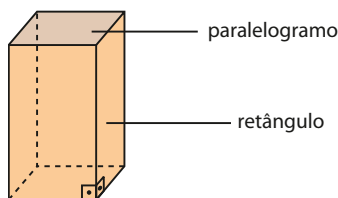
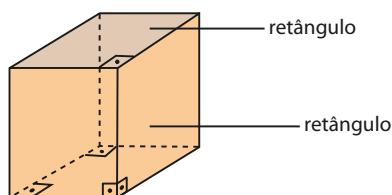
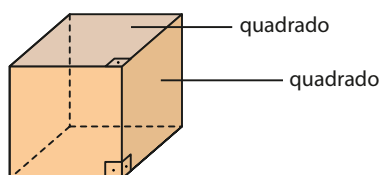
Quanto ao número de lados de cada polígono da base, os prismas são classificados em: triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme o polígono da base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc.

Quanto à inclinação das arestas laterais em relação aos planos das bases, os prismas são classificados em:
- **prisma oblíquo**: se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases;
- **prisma reto**: se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Observe que, nesse caso, as faces laterais são retângulos.

Exemplos:

prisma oblíquo triangular (A base é um triângulo.) | prisma reto quadrangular (A base é um quadrilátero.) | prisma reto pentagonal (A base é um pentágono.) | prisma oblíquo hexagonal (A base é um hexágono.) | prisma reto heptagonal (A base é um heptágono.)

**OBSERVAÇÃO**

Se as bases de um prisma reto são polígonos regulares, ele é chamado **prisma regular**.

## Paralelepípedo

Todo prisma cujas bases são paralelogramos é chamado **paralelepípedo**.
Sua superfície total é a reunião de seis paralelogramos.

- **Paralelepípedo reto**: é um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).

- **Paralelepípedo retângulo** ou **retorretângulo**: é um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de seis retângulos.

- **Cubo**: é um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de seis quadrados. Note que o cubo é um paralelepípedo retângulo em que todas as arestas são congruentes.

### Paralelepípedo retângulo

Considere que o *container* mostrado na imagem tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são: 8 m de comprimento, 4,5 m de largura e 3 m de altura.

Suponha que Onofre, dono de uma empresa que aluga *container*, contrate uma pessoa para pintar toda a superfície externa do *container* da foto ao lado. Considerando que essa pessoa cobra R$ 4,50 para pintar uma superfície de 1 m$^2$, que quantia Onofre terá de desembolsar para pagar pelo serviço contratado?

ONIONASTUDIO/ALAMY/FOTOARENA

## Cálculo da área total

A figura 1 representa um paralelepípedo retângulo, em que **a** e **b** são as medidas dos lados do retângulo da base, e **c**, a medida da altura. A figura 2 representa a planificação da superfície desse paralelepípedo.

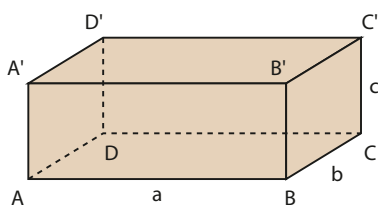



figura 1

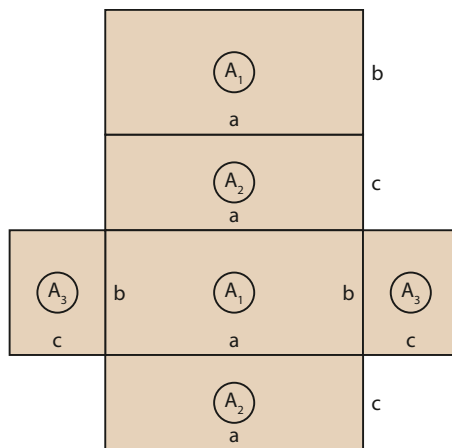



figura 2

Essa planificação mostra que a superfície do paralelepípedo é a reunião de seis retângulos, congruentes dois a dois. Assim, a sua área total $\mathbf{A_t}$ é igual à soma das áreas desses seis retângulos, ou seja:

$$A_t = 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 \Rightarrow \boxed{A_t = 2ab + 2ac + 2bc}$$

**EXEMPLO 1**

Vamos resolver o problema proposto na página anterior, ou seja, vamos calcular a quantia que Onofre deverá pagar à pessoa contratada para pintar toda a superfície externa do *container*.

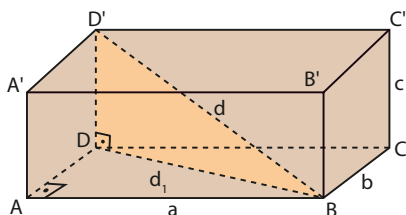
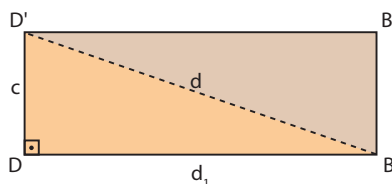
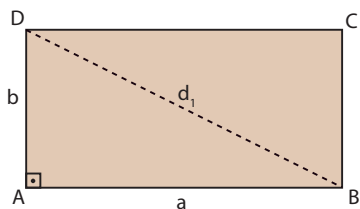
Como a base do *container* tem 8 m de comprimento por 4,5 m de largura e sua altura mede 3 m, então a área da superfície a ser pintada é igual à soma das áreas de seis retângulos, ou seja, $A = 2ab + 2ac + 2bc$, em que $a = 8$ m, $b = 4,5$ m e $c = 3$ m.

Assim, a área, em metros quadrados, é:

$A = 2(8 \cdot 4,5) + 2(8 \cdot 3) + 2(4,5 \cdot 3) \Rightarrow A = 147$

Como o pintor cobra R$ 4,50 por metro quadrado pintado, então, pelos 147 m$^2$ de área a ser pintada, ele deverá cobrar de Onofre a quantia de 147 · R$ 4,50 = R$ 661,50.

## Cálculo da medida da diagonal

No paralelepípedo da figura a seguir, sejam **d** a medida da diagonal do paralelepípedo e $\mathbf{d_1}$ a medida da diagonal da base.

Observe que os triângulos BAD e D'DB são retângulos:

ABCDA'B'C'D': paralelepípedo retângulo $\Rightarrow \overline{D'D} \perp$ plano (ABC) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{D'D}$ é perpendicular a qualquer reta, do plano (ABC), que contém **D** (ponto de interseção entre a reta D'D e o plano (ABC).
Logo: $\overline{D'D} \perp \overline{DB} \Rightarrow \triangle D'DB$ é retângulo.

Assim, temos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{No } \triangle BAD\text{: } d_1^2 = a^2 + b^2 \\ \text{No } \triangle D'DB\text{: } d^2 = d_1^2 + c^2\end{array}\right\} \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Logo: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Por que o triângulo D'DB é retângulo?

## Cálculo do volume

O **volume de um sólido** é a medida da região do espaço limitada por sua superfície.

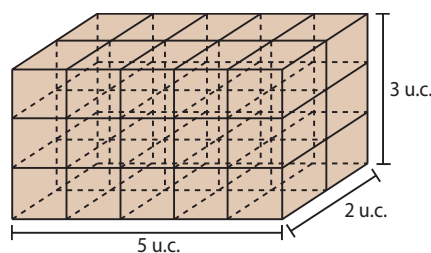
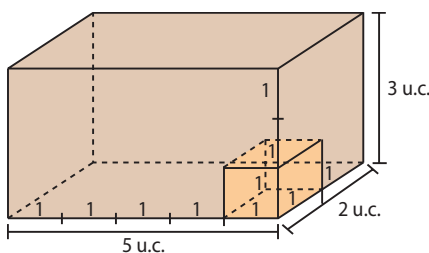
Para expressar o volume de um sólido por meio de um número, devemos estabelecer uma unidade padrão: a unidade de volume é o cubo cuja aresta mede 1 u.c. (unidade de medida de comprimento). Para cada unidade de medida de comprimento, temos uma correspondente unidade de volume, como mostrado na tabela a seguir:

| Unidade de medida da aresta do cubo | Unidade de volume |
|---|---|
| 1 dm | 1 $dm^3$ |
| 1 cm | 1 $cm^3$ |
| 1 m | 1 $m^3$ |
| 1 mm | 1 $mm^3$ |

De modo geral:

unidade de medida da aresta = 1 u.c. e unidade de volume = 1 $(u.c.)^3$

Consideremos um paralelepípedo retângulo com as seguintes dimensões: a = 5 u.c., b = 2 u.c. e c = 3 u.c.

A divisão do comprimento, da largura e da altura desse paralelepípedo em cinco unidades, duas unidades e três unidades, respectivamente, nos permite obter 30 cubos unitários ($5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$), conforme mostrado nas figuras abaixo:

Dizemos, então, que o volume desse paralelepípedo é:

$$V = (5 \text{ u.c.}) \cdot (2 \text{ u.c.}) \cdot (3 \text{ u.c.}) = 30 \text{ (u.c.)}^3$$

De modo geral, se as medidas das três dimensões de um paralelepípedo retângulo são os números inteiros **a**, **b** e **c**, seu volume é dado por:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Professor, nas Orientações Didáticas deste manual é apresentada a demonstração no caso em que as medidas das arestas do paralelepípedo retângulo são números racionais (não inteiros) positivos. Se achar pertinente, leve-a para a sala de aula. É uma boa oportunidade para ampliar a discussão e a reflexão.

Na figura 1 da página 154, como $a \cdot b$ é a área da base (**A**$_b$) e **c** é a medida **h** da altura, temos:

$$V = (a \cdot b) \cdot c \Rightarrow V = A_b \cdot h$$

**OBSERVAÇÃO**

O que apresentamos é um caso particular da obtenção da fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo, em que as medidas de suas arestas são números inteiros (positivos). Pode-se mostrar que essa fórmula é válida para paralelepípedos retângulos nos quais as medidas das arestas são expressas por quaisquer números reais positivos.

**EXEMPLO 2**

Vamos calcular o volume do *container* de Onofre (ver página 153), lembrando que ele tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são: 8 m de comprimento, 4,5 m de largura e 3 m de altura.

Considerando a = 8 m, b = 4,5 m e c = 3 m, temos:

$$V = a \cdot b \cdot c = 8 \cdot 4{,}5 \cdot 3 \Rightarrow V = 108$$

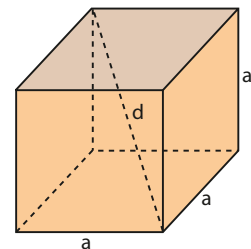
Logo, o volume do *container* de Onofre é 108 m$^3$.

## Cubo

O cubo é um paralelepípedo retângulo cujas seis faces são quadrados congruentes. Assim, suas 12 arestas são congruentes entre si.

Como já sabemos, as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um paralelepípedo retângulo são: $A = 2ab + 2ac + 2bc$, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e $V = a \cdot b \cdot c$, respectivamente.

Considerando $b = c = a$ em cada uma dessas fórmulas, obtêm-se as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um cubo de aresta de medida **a**:

- Área **A**: $A = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a \Rightarrow A = 6a^2$
- Diagonal **d**: $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{3}$
- Volume **V**: $V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow V = a^3$

**OBSERVAÇÃO**

A unidade de medida de volume do Sistema Internacional de Unidades (SI) é o metro cúbico. Apesar de não fazer parte do SI, a unidade litro é reconhecida como unidade de medida por esse sistema de medidas e definida como o volume de um cubo cuja aresta mede 1 decímetro, ou seja, 1 L = 1 dm$^3$.

**PENSE NISTO:**

Em quantos cubos de aresta 1 cm pode ser decomposto um cubo de aresta 1 m?

Como a aresta do cubo mede 1 m = 100 cm, então cada aresta pode ser dividida em 100 partes de 1 cm cada, gerando $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$ de cubos de aresta 1 cm.

**EXEMPLO 3**

No exemplo anterior, determinamos o volume do *container* de Onofre: 108 m$^3$.

Agora, vamos determinar o maior número de caixas que podem ser transportadas nesse *container*, considerando que todas têm a forma de um cubo cuja aresta mede 50 cm e que a massa total das caixas não excede a tonelagem máxima que pode ser transportada no *container*.

Como cada dimensão do *container* é divisível por 50 cm, temos:

Se cada aresta da caixa mede 50 cm, o volume ocupado por uma única caixa é:

$$V_1 = (50 \text{ cm}) \cdot (50 \text{ cm}) \cdot (50 \text{ cm}) = 125\,000 \text{ cm}^3 = 0{,}125 \text{ m}^3$$

Se **x** é o número de caixas que podem ser transportadas, então devemos ter: $x \cdot V_1 \leqslant 108$ m$^3$. Logo:

$$x \cdot 0{,}125 \leqslant 108 \Rightarrow x \leqslant 864 \quad (*)$$

O maior número de caixas que podem ser transportadas no *container* é o maior número inteiro **x** que satisfaz a sentença (*), ou seja, 864.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**1** Em um aquário, um tanque para peixes tem a forma de um paralelepípedo retângulo de base quadrada, e a água em seu interior ocupa $\frac{3}{5}$ da sua capacidade. Considerando que esse tanque tem 3 m de altura e a aresta da base mede 4,5 m, determine quantos litros de água faltam para que ele fique totalmente cheio.

LOURENS SMAK/ALAMY/FOTOARENA

**Solução:**

Primeiramente, calculemos o volume **V**, em $m^3$, do tanque:

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = (4,5)^2 \cdot 3 \Rightarrow V = 60,75$

Como a água existente no tanque ocupa $\frac{3}{5} \cdot V$, então a água a ser colocada no tanque, para enchê-lo totalmente, deverá ocupar um volume $\mathbf{V_a}$, em $m^3$, tal que:

$$V_a = V - \frac{3}{5} \cdot V = \frac{2}{5} \cdot V \Rightarrow V_a = \frac{2}{5} \cdot 60,75 \Rightarrow V_a = 24,30$$

Lembrando que $1\ m^3 = 1\,000\ dm^3$ e $1\ L = 1\ dm^3$, então:

$$V_a = 24,30\ m^3 = 24,30 \cdot 1\,000\ dm^3 = 24\,300\ dm^3 = 24\,300\ L$$

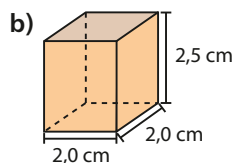
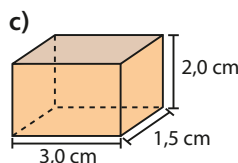
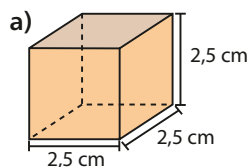
Logo, são necessários 24 300 litros de água para terminar de encher o tanque do aquário.

## EXERCÍCIOS

**1** Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de cada um dos paralelepípedos retângulos representados abaixo:

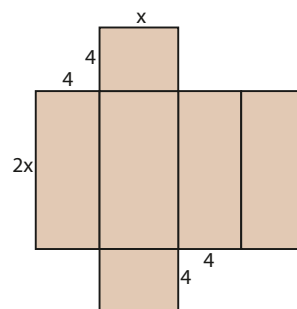
**a)**

**c)**

**b)**

**2** Determine o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que a medida de sua diagonal é $3\sqrt{10}$ dm e duas de suas dimensões medem 4 dm e 7 dm.

**3** Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de um cubo cuja soma das medidas das arestas é igual a 48 cm.

**4** Calcule a área total e o volume de um cubo cuja diagonal de uma face mede 1,2 m.

**5** A figura mostra a planificação da superfície de um paralelepípedo retângulo no qual a unidade das dimensões indicadas é o centímetro. Determine:

**a)** **x**, sabendo que a área total do paralelepípedo é igual a 364 $cm^2$;

**b)** o volume do paralelepípedo para x = 4 cm;

**c)** a medida da diagonal do paralelepípedo para x = 6 cm.

**6** Uma caixa tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujo volume é igual a 192 $cm^3$. Se as áreas de duas de suas faces são iguais a 32 $cm^2$ e 24 $cm^2$, determine a área total desse paralelepípedo.

**7** Priscila usou massa de modelar para construir um paralelepípedo retângulo cujas dimensões eram 20 cm × 30 cm × 45 cm. Em seguida, ela desmanchou o paralelepípedo que havia construído e aproveitou toda a massa usada na sua construção para modelar um cubo de **x** centímetros de aresta. Com base nessas informações, determine:

**a)** **x**;

**b)** a medida da diagonal do cubo;

**c)** a razão entre a área total do paralelepípedo e a área total do cubo.

**8** O que ocorre com a área total e com o volume de um cubo quando a medida da aresta:

**a)** dobra?

**b)** é reduzida a $\frac{1}{3}$ de seu valor?

**c)** é reduzida à metade de seu valor?

**d)** é multiplicada por um número positivo **k**?

**9** Fausto tem em sua casa um reservatório de água com a forma de um prisma reto de base quadrada, no qual a aresta da base e a altura medem, respectivamente, x dm e 8 dm. Se ele pretende reformar tal reservatório, aumentando em 20% as medidas das suas arestas e da sua altura, a fim de que o novo reservatório tenha capacidade para 3 110,4 litros de água, qual deverá ser o valor de **x**?

**10** Pretende-se construir um reservatório de água em forma de um paralelepípedo retângulo que tem 4 m de altura e cujo perímetro da base é igual a 40 m. Determine o comprimento e a largura desse reservatório para que ele tenha capacidade para 384 000 litros.

**11** Um reservatório de água ($\mathbf{R_1}$) tem a forma de um paralelepípedo retângulo, com as seguintes dimensões: 2 m de altura, 4 m de largura e 6 m de comprimento. Pretende-se construir outro reservatório ($\mathbf{R_2}$), com a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são diretamente proporcionais às respectivas dimensões de $\mathbf{R_1}$. Nessas condições, se $\mathbf{R_2}$ tiver 15 m de comprimento,

**a)** qual será a área total de sua superfície?

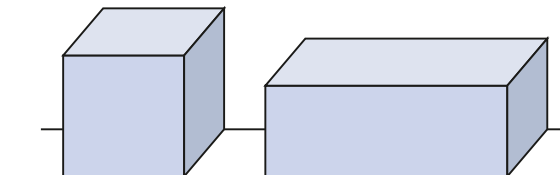
**b)** que porcentagem de acréscimo sofrerá o volume de $\mathbf{R_1}$?

**12** Seja um paralelepípedo retângulo cuja área total é igual a 846 $cm^2$ e tal que as medidas das arestas, em centímetros, são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 3. Para esse paralelepípedo, determine:

**a)** a medida da diagonal, em centímetros;

**b)** o volume, em centímetros cúbicos.

**13** Um comerciante comprou 20 blocos de doce de abóbora, cada qual com a forma de um paralelepípedo retângulo de base 12 cm × 21 cm e altura medindo $\frac{1}{11}$ do perímetro da base. O comerciante dividiu cada bloco em cubinhos de 3 cm de aresta e colocou-os à venda por R$ 0,80 a unidade. Se ele pagou ao fornecedor R$ 15,00 por bloco, qual será o seu lucro na venda de todos os cubinhos obtidos dos 20 blocos?

**14** (Unifesp-SP) Um cubo de aresta de comprimento **a** vai ser transformado num paralelepípedo retorretângulo de altura 25% menor, preservando-se, porém, o seu volume e o comprimento de uma de suas arestas, como é mostrado na figura.

A diferença entre a área total (a soma das áreas das seis faces) do novo sólido e a área total do sólido original será:

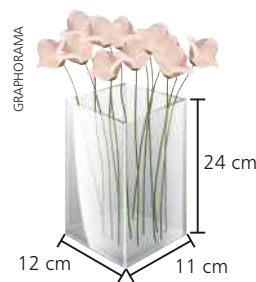
**a)** $\frac{1}{6}a^2$

**b)** $\frac{1}{3}a^2$

**c)** $\frac{1}{2}a^2$

**d)** $\frac{2}{3}a^2$

**e)** $\frac{5}{6}a^2$

**15** O vaso mostrado na figura foi feito com placas de vidro, cada uma com 0,5 cm de espessura. Considerando que ele tem a forma de paralelepípedo retângulo com as dimensões externas indicadas, determine:

**a)** a capacidade desse vaso em litros;

**b)** o volume do vidro utilizado na sua confecção.

Aplicações

# O volume do cubo e a função linear

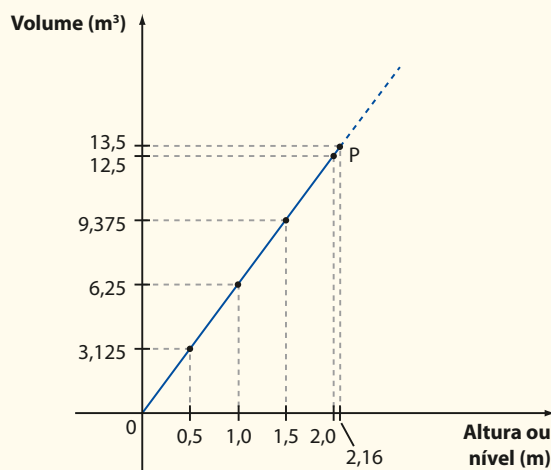
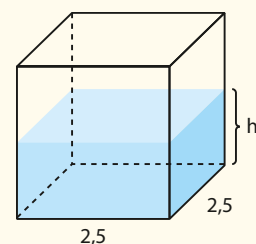
Para ajudar no abastecimento de água de uma região castigada pela estiagem, a prefeitura de uma cidade abastece diariamente, com 13 500 litros (ou 13,5 $m^3$) de água, um pequeno e distante povoado. Essa quantidade de água é retirada de um caminhão-pipa e despejada, por meio de uma bomba, em um reservatório cúbico vazio, com 2,5 m de aresta. No processo de transferência da água, um funcionário utiliza apenas uma trena graduada para verificar a altura que a água atinge no reservatório e, dessa forma, ele consegue saber o volume de água transferido pela bomba sem que haja desperdício de água. Como isso é possível?

O volume de água (em metros cúbicos) despejado no reservatório varia de acordo com o nível atingido pela água, em metros.

- Para um certo nível $\mathbf{h_1}$, o volume de água é dado por $V_1 = A_b \cdot h_1 = (2,5)^2 \cdot h_1$.
- Para um outro nível $\mathbf{h_2}$, o volume de água é dado por $V_2 = (2,5)^2 \cdot h_2$, e assim por diante.

Enfim, para cada nível **h** que a água atinge, o volume transferido é:

$$V = (2,5)^2 \cdot h$$

Como a área de base ($2,5^2 = 6,25$) é constante, a razão $\frac{V}{h}$ é constante (e igual a 6,25) e, desse modo, as grandezas "volume de água transferido" e "nível da água" são **diretamente proporcionais** e a relação entre essas grandezas é dada por: $\frac{V}{h} = 6,25 \Rightarrow V = 6,25 \cdot h$, com **V** em $m^3$ e **h** em m. Trata-se da **função linear** $y = 6,25 \cdot x$, cujo gráfico está abaixo representado:

Assim, para que o volume transferido seja de 13 500 L = 13,5 $m^3$, devemos ter:
$13,5 = 6,25 \cdot x \Rightarrow x = 2,16$ (veja o ponto **P**).

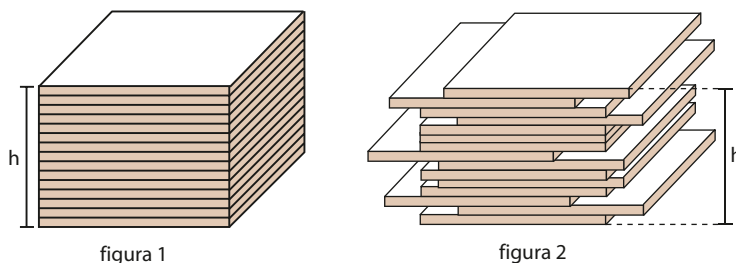
Em resumo, o funcionário deve fazer medições sucessivas com a trena até que o nível de água atinja a altura de 2,16 m, ou seja, 2 metros e 16 centímetros. Nesse ponto, a transferência de água deve ser interrompida, pois o recipiente cúbico já contém os 13 500 litros.

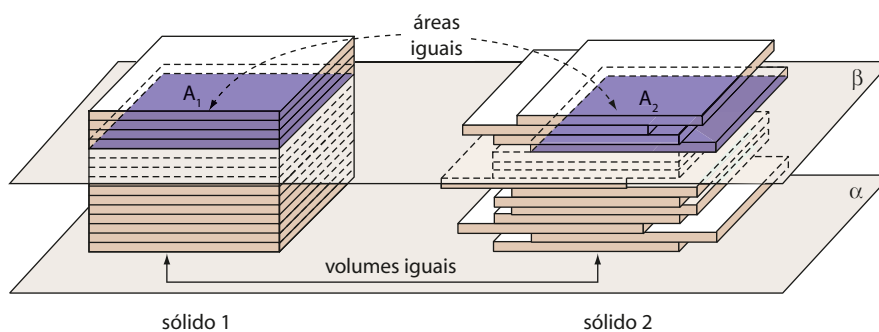
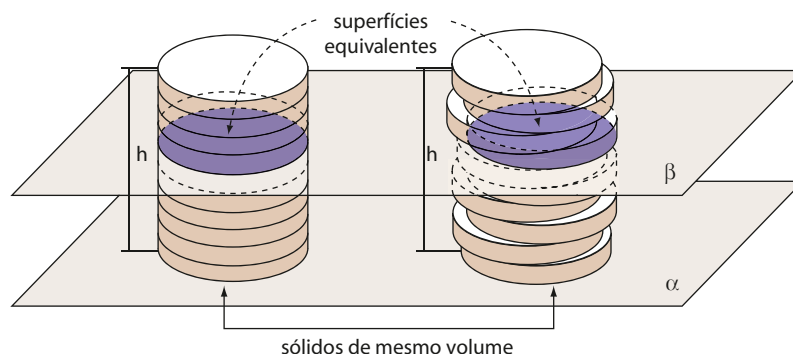
## Princípio de Cavalieri

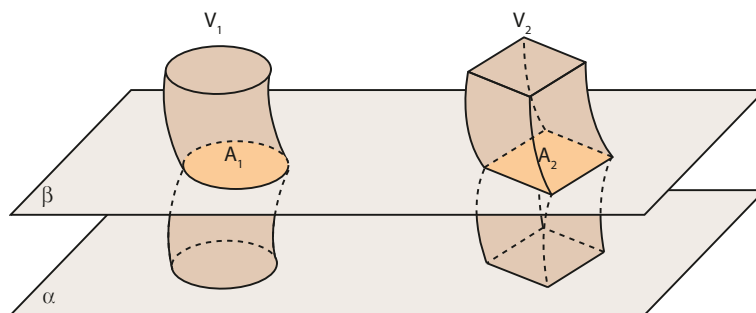
Conseguimos estabelecer uma fórmula para o volume de um paralelepípedo retângulo de maneira intuitiva; entretanto, para determinar a expressão do volume de outros sólidos, o processo não é tão simples. Uma maneira que pode ser utilizada para a obtenção do volume de um sólido é adotar como axioma um resultado formalizado pelo matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que é conhecido como **princípio de Cavalieri**.

Antes de enunciar o princípio de Cavalieri, vamos apresentar um exemplo para que ele possa ser compreendido de maneira intuitiva.

Dispõe-se de um conjunto de chapas retangulares de madeira, todas com as mesmas dimensões e, consequentemente, com o mesmo volume.

Imagine que elas foram usadas para formar duas pilhas diferentes, cada qual com a mesma quantidade de chapas, como mostram as figuras 1 e 2:

Note que, em ambas as pilhas, a quantidade de espaço ocupado pela coleção de chapas é a mesma, isto é, os sólidos das figuras 1 e 2 têm o mesmo volume.

Imagine agora esses mesmos sólidos com bases contidas num mesmo plano $\alpha$ e situados num mesmo semiespaço dos determinados por $\alpha$. Qualquer plano $\beta$ paralelo a $\alpha$ e secante aos sólidos 1 e 2 determina nesses sólidos superfícies equivalentes, ou seja, de áreas iguais.

A mesma ideia pode ser estendida para duas pilhas, cada qual com a mesma quantidade de moedas de dimensões iguais:

O que acabamos de apresentar de maneira intuitiva é o que chamamos princípio de Cavalieri.

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).

$$A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

De modo geral, sua aplicação deve ser feita colocando-se os dois sólidos com bases em um mesmo plano, paralelo àquele em que estarão as seções de áreas iguais.

A seguir, usaremos o princípio de Cavalieri para calcular o volume de um prisma.

## Áreas e volume

### Área da base $(A_b)$

Como a base de um prisma é um polígono, a área da base de um prisma é a área de um polígono.

Por exemplo, se a base do prisma for um quadrado cujo lado mede $\ell$, então $A_b = \ell^2$; se a base do prisma for um triângulo, em que **b** e **h** são, respectivamente, as medidas da base e da altura relativa a essa base, então $A_b = \frac{b \cdot h}{2}$.

### Área lateral $(A_\ell)$

Como a superfície lateral de um prisma é a reunião de suas faces laterais, então a área lateral de um prisma é a soma das áreas das faces laterais.

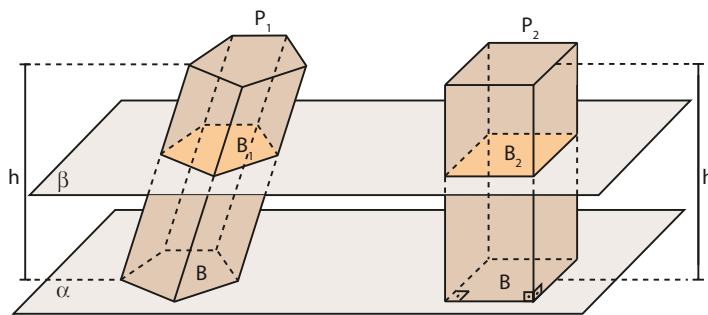
### Área total $(A_t)$

Como a superfície total de um prisma é a reunião da superfície lateral com as bases, então a área total de um prisma é dada por:

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

### Volume (V)

Imaginemos um prisma $\mathbf{P_1}$ de altura de medida **h** e área da base igual a **B**. Consideremos um paralelepípedo retângulo $\mathbf{P_2}$, em que **h** é a medida da altura e a área da base é igual a **B**. Note que $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ têm as alturas de medidas iguais, assim como são iguais as áreas de suas bases.

Suponhamos que os dois sólidos tenham as bases contidas num mesmo plano $\alpha$ e fiquem no mesmo semiespaço de origem $\alpha$, conforme mostrado na figura:

Observe que qualquer plano $\beta$ paralelo a $\alpha$ e que secione $\mathbf{P_1}$ também seciona $\mathbf{P_2}$. Note também que as seções ($\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

Então, pelo princípio de Cavalieri, o prisma $\mathbf{P_1}$ e o paralelepípedo $\mathbf{P_2}$ têm volumes iguais, ou seja, $V_{P_1} = V_{P_2}$.

Como $V_{P_2} = B \cdot h$, então: $V_{P_1} = B \cdot h$.

Assim, concluímos que:

$$V = A_b \cdot h$$

O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela medida da altura.

Como exemplo, consideremos $\mathbf{P_1}$ um prisma reto triangular com 12 cm de altura e área da base igual a 18 cm² e $\mathbf{P_2}$ um cubo cuja aresta da base mede 6 cm. Temos:

$$\left.\begin{array}{l} V_{P_1} = A_b \cdot h \Rightarrow V_{P_1} = 18 \cdot 12 \Rightarrow V_{P_1} = 216 \text{ cm}^3 \\ V_{P_2} = a^3 \Rightarrow V_{P_2} = 6^3 \Rightarrow V_{P_2} = 216 \text{ cm}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

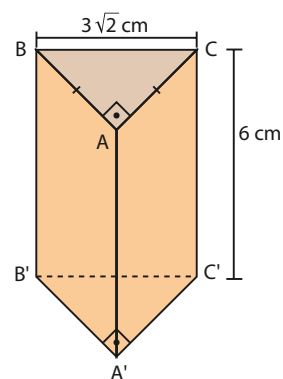
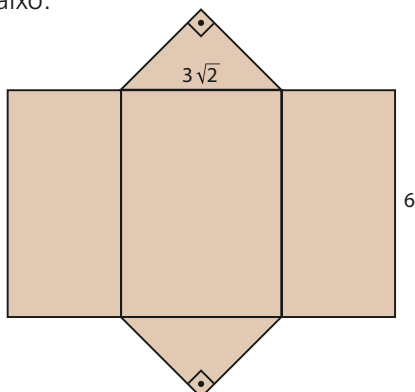
$$\Rightarrow V_{P_1} = V_{P_2} \Rightarrow \mathbf{P_1} \text{ e } \mathbf{P_2} \text{ são sólidos } \textbf{equivalentes}$$

**EXEMPLO 4**

A figura ao lado representa um prisma reto, em que a altura mede 6 cm e a base é um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa mede $3\sqrt{2}$ cm.

Vamos determinar a área total ($\mathbf{A_t}$) e o volume ($\mathbf{V}$) desse prisma.

- Cálculo de $\mathbf{A_t}$:

  Considere a planificação da superfície do prisma dado, mostrada na figura abaixo.

Observe que a área total do prisma é igual à soma das áreas de dois triângulos retângulos isósceles (BAC e B'A'C') com as áreas de três retângulos (ABB'A', CAA'C' e BCC'B'). Temos:

- $\triangle BAC$ é retângulo e isósceles; então:
  $(BA)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \underset{BA = AC}{\Rightarrow} 2 \cdot (AC)^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow AC = BA = 3$ cm
  Logo: $A_b = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow A_b = 4{,}5$ cm$^2$
- Como a área lateral é a soma das áreas dos retângulos ABB'A', CAA'C' e BCC'B', então:
  $$A_\ell = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 3\sqrt{2} \cdot 6 \Rightarrow A_\ell = 18(2 + \sqrt{2})\ \text{cm}^2$$
  Portanto: $A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b \Rightarrow A_t = 36 + 18\sqrt{2} + 2 \cdot 4{,}5 \Rightarrow A_t = 9(5 + 2\sqrt{2})$ cm$^2$
  Logo, a área total desse prisma reto é igual a $9(5 + 2\sqrt{2})$ cm$^2$.
- Cálculo de **V**:
  Como o volume de um prisma é dado por $V = A_b \cdot h$, então:
  $$V = 4{,}5 \cdot 6 \Rightarrow V = 27\ \text{cm}^3$$
  Logo, o volume desse prisma reto é 27 cm$^3$.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**2** Um prisma reto é tal que sua base é um losango com 24 dm de perímetro e um dos ângulos internos mede 60°, conforme a figura. Considerando que esse prisma tem 18 dm de altura, determine o seu volume.

**Solução:**

Primeiramente, vamos determinar $\mathbf{A_b}$, área da base do prisma.

Se o perímetro do losango da base é igual a 24 dm, então cada lado mede 6 dm.

A área do losango da base é igual à soma das áreas dos triângulos PSR e PQR, que são congruentes. Assim, temos:

$$A_b = 2 \cdot A_{PSR} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \text{sen } 60° \Rightarrow A_b = 18\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

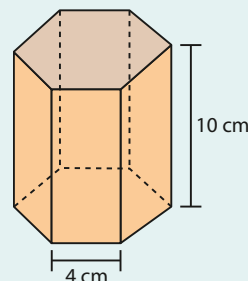
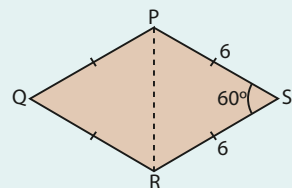
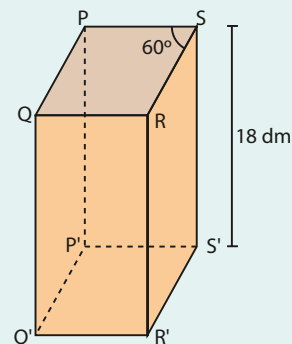
O volume **V** do prisma é dado por $V = A_b \cdot h$. Então, como $h = 18$ dm, temos:

$$V = (18\sqrt{3}\ \text{dm}^2) \cdot (18\ \text{dm}) = 324\sqrt{3}\ \text{dm}^3$$

Logo, o volume desse prisma é $324\sqrt{3}$ dm$^3$.

**3** Um artesão faz peças maciças de latão e as vende por R$ 35,00 o quilograma. Fabrício comprou uma dessas peças, que tem a forma de um prisma regular hexagonal de 10 cm de altura e cuja aresta da base mede 4 cm. Considerando que a densidade do latão é 8,5 g/cm$^3$, quanto Fabrício pagou pela peça comprada? Use $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.

**Solução:**

Como a densidade do latão é 8,5 g/cm$^3$, isto é, a massa de latão num volume de 1 cm$^3$ é 8,5 g, então devemos primeiramente determinar o volume **V** da peça comprada por Fabrício.

- Cálculo de **V**:

A peça tem a forma de um prisma regular hexagonal; então, $V = A_b \cdot h$, em que h = 10 cm e $\mathbf{A_b}$ é a área de um hexágono regular cujo lado mede 4 cm.

Professor, se achar necessário, apresente novamente a dedução da fórmula da área de um triângulo equilátero em função da medida de seu lado.

Como um hexágono regular é composto de seis triângulos equiláteros, então:

$$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \underset{\ell = 4}{\Rightarrow} A_b = 6 \cdot \left(\frac{4^2 \cdot 1{,}7}{4}\right) \Rightarrow A_b = 40{,}8 \text{ cm}^2$$

Como $V = A_b \cdot h$, temos:

$$V = (40{,}8 \text{ cm}^2) \cdot (10 \text{ cm}) = 408 \text{ cm}^3$$

- Cálculo da quantia paga por Fabrício:

Como a densidade do latão é 8,5 g/cm³, a regra de três seguinte permite que se calcule a massa da peça comprada:

| massa (g) | | volume (cm³) |
|---|---|---|
| 8,5 | —— | 1 |
| x | —— | 408 |

$$\Rightarrow \frac{8{,}5}{x} = \frac{1}{408} \Rightarrow x = 3\,468 \text{ g} = 3{,}468 \text{ kg}$$

Se o artesão vende cada peça a R$ 35,00 o quilograma, então a peça comprada por Fabrício custou 3,468 · R$ 35,00, ou seja, R$ 121,38.

**4** Determine o volume do paralelepípedo oblíquo mostrado na figura, sabendo que sua base é um quadrado cujo lado mede 5 cm e que a aresta lateral mede 8 cm.

**Solução:**

A área da base do paralelepípedo é:

$$A_b = 5^2 \Rightarrow A_b = 25 \text{ cm}^2$$

Para determinar a medida **h** da altura do paralelepípedo, note que o triângulo AMA' é retângulo; assim:

$$\text{sen } 30° = \frac{AM}{AA'} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

Como o volume **V** do paralelepípedo é dado por $V = A_b \cdot h$, temos:

$$V = (25 \text{ cm}^2) \cdot (4 \text{ cm}) = 100 \text{ cm}^3$$

**OBSERVAÇÃO**

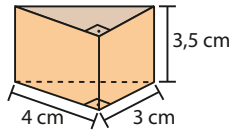
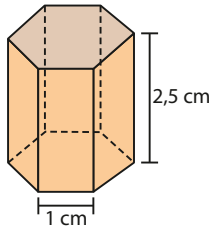
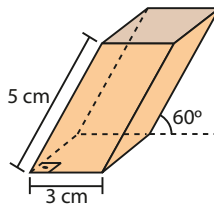
Define-se a **densidade de um material homogêneo** como o quociente de sua massa pelo seu volume.
A representação da densidade pode ser feita pela letra grega **ρ** (que se lê "rô") e é expressa, entre outros modos, em gramas por centímetro cúbico, quilogramas por metro cúbico, libras por polegada cúbica etc. Assim:

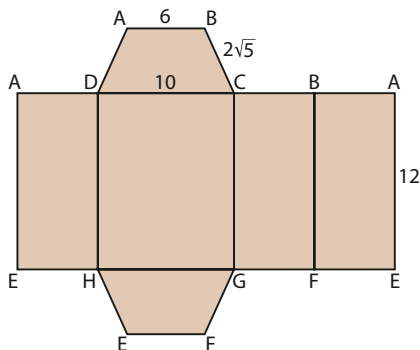
$\rho = \dfrac{m}{V}$, em que **m** é a massa e **V** o volume do material.

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**16** Calcule a área lateral, a área total e o volume de cada um dos seguintes prismas:

**a)** prisma reto triangular

**b)** prisma regular hexagonal

**c)** prisma oblíquo de base quadrada

**17** Considere um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero de perímetro 12 dm. Determine a área total e o volume desse prisma, sabendo que a medida da sua altura é o dobro da medida da altura da base.

**18** Na figura tem-se a planificação da superfície de um prisma reto cuja base é um trapézio isósceles.

Considerando que a unidade das medidas indicadas é o centímetro, determine:

**a)** o volume desse prisma;

**b)** a razão entre a área da base e a área lateral desse prisma, nessa ordem.

**19** A base de um prisma reto de 8 cm de altura é um quadrado inscrito em um círculo de $6\sqrt{2}$ cm de diâmetro. Determine a área total e o volume desse prisma.

**20** Sabe-se que a base de um prisma reto é um hexágono regular cujo apótema mede $6\sqrt{3}$ dm. Se a altura desse prisma mede 20 dm, determine sua área total e seu volume.

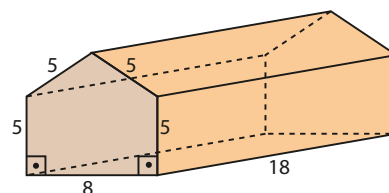
**21** Um artesão vende porta-joias que têm a forma de prismas heptagonais regulares. Ele oferece aos clientes a opção de revestimento de toda a superfície lateral do porta-joias com resina e, por esse serviço, cobra sobre o preço marcado um adicional de R$ 0,15 por centímetro quadrado de superfície revestida. Mafalda comprou um desses porta-joias e optou por fazer tal revestimento. Então, se o porta-joias que ela comprou tinha 4 cm de altura e a aresta da base media 3 cm, que quantia adicional ela pagou?

**22** Um prisma hexagonal regular tem $192\sqrt{3}$ m³ de volume e a área de sua superfície lateral é igual a 192 m². Determine a medida do lado do hexágono e a altura do prisma.

**23** Sabe-se que a base de um prisma é um triângulo equilátero com 12 dm de perímetro e que a medida de sua altura é igual a $\frac{5}{2}$ da medida da altura da base. Relativamente a esse prisma, determine:

**a)** a área total; **b)** o volume.

**24** Um prisma hexagonal regular é tal que a área da base está para a área lateral assim como 1 está para 3. Determine a área lateral e o volume desse prisma, sabendo que ele tem 18 cm de altura.

**25** A figura representa um galpão com o formato de um prisma reto de base pentagonal, em que a unidade das medidas indicadas é o metro. Considerando que esse galpão tem 18 m de comprimento, determine o volume de ar que ele comporta.

# Pirâmide

O desenvolvimento da Geometria pode ter sido estimulado por necessidades práticas de demarcação de terras, de construção de edifícios ou por sentimentos estéticos das artes em geral.

Esse senso estético parece ter sido altamente desenvolvido entre os egípcios, como mostram registros de construções de pirâmides (aproximadamente 5000 a.C.), destinadas a servir de túmulo para o faraó e sua família, bem como guardar seus tesouros.

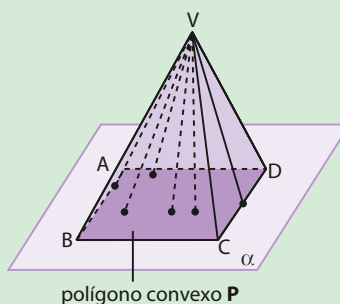
Para os egípcios, as pirâmides representavam os raios do sol brilhando em direção à Terra. Todas elas foram construídas na margem oeste do rio Nilo, na direção do sol poente.

Entre as inúmeras pirâmides construídas no antigo império egípcio, destacam-se três: a de Quéops (conhecida como Grande Pirâmide de Gizé), a de Quéfren e a de Miquerinos — conhecidas também como Pirâmides de Gizé —, mostradas na foto ao lado.

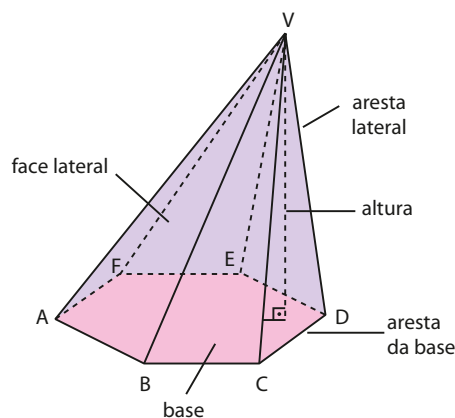
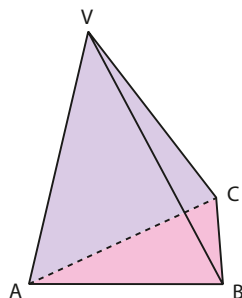
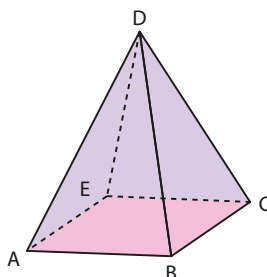
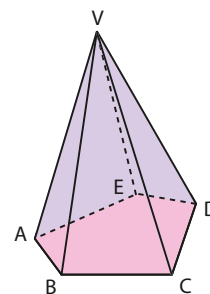
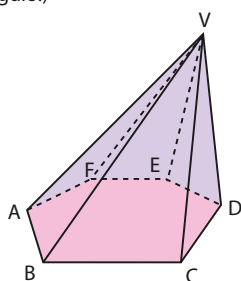
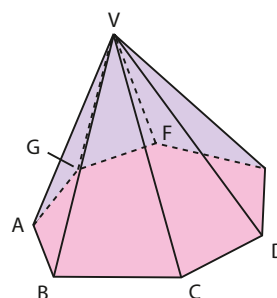
Atualmente, a Grande Pirâmide de Gizé, além de ser Patrimônio Mundial da Unesco, ocupa o primeiro lugar na lista das sete maravilhas do mundo antigo.

ART KOWALSKY/ALAMY/FOTOARENA

A Grande Pirâmide de Gizé, ao centro, tem mais de 4 500 anos. É a única maravilha do mundo antigo que resistiu até hoje às intempéries. Egito, 2004.

Dados um polígono convexo **P** contido em um plano α e um ponto **V** não pertencente a α, tracemos todos os possíveis segmentos de reta que têm uma extremidade em **V** e a outra num ponto do polígono. A reunião desses segmentos é um sólido chamado **pirâmide**.

## Elementos e classificação

Na pirâmide VABCDEF, representada ao lado, temos que:

- o ponto **V** é o **vértice** da pirâmide.
- o polígono ABCDEF é a **base** da pirâmide.
- os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ são as **arestas da base**.
- os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$, $\overline{VE}$ e $\overline{VF}$ são as **arestas laterais**.
- os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE, VEF e VFA são as **faces laterais**.
- a distância de **V** ao plano da base é a **altura** da pirâmide.

As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o polígono da base. Por exemplo:

pirâmide triangular
(A base é um triângulo.)

pirâmide quadrangular
(A base é um quadrilátero.)

pirâmide pentagonal
(A base é um pentágono.)

pirâmide hexagonal
(A base é um hexágono.)

pirâmide heptagonal
(A base é um heptágono.)

## EXERCÍCIOS

**26** Em cada caso, identifique a pirâmide que possui:

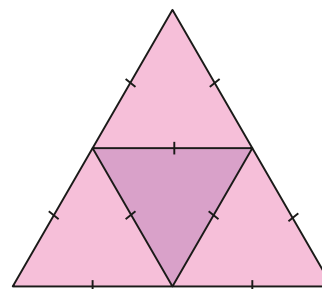
**a)** 5 faces
**b)** 10 faces
**c)** 6 arestas
**d)** 16 arestas

**27** Determine o número de vértices, de arestas e de faces de uma pirâmide cuja base é um polígono convexo de 11 lados.

**28** Em cada caso, indique a classificação da pirâmide, sabendo que a soma dos ângulos de suas faces é igual a:

**a)** 20 retos
**b)** 56 retos

Sugestão: A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de **n** lados é dada por $(n - 2) \cdot 180°$.

**29** A figura seguinte representa a planificação da superfície de uma pirâmide:

Qual é o número de vértices, faces e arestas da pirâmide?

## Pirâmide regular

A **pirâmide regular** é aquela cuja base é um polígono regular e cujas arestas laterais são congruentes entre si.

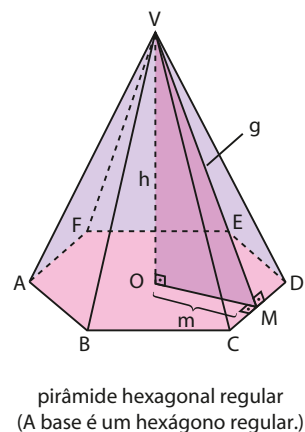
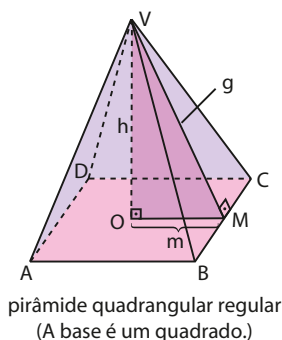
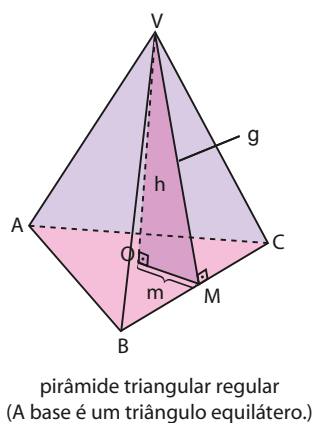
Uma pirâmide regular tem as seguintes características:

- a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base;
- as faces laterais são triângulos isósceles congruentes;
- o apótema da pirâmide regular é a altura de uma face lateral, relativa à aresta da base.

Vejamos essas características indicadas nas pirâmides regulares abaixo representadas, nas quais **h** e **g** são as respectivas medidas da altura e do apótema da pirâmide e **m** é a medida do apótema da base.

pirâmide triangular regular
(A base é um triângulo equilátero.)

pirâmide quadrangular regular
(A base é um quadrado.)

pirâmide hexagonal regular
(A base é um hexágono regular.)

Note que, em toda pirâmide regular, vale, pelo teorema de Pitágoras, a relação notável:

$$g^2 = h^2 + m^2$$

## Áreas e volume

### Área da base ($A_b$)

Como a superfície da base de uma pirâmide é um polígono, então:

$$A_b = \text{área do polígono da base}$$

### Área lateral ($A_\ell$)

Como a superfície lateral de uma pirâmide é a reunião das suas faces laterais (triângulos), então:

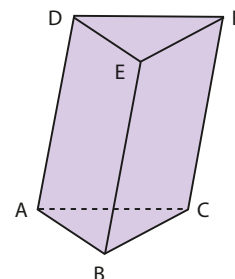
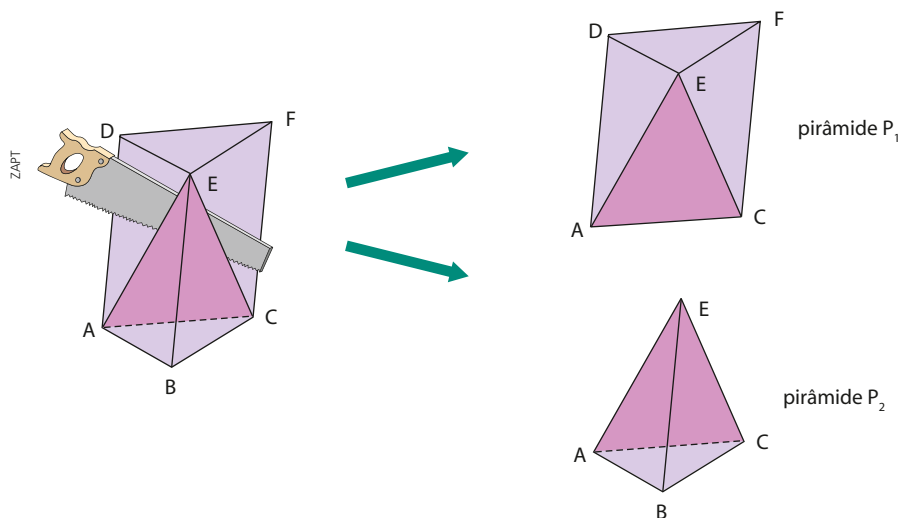
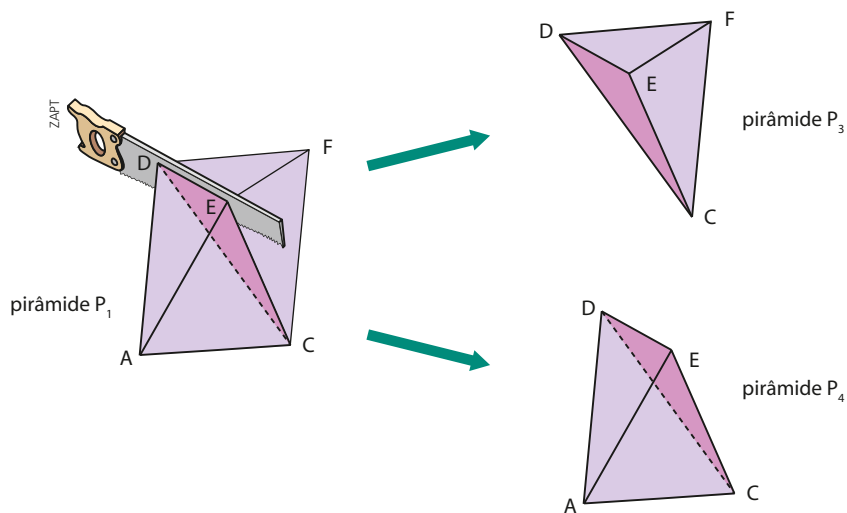
$$A_\ell = \text{soma das áreas das faces laterais}$$

### Área total ($A_t$)

A superfície total de uma pirâmide é a reunião do polígono de sua base com os triângulos que compõem sua superfície lateral. Logo, a área total da pirâmide é a soma da área do polígono de sua base com a área de sua superfície lateral, ou seja:

$$A_t = A_b + A_\ell$$

### Volume (V)

Primeiramente determinemos o volume de uma pirâmide triangular e, para tal, consideremos o prisma triangular da figura ao lado, cuja base tem área $\mathbf{A_b}$ e cuja medida da altura é **h**.

Secionando esse prisma pelo plano (ACE), obtemos uma pirâmide quadrangular **$P_1$** e uma pirâmide triangular **$P_2$**, de base ABC e altura de medida **h**.

Secionando **$P_1$** pelo plano (CDE), obtemos duas pirâmides triangulares: **$P_3$**, de vértice **F** e base DEC (ou de vértice **C** e base DEF), e **$P_4$**, de vértice **A** e base DEC.

Note que:

- **$P_2$** e **$P_3$** são pirâmides de bases equivalentes ($\triangle$ABC e $\triangle$DEF) e mesma altura.
- **$P_3$** e **$P_4$** são pirâmides que têm o $\triangle$DEC como base comum e mesma altura, pois as distâncias de seus respectivos vértices (**F** e **A**) ao plano da base são iguais.

Para obter o volume dessas pirâmides triangulares vamos, de maneira introdutória, mostrar o seguinte teorema:

Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume.

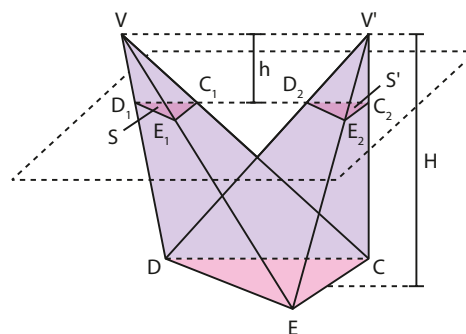
**Demonstração:**

Consideremos as pirâmides **P** e **P'**, de base comum DEC e vértices **V** e **V'**, ambas com altura de medida **H**.

Um plano paralelo ao plano da base (DEC) e distando **h** dos vértices **V** e **V'** determina em **P** e **P'** as seções **S** e **S'**, respectivamente, conforme mostrado na figura.

Se **A** é a área da base DEC, $\mathbf{A_1}$ a área da seção **S** e $\mathbf{A_2}$ a área da seção **S'**, considerando a semelhança entre os triângulos DEC e $D_1E_1C_1$ e entre os triângulos DEC e $D_2E_2C_2$, temos:

$$\frac{h}{H} = k \text{ (razão de semelhança)} \Rightarrow \frac{A_1}{A} = k^2 = \frac{A_2}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$$

Logo, pelo princípio de Cavalieri, podemos concluir que: $V_P = V_{P'}$

Agora, de modo semelhante, podemos mostrar que $V_{P_2} = V_{P_3}$ e $V_{P_3} = V_{P_4}$, então:

$$V_{P_2} = V_{P_3} = V_{P_4}$$

Fazendo $V_{P_2} = V_{P_3} = V_{P_4} = V$ e considerando que o prisma ABCDEF é a reunião das pirâmides $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ e $\mathbf{P_4}$, o seu volume ($A_b \cdot h$) é tal que:

$$A_b \cdot h = V + V + V \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Portanto, concluímos, para pirâmides triangulares, a validade do seguinte teorema:

O volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela medida da altura.

Para estender o resultado obtido, observe na figura ao lado que uma pirâmide pode ser dividida em pirâmides triangulares que têm a mesma altura que a pirâmide original. Assim, no exemplo da figura, temos a seguinte divisão: pirâmides de vértice **V** cujas bases são os triângulos AFE, AED, ADC e ACB.

Considerando todas as diagonais do polígono da base, traçadas por um único de seus vértices, note que a divisão da pirâmide original em pirâmides triangulares fica definida por um plano determinado por cada uma dessas diagonais e pelo vértice da pirâmide.

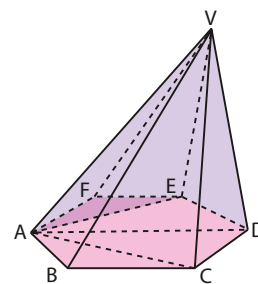
Seja, agora, uma pirâmide qualquer cuja base é um polígono de **n** lados e, de um mesmo vértice deste polígono, tracemos todas as possíveis diagonais que o dividem em (n − 2) triângulos. Nesse caso, obteríamos (n − 2) pirâmides triangulares de mesma altura que a pirâmide original e com áreas da base $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ..., $\mathbf{A_{n-2}}$.

Como o volume **V** da pirâmide original é a soma dos volumes dessas (n − 2) pirâmides triangulares, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h + \ldots + \frac{1}{3} \cdot A_{n-2} \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2}) \cdot h$$

ou seja, de modo geral, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

O volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela medida da altura.

**EXEMPLO 5**

Quando a pirâmide de Quéops terminou de ser construída tinha 146 m de altura e a aresta da base media 233 m. Atualmente, devido à erosão, sua altura é de cerca de 136 m, e a aresta da base mede 230 m. Admitindo-se que essa pirâmide é quadrangular regular, vamos determinar:

a) A área total de sua superfície, ao final da construção:

A área da base é: $A_b = (AB)^2 = (233\ m)^2 \Rightarrow A_b = 54\,289\ m^2$

A área lateral, $\mathbf{A}_\ell$, é a soma das áreas de quatro triângulos isósceles congruentes, um dos quais é o triângulo AVB, de base AB = 233 m e altura $\overline{VM}$.

Como o △VMH é retângulo, temos:

$(VH)^2 + (MH)^2 = (VM)^2 \Rightarrow (146)^2 + \left(\frac{233}{2}\right)^2 = (VM)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow VM \simeq 186{,}78\ m$

Assim, $A_\ell = 4 \cdot A_{\triangle AVB} = 4 \cdot \frac{(AB)\cdot(VM)}{2} = 2 \cdot (233\ m) \cdot (186{,}78\ m) \Rightarrow$

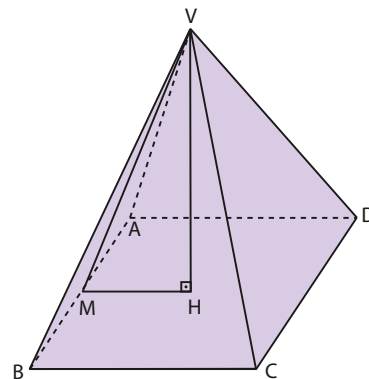
$\Rightarrow A_\ell \simeq 87\,039{,}48\ m^2$

Logo, a área total da superfície da pirâmide é: $A_t = A_b + A_\ell \simeq 54\,289\ m^2 + 87\,039{,}48\ m^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t \simeq 141\,328{,}48\ m^2$

b) O quanto diminuiu seu volume, do final da construção até os dias de hoje:

$\mathbf{V}_1$: volume da pirâmide ao ser construída $\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot (233\ m)^2 \cdot (146\ m) \Rightarrow$
$\Rightarrow V_1 \simeq 2\,642\,064{,}67\ m^3$

$\mathbf{V}_2$: volume atual da pirâmide $\Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \cdot (230\ m)^2 \cdot (136\ m) \Rightarrow V_2 \simeq 2\,398\,133{,}33\ m^3$

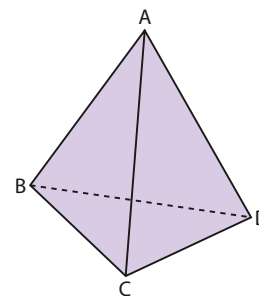
Logo, o volume da pirâmide original diminuiu 243 931,34 m³ (diferença entre $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$).

## Tetraedro regular

Chama-se **tetraedro** toda pirâmide de base triangular.

Se as quatro faces de um tetraedro são triângulos equiláteros congruentes, ele é chamado **tetraedro regular**.

Observe que, em um tetraedro regular:

- as seis arestas são congruentes, ou seja, AB = AC = AD = BC = CD = DB.
- qualquer face — ABC, ACD, ABD ou BCD — pode ser considerada como base, já que são triângulos equiláteros congruentes.

Vejamos como obter a área total $\mathbf{A}_t$, a medida **h** da altura e o volume **V** de um tetraedro regular cuja aresta mede **a**.

### Área total ($A_t$)

A superfície total de um tetraedro é a reunião das superfícies de quatro triângulos equiláteros congruentes. Assim, considerando que a medida das arestas do tetraedro é **a**, então sua área total é quatro vezes a área de um triângulo equilátero cujo lado mede **a**.

Logo: $A_t = 4 \cdot A_{face} \Rightarrow A_t = 4 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow$ $A_t = a^2 \cdot \sqrt{3}$

## Altura (h)

Para calcularmos **h**, medida da altura de um tetraedro regular, consideremos o ponto **O**, projeção ortogonal do vértice **A** sobre o plano (BCD) da base, como mostra a figura.

Observe que o triângulo AOB é retângulo; então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

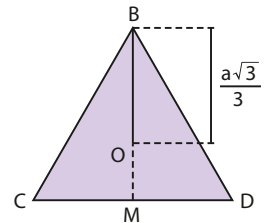
$$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2 \quad (1)$$

Como $AB = a$, $AO = h$ e $OB = \frac{2}{3}BM$ ($\overline{BM}$: altura do triângulo equilátero BCD), temos:

Professor, se achar pertinente, deduza novamente a fórmula da altura de um triângulo equilátero em função da medida $\ell$ de seu lado.

$$OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1): $a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}$$

Professor, lembre os estudantes de que, no triângulo equilátero, a altura coincide com a mediana e o ponto **O** (baricentro) divide a mediana na razão de 2 : 1, isto é, $BO = 2 \cdot OM$.

## Volume (V)

Como $\begin{cases} A_b\text{: área de uma face (triângulo equilátero)} \Rightarrow A_b = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \\ \text{e} \\ h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

**EXEMPLO 6**

Dado um tetraedro regular cuja aresta mede 4 cm, vamos determinar a área total de sua superfície e o seu volume.

Acompanhe:

- A superfície total do tetraedro é a reunião de quatro triângulos equiláteros congruentes. Assim:

$$A_t = 4 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_t = 4^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow A_t = 16\sqrt{3}$$

A área da superfície desse tetraedro regular é $16\sqrt{3}$ cm².

- Como o volume do tetraedro cuja aresta mede **a** é dado por $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$, temos:

$$V = \frac{4^3 \cdot \sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

Logo, o volume desse tetraedro é $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm³.

**PENSE NISTO:**

Toda pirâmide triangular regular é um tetraedro regular?

Não, pois em um tetraedro regular todas as faces são triângulos equiláteros, e, em uma pirâmide triangular regular, a base deve ser um triângulo equilátero e as faces laterais triângulos isósceles (não necessariamente equiláteros).

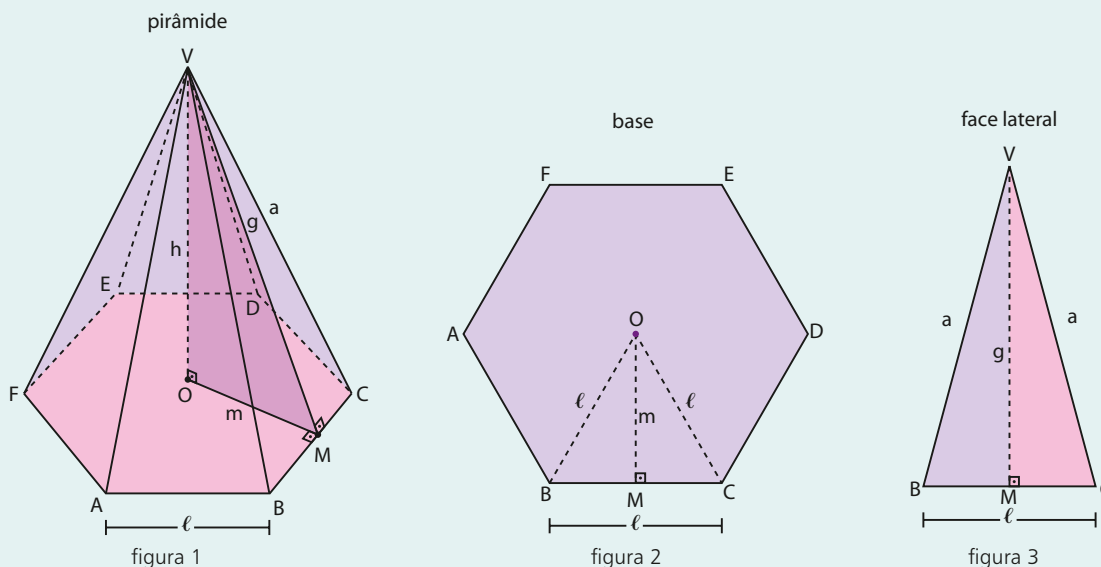
## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**5** Considere uma pirâmide regular hexagonal que tem 18 dm de altura e cuja aresta da base mede $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ dm. Para essa pirâmide, determine: a medida do apótema (**g**); a medida do apótema da base (**m**); a medida da aresta lateral (**a**); a área da base ($\mathbf{A_b}$); a área lateral ($\mathbf{A_\ell}$); a área total ($\mathbf{A_t}$); o volume (**V**).

**Solução:**

São dados: h = 18 dm e $\ell = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ dm.

Para auxiliar na resolução do problema, vamos considerar os seguintes esboços gráficos:

figura 1 figura 2 figura 3

Observe, na figura 2, que o apótema da base coincide com a altura de um triângulo equilátero. Logo:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 4 \text{ dm}$$

- Observe, na figura 3, que o apótema da pirâmide é a altura do triângulo isósceles (relativa ao lado $\overline{BC}$) da face lateral. Como o triângulo VOM é retângulo em **O** (figura 1), temos:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 18^2 + 4^2 = 340 \Rightarrow g = 2\sqrt{85} \text{ dm}$$

- Na figura 3, pode-se ver que a aresta lateral é a hipotenusa do triângulo retângulo VMC. Logo:

$$a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 340 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1\,036}{3} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{777}}{3} \text{ dm}$$

- Como a superfície da base da pirâmide é a reunião de seis triângulos equiláteros congruentes, temos:

$$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_b = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow A_b = 32\sqrt{3} \text{ dm}^2$$

- Como a superfície lateral da pirâmide é a reunião de seis triângulos isósceles congruentes (veja a figura 3), temos:

$$A_\ell = 6 \cdot \left(\frac{\ell \cdot g}{2}\right) \Rightarrow A_\ell = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{85} \Rightarrow A_\ell = 16\sqrt{255} \text{ dm}^2$$

- A área total é a soma da área da base com a área lateral:

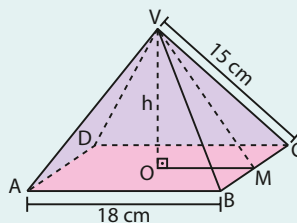
$$A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 32\sqrt{3} + 16\sqrt{255} \Rightarrow A_t = 16\sqrt{3}\left(2 + \sqrt{85}\right) \text{ dm}^2$$

- Como o volume é dado por $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 32\sqrt{3} \cdot 18 \Rightarrow V = 192\sqrt{3} \text{ dm}^3$$

**6** Determine a área total e o volume de uma pirâmide regular de base quadrada, sabendo que as medidas das arestas laterais e da base são 15 cm e 18 cm, respectivamente.

**Solução:**

Considere que a figura abaixo é a representação da pirâmide a que se refere o problema.

- A área total da superfície dessa pirâmide é a soma da área da base, que é um quadrado de 18 cm de lado, com as áreas de quatro triângulos isósceles congruentes. Assim, temos:

  Área da base: $A_b = \ell^2 \Rightarrow A_b = 18^2 \Rightarrow A_b = 324 \text{ cm}^2$

  Área lateral: Para calcular a área lateral da pirâmide ($\mathbf{A_\ell}$), devemos primeiro determinar a área $\mathbf{A_1}$ do triângulo VBC, cujo esquema está representado ao lado. Assim, temos:

  $\triangle VMC$ é retângulo $\Rightarrow (VC)^2 = (VM)^2 + (MC)^2 \Rightarrow (VM)^2 = 15^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2 = 144 \Rightarrow$

  $\Rightarrow VM = 12 \text{ cm}$

  Como $A_1 = \frac{(BC) \cdot (VM)}{2} = \frac{18 \cdot 12}{2} \Rightarrow A_1 = 108 \text{ cm}^2$

  Temos: $A_\ell = 4 \cdot A_1 \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot 108 \Rightarrow A_\ell = 432 \text{ cm}^2$

  Então: $A_t = A_b + A_\ell = 324 + 432 \Rightarrow A_t = 756 \text{ cm}^2$

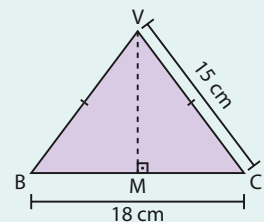
  Logo, a área total da pirâmide é 756 cm².

- Para calcular o volume **V** da pirâmide, devemos determinar **h**, medida de sua altura, já que $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$.

  Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo VOM, temos:

$$12^2 = h^2 + \left(\frac{18}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 144 - 81 \Rightarrow h = 3\sqrt{7} \text{ cm}$$

  Então: $V = \frac{1}{3} \cdot 324 \cdot 3\sqrt{7} \Rightarrow V = 324\sqrt{7} \text{ cm}^3$

  Logo, o volume da pirâmide é $324\sqrt{7}$ cm³.

**PENSE NISTO:**

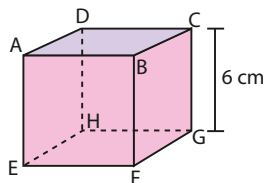
Como você calcularia a medida **h** usando o triângulo VOB?

ABCD é um quadrado $\Rightarrow OB = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = \frac{18\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OB = 9\sqrt{2}$ cm

$\triangle VOB$ é retângulo $\Rightarrow (VO)^2 + (OB)^2 = (VB)^2 \Rightarrow h^2 = 15^2 - (9\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 3\sqrt{7}$ cm

## EXERCÍCIOS

**30** Considere o cubo representado na figura e calcule o volume das pirâmides:

**a)** de vértice **D** e base EFGH;

**b)** de vértice **A** e base FGH.

**31** A base de uma pirâmide de 6 cm de altura é um quadrado de 8 cm de perímetro. Calcule o seu volume.

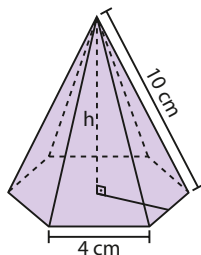
**32** Calcule o volume de uma pirâmide de 12 m de altura, sendo a base um losango cujas diagonais medem 6 m e 10 m.

**33** O perímetro da base de um tetraedro regular é 12 cm. Determine:

**a)** a área total do tetraedro;

**b)** a medida de sua altura;

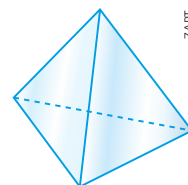
**c)** o volume do tetraedro.

**34** Calcule a área lateral, a área total e o volume da pirâmide regular, cujas dimensões estão indicadas na figura ao lado.

**35** A base de uma pirâmide de 8 m de altura é um hexágono regular cujo apótema mede $2\sqrt{3}$ m. Determine o volume dessa pirâmide.

**36** Determine o volume da pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede $6\sqrt{2}$ cm e a aresta lateral mede 10 cm.

**37** Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular, sendo 24 cm o perímetro da base e 30 cm a soma dos comprimentos de todas as arestas laterais.

**38** Um peso maciço de papel é feito de vidro e tem a forma de um tetraedro regular cuja aresta mede 6 cm. Sabendo que a densidade do vidro é 2,6 g/cm³, qual é a massa desse peso de papel?

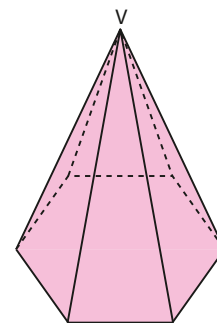
Use $\sqrt{2} \simeq 1,4$.

**39** (UF-PE) Na ilustração a seguir, temos uma pirâmide hexagonal regular com altura igual ao lado da base e volume $4\sqrt{3}$ cm³. Qual é a área total da superfície dessa pirâmide?

**a)** $7(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm²

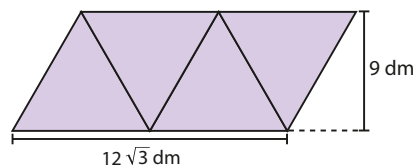
**b)** $6(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm²

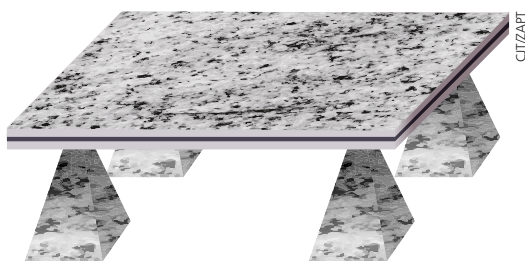
**c)** $5(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm²

**d)** $4(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm²

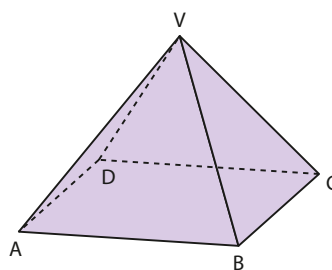
**e)** $3(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm²

**40** Determine o volume de uma pirâmide regular quadrangular, sabendo que o apótema da base mede 6 cm e o apótema da pirâmide mede $6\sqrt{2}$ cm.

**41** Sabe-se que a área da base de uma pirâmide é igual à área da base de um prisma e que o volume do prisma é igual ao quíntuplo do volume da pirâmide. Nessas condições, a medida da altura da pirâmide é igual a que porcentagem da medida da altura do prisma?

**42** Na figura abaixo tem-se a planificação da superfície de um tetraedro regular:

Determine a área total, a altura e o volume desse tetraedro.

**43** O tampo da mesa mostrada na figura a seguir apoia-se em quatro pirâmides regulares quadrangulares, feitas de granito. Se a área lateral de cada pirâmide é 0,28 m² e o lado do quadrado da base mede 0,20 m, calcule o volume de granito das estruturas das quatro pirâmides.

Elementos sem proporção entre si.

**44** Saulo comprou uma barraca de lona para acampar. Sabendo que, quando montada, ela tem a forma de uma pirâmide quadrangular regular de 2 m de altura e que a área de sua superfície lateral é 15 m², determine o volume de ar que essa barraca comporta.

**45** (UF-PR) Na figura a seguir, está representada uma pirâmide de base quadrada que tem todas as arestas com o mesmo comprimento.

**a)** Sabendo que o perímetro do triângulo DBV é igual a $6 + 3\sqrt{2}$, qual é a altura da pirâmide?

**b)** Qual é o volume e a área total da pirâmide?

**46** Pretende-se construir uma escultura de concreto, de forma piramidal regular, na qual a aresta da base quadrangular meça 6 m e a aresta lateral meça $3\sqrt{5}$ m. Determine:

**a)** a área total da superfície da escultura;

**b)** o volume da escultura;

**c)** a medida do ângulo $\alpha$, cujos lados são o apótema da pirâmide e o apótema da base.

## Sólidos semelhantes

- 1ª situação:

Observe os cubos 1 e 2, representados nas figuras ao lado.

A razão entre as medidas das arestas de 1 e 2, nessa ordem, é: $\frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{2}{3}$.

A razão entre as medidas das diagonais das bases de 1 e 2, nessa ordem, é:

cubo 1

cubo 2

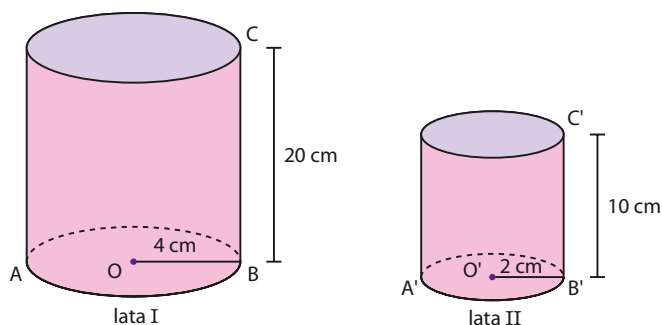
$$\frac{DB}{D'B'} = \frac{2\sqrt{2} \text{ cm}}{3\sqrt{2} \text{ cm}} = \frac{2}{3}$$

A razão entre as medidas das diagonais de 1 e 2, nessa ordem, é:

$$\frac{HB}{H'B'} = \frac{2\sqrt{3} \text{ cm}}{3\sqrt{3} \text{ cm}} = \frac{2}{3}$$

Dizemos que o cubo 2 é uma "ampliação" do cubo 1.

- 2ª situação:

As figuras ao lado representam duas latas de óleo de soja, comercializadas num supermercado. Ambas têm a mesma forma cilíndrica. Note que **O** e **O**' são os centros dos círculos das bases.

lata I

lata II

Vamos calcular a razão entre as medidas de um segmento da lata I e o correspondente segmento na lata II:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{20\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 2; \quad \frac{OB}{O'B'} = \frac{4\text{ cm}}{2\text{ cm}} = 2; \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{8\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 2$$

Dizemos que a lata II é uma "redução" da lata I.

- 3ª situação:

Veja agora as representações de duas embalagens do creme dental "Sorria", ambas em forma de paralelepípedo retorretângulo:

embalagem I

embalagem II

Vamos calcular a razão entre uma dimensão da embalagem I e a dimensão correspondente da embalagem II:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{15\text{ cm}}{10\text{ cm}} = \frac{3}{2}; \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{3\text{ cm}}{1{,}2\text{ cm}} = \frac{3}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{2}; \quad \frac{CG}{C'G'} = \frac{2\text{ cm}}{1\text{ cm}} = 2$$

Embora as duas embalagens sejam parecidas, as razões obtidas não são iguais! A embalagem II não é uma "redução" da embalagem I.

Os sólidos representados na 1ª e na 2ª situações são semelhantes, mas as duas caixas representadas na 3ª situação não são semelhantes.

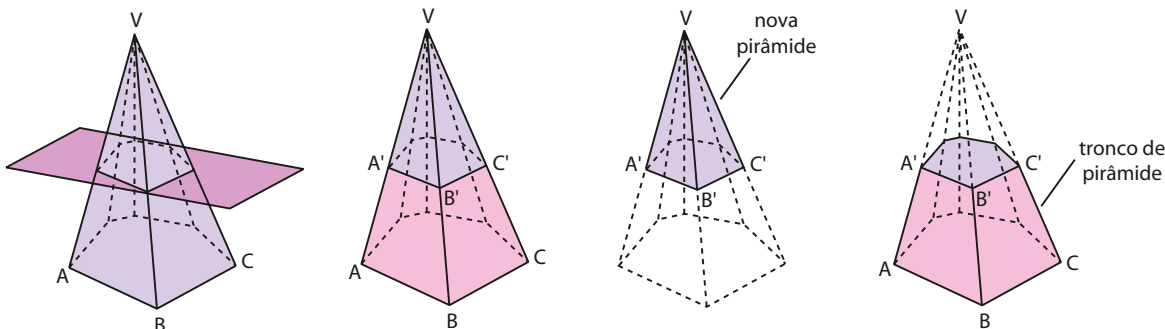
Duas esferas são sempre semelhantes, pois podem ser definidas por uma única dimensão (raio). As pirâmides, por sua vez, são definidas por múltiplas dimensões e, portanto, todas elas devem ter o mesmo coeficiente de proporcionalidade. O fato de as bases das pirâmides serem semelhantes (pois dois quadrados quaisquer são semelhantes) é condição necessária, mas não suficiente. É preciso também que suas alturas obedeçam à mesma proporção existente entre as arestas das bases das pirâmides.

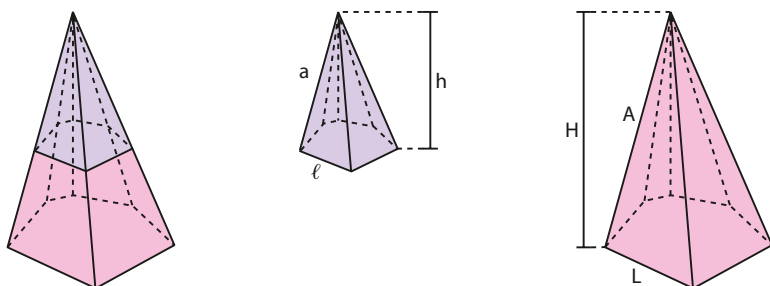
**PENSE NISTO:**

Duas esferas quaisquer são semelhantes? E duas pirâmides regulares de bases quadradas?

## Pirâmides semelhantes

Quando secionamos uma pirâmide por um plano paralelo à base de modo que este plano não contenha o vértice da pirâmide, ela fica dividida em dois sólidos:

- o que contém o vértice, que é uma nova pirâmide; e
- o que contém a base da pirâmide dada, que é um tronco de pirâmide de bases paralelas.

Os troncos de pirâmides serão estudados na próxima seção deste capítulo.

Vamos agora comparar a pirâmide obtida da seção e a pirâmide "primitiva" (ou original).

Temos:

- os polígonos das bases têm o mesmo número de lados (veja, nesse exemplo, que ambas são pirâmides hexagonais);
- os ângulos dos polígonos de duas faces homólogas são congruentes dois a dois;
- os elementos lineares homólogos (como arestas das bases, arestas laterais, alturas etc.) são proporcionais.

A nova pirâmide é uma "cópia reduzida" da pirâmide "primitiva". As duas pirâmides são semelhantes.

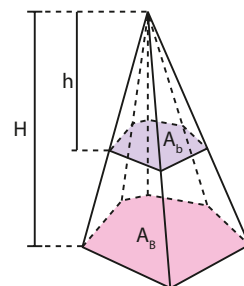
A razão **k** entre dois elementos lineares homólogos — arestas ou alturas — é chamada **razão de semelhança** entre as pirâmides. Escolhendo, por exemplo, escrever a razão de semelhança entre a pirâmide obtida da seção e a "primitiva", nesta ordem, temos:

$$\frac{a}{A} = \frac{\ell}{L} = \frac{h}{H} = k$$

Considerando duas pirâmides regulares semelhantes, temos as seguintes propriedades:

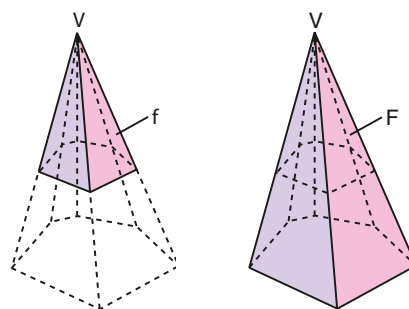
- A razão entre as áreas das bases é igual ao quadrado da razão de semelhança.

  Como as bases são polígonos semelhantes, então $\frac{p}{P}$ e $\frac{x}{X}$, razões entre os respectivos semiperímetros e as medidas dos apótemas das bases homólogas, são tais que: $\frac{p}{P} = \frac{x}{X} = k$

  Assim: $\frac{A_b}{A_B} = \frac{p \cdot x}{P \cdot X} = \frac{p}{P} \cdot \frac{x}{X} = k \cdot k \Rightarrow \frac{A_b}{A_B} = k^2$

- A razão entre as áreas laterais é igual ao quadrado da razão de semelhança.

  Como duas faces laterais homólogas **f** e **F** são triângulos semelhantes, sabemos que a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança $\left(\frac{\text{área f}}{\text{área F}} = k^2\right)$.

  Lembrando que a área lateral de uma pirâmide é igual à soma das áreas de suas faces laterais, temos:

$$\frac{A_\ell}{A_L} = k^2$$ em que: $\begin{cases} \mathbf{A_\ell}\text{: área lateral da nova pirâmide} \\ \mathbf{A_L}\text{: área lateral da pirâmide primitiva} \end{cases}$

- A razão entre as áreas totais é igual ao quadrado da razão de semelhança.

  De fato, como $\frac{A_b}{A_B} = k^2$ e $\frac{A_\ell}{A_L} = k^2$, decorre $\frac{A_b + A_\ell}{A_B + A_L} = k^2$, ou seja:

$$\frac{A_t}{A_T} = k^2$$

- A razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança.

  Sejam **v** o volume da nova pirâmide e **V** o volume da pirâmide "primitiva" (ou original).

  Já vimos que $\frac{A_b}{A_B} = k^2$ e $\frac{h}{H} = k$.

  Vamos obter a razão entre seus volumes:

$$\frac{v}{V} = \frac{\frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H} = \frac{A_b}{A_B} \cdot \frac{h}{H} = k^2 \cdot k = k^3 \Rightarrow \frac{v}{V} = k^3$$

**EXEMPLO 7**

Uma pirâmide quadrangular regular é secionada por um plano paralelo à base, a 4 cm do vértice. A pirâmide tem 12 cm de altura, e sua aresta da base mede 9 cm. A pirâmide VABCD é semelhante à pirâmide VA'B'C'D'. Vamos calcular as áreas das bases e o volume das duas pirâmides e constatar a validade das propriedades estudadas anteriormente.

Observe, inicialmente, que a razão entre os elementos lineares das duas pirâmides pode ser obtida comparando-se suas alturas:

$$k = \frac{h}{H} = \frac{4 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{1}{3}$$

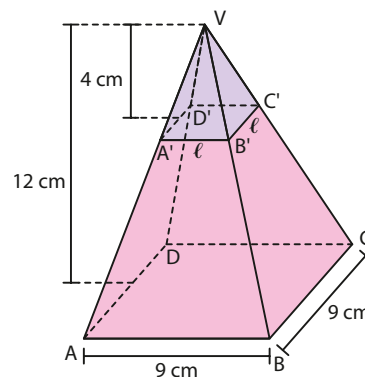
Se $\ell$ é a medida do lado do quadrado A'B'C'D', então:

$$\frac{\ell}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \ell = 3 \text{ cm}$$

A área da base (**$A_b$**) da pirâmide VA'B'C'D' é $A_b = (3 \text{ cm})^2 = 9 \text{ cm}^2$, e a área da base (**$A_B$**) da pirâmide VABCD é $(9 \text{ cm})^2 = 81 \text{ cm}^2$. Observe que a razão entre **$A_b$** e **$A_B$** é: $\frac{9 \text{ cm}^2}{81 \text{ cm}^2} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = k^2$.

O volume **v** da pirâmide VA'B'C'D' é dado por: $v = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{9 \cdot 4}{3} \Rightarrow v = 12 \text{ cm}^3$

Já o volume **V** da pirâmide VABCD é dado por: $V = \frac{A_B \cdot H}{3} = \frac{81 \cdot 12}{3} \Rightarrow V = 324 \text{ cm}^3$

A razão entre **v** e **V** é: $\frac{12 \text{ cm}^3}{324 \text{ cm}^3} = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = k^3$

**OBSERVAÇÃO**

As propriedades estudadas podem ser estendidas para dois sólidos semelhantes quaisquer.

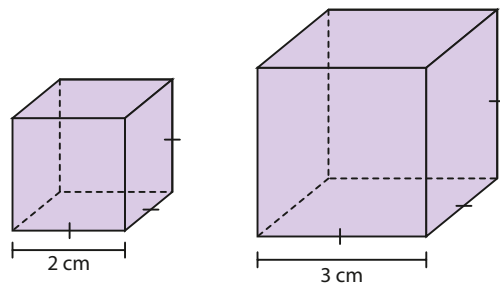
Voltemos aos dois cubos apresentados na introdução do tópico *Sólidos semelhantes*.

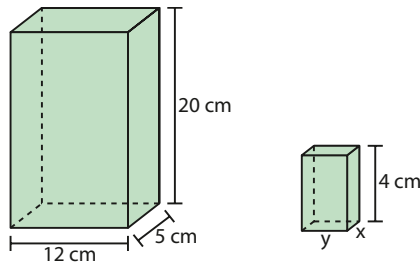
Já vimos que a razão de semelhança entre o cubo menor e o maior é $k = \frac{2}{3}$.

A área total do cubo menor é $6 \cdot (2\ \text{cm})^2 = 24\ \text{cm}^2$ e a área total do cubo maior é $6 \cdot (3\ \text{cm})^2 = 54\ \text{cm}^2$.

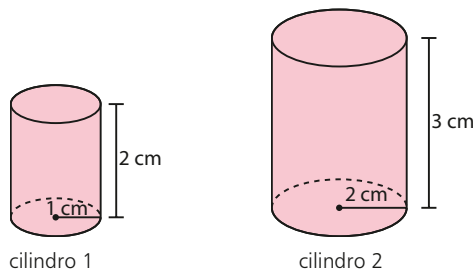
A razão entre a área do cubo menor e a área do cubo maior é:

$$\frac{24\ \text{cm}^2}{54\ \text{cm}^2} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = k^2$$

O volume do cubo menor é $(2\ \text{cm})^3 = 8\ \text{cm}^3$ e o volume do cubo maior é $(3\ \text{cm})^3 = 27\ \text{cm}^3$. A razão entre o volume do cubo menor e o volume do cubo maior é $\frac{8\ \text{cm}^3}{27\ \text{cm}^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = k^3$.

## EXERCÍCIOS

**47** Determine os valores de **x** e **y**, a fim de que as caixas seguintes sejam semelhantes:

**48** Os cilindros 1 e 2 representados a seguir são semelhantes?

cilindro 1

cilindro 2

**49** Uma pequena indústria produz caixas de um único tipo, em forma de paralelepípedo retângulo, com as seguintes dimensões: 2 dm, 5 dm e 7 dm. Sabe-se que, a partir do próximo ano, as caixas serão substituídas por outras semelhantes, de modo que a capacidade de cada uma seja oito vezes a capacidade da anteriormente produzida. Nessas condições, qual será a área total da superfície da nova caixa?

**50** Sabe-se que a altura de uma pirâmide mede 20 cm e sua base é um quadrado cujo lado mede 12 cm. Calcule a medida da altura e da aresta da base de uma pirâmide semelhante à primeira cujo volume é igual a 120 cm³.

**51** Uma das arestas de um tetraedro de volume $80\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ mede 10 cm. Determine o volume de um tetraedro semelhante ao primeiro, sabendo que a aresta homóloga mede 5 cm.

**52** Considere uma pirâmide regular hexagonal, $\mathbf{P_1}$, em que a aresta da base mede 6 dm e cuja altura mede 12 dm. Se uma seção transversal é feita em $\mathbf{P_1}$, a 4 dm de seu vértice, determine:

**a)** a área da seção transversal;

**b)** o volume de $\mathbf{P_2}$, pirâmide obtida da seção transversal.

**53** A altura de uma pirâmide regular quadrangular é 45 cm. Ela é intersectada, a 15 cm de seu vértice, por um plano paralelo à base, que determina uma nova pirâmide e um tronco de pirâmide. Sabendo que a aresta da base da pirâmide primitiva é 60 cm, determine:

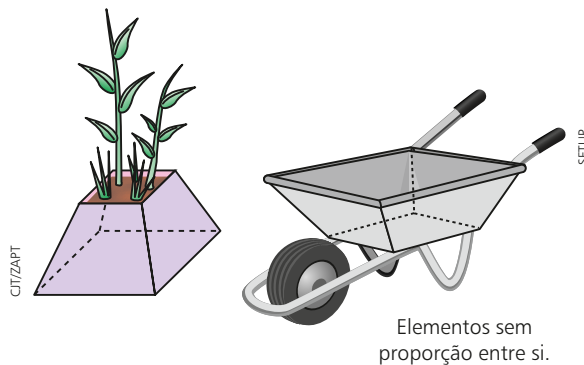
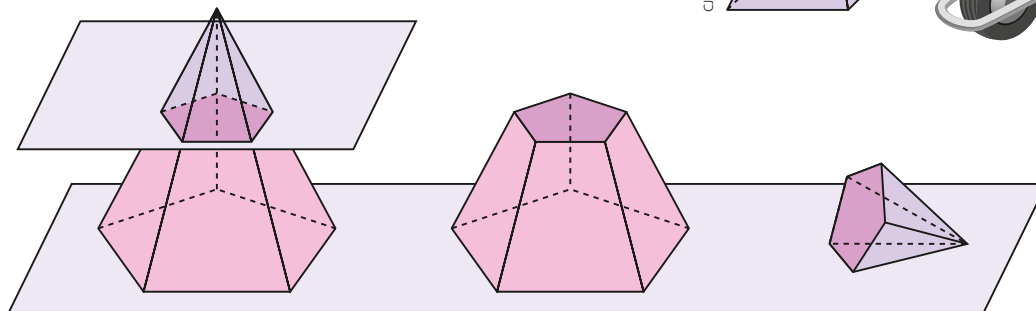
**a)** a medida da aresta da base da pirâmide obtida;

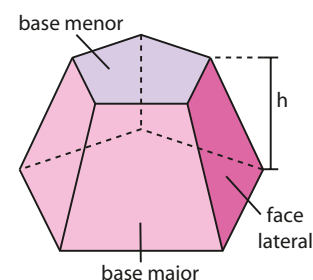
**b)** a razão entre as áreas totais da pirâmide primitiva e da pirâmide obtida.

## Tronco de pirâmide

Observe o vaso e a caçamba de um carrinho de mão que estão representados nas figuras ao lado.

Elas são obtidas a partir da seção de uma pirâmide por um plano paralelo à sua base. Esses poliedros recebem o nome de **tronco de pirâmide**.

Elementos sem proporção entre si.

Vamos reconhecer os elementos principais de um tronco de pirâmide:

- **base maior do tronco**: é a base da pirâmide "original" ou "primitiva".
- **base menor do tronco**: é a seção determinada pelo plano que intersecta a pirâmide. Essa seção é um polígono semelhante ao da base da pirâmide.
- **altura do tronco (h)**: é a distância entre os planos das bases.
- **faces laterais do tronco**: são as superfícies planas limitadas por trapézios.

### Áreas

- **Áreas das bases ($A_B$ e $A_b$)**

  Área da base maior ($\mathbf{A_B}$): é a área do polígono da base maior.

  Área da base menor ($\mathbf{A_b}$): é a área de um polígono semelhante ao da base maior.

- **Área lateral ($A_\ell$)**

  A área lateral ($\mathbf{A_\ell}$) é a soma das áreas das faces laterais.

- **Área total ($A_t$)**

  Somando-se as áreas das duas bases com a área lateral, obtém-se a área total:

$$A_t = A_B + A_b + A_\ell$$

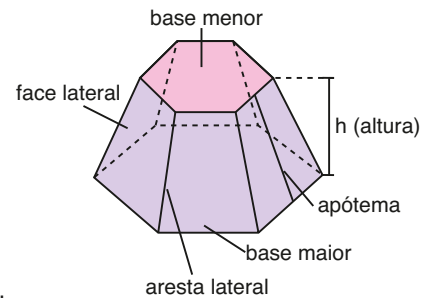
### Volume

O volume de um tronco de pirâmide pode ser calculado por meio da diferença entre o volume da pirâmide original e o volume da pirâmide obtida a partir da seção.

## Tronco de pirâmide regular

O tronco de bases paralelas obtido de uma pirâmide regular é denominado **tronco de pirâmide regular**.

Num tronco de pirâmide regular:

- as **arestas laterais** são congruentes entre si;
- as **bases** são polígonos regulares semelhantes;
- as **faces laterais** são trapézios isósceles congruentes entre si;
- a altura de qualquer face lateral chama-se **apótema do tronco**.

**EXEMPLO 8**

Vamos calcular a área total e o volume de um tronco de pirâmide regular quadrangular, cujas arestas das bases medem 24 cm e 36 cm e cuja aresta lateral mede 10 cm.

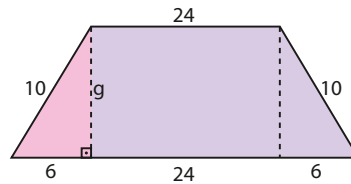
- Área da base menor

$$A_b = (24 \text{ cm})^2 = 576 \text{ cm}^2$$

- Área da base maior

$$A_B = (36 \text{ cm})^2 = 1\,296 \text{ cm}^2$$

- Área lateral

$$A_\ell = 4 \cdot (\text{área de um trapézio isósceles})$$

**g**: apótema do tronco (altura do trapézio)

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, obtemos:

$$10^2 = g^2 + 6^2 \Rightarrow 100 = g^2 + 36 \Rightarrow g = 8 \text{ cm}$$

Assim:

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{(36 + 24) \cdot 8}{2} \Rightarrow A_\ell = 960 \text{ cm}^2$$

- Área total

$$A_t = A_\ell + A_b + A_B = 960 \text{ cm}^2 + 576 \text{ cm}^2 + 1\,296 \text{ cm}^2 = 2\,832 \text{ cm}^2$$

Logo, a área total desse tronco de pirâmide é 2 832 cm².

- Volume

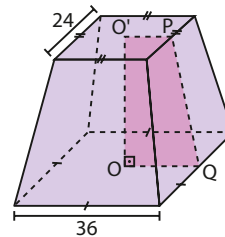
Para determinar o volume desse tronco, é necessário conhecer a medida de sua altura (**h**).

Temos:

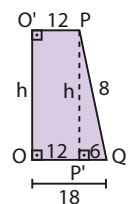
**O** e **O'** são centros das bases;

$\overline{OO'}$ = altura do tronco

No triângulo PP'Q, temos:

$8^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow h^2 = 28 \Rightarrow h = 2\sqrt{7}$ cm

$$OQ = \frac{36}{2} = 18$$

$$O'P = \frac{24}{2} = 12$$

$$PQ = g = 8$$

Cálculo do volume:

Vamos imaginar a pirâmide que deu origem a esse tronco:

**h**: medida da altura do tronco

**x**: medida da altura da pirâmide obtida

x + h: medida da altura da pirâmide original

A razão entre os elementos lineares das duas pirâmides é $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$.

Podemos, então, escrever: $\frac{h + x}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2h$

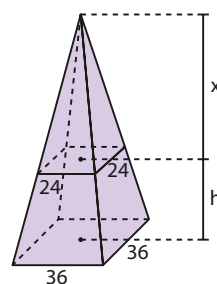
mas $h = 2\sqrt{7}$ cm $\Rightarrow x = 4\sqrt{7}$ cm; $h + x = 6\sqrt{7}$ cm

- Volume da pirâmide original:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36^2 \cdot 6\sqrt{7} \Rightarrow V = 2\,592\sqrt{7} \text{ cm}^3$$

- Volume da nova pirâmide:

$$V' = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 4\sqrt{7} \Rightarrow V' = 768\sqrt{7} \text{ cm}^3$$

Logo, o volume do tronco é:
$2\,592\sqrt{7} \text{ cm}^3 - 768\sqrt{7} \text{ cm}^3 = 1\,824\sqrt{7} \text{ cm}^3$

**PENSE NISTO:**

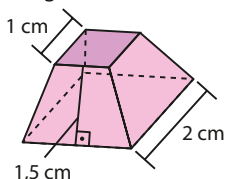
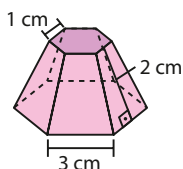
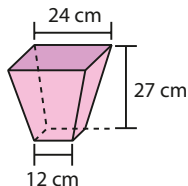
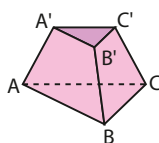
É possível calcular o volume de uma das pirâmides, conhecendo-se o volume da outra?

Sim; se $k = \frac{3}{2}$, então $k^3 = \frac{27}{8}$.
Assim, podemos calcular o volume de uma das pirâmides e usar essa razão para obter o volume da outra.

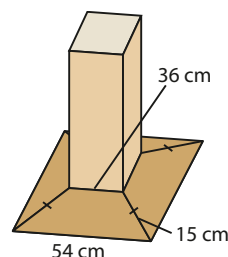
## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**54** Calcule a área total de cada tronco seguinte:

**a)** quadrangular regular

**b)** hexagonal regular

**55** Um vaso tem o formato de um tronco de pirâmide regular de base quadrada, como mostrado na figura. Quantos litros de água são necessários para encher totalmente esse vaso? Considere desprezível sua espessura.

**56** A figura mostra um tronco de pirâmide regular em que as bases são triângulos equiláteros cujos lados medem 8 cm e 12 cm. Sabendo que a área lateral do tronco é igual a 180 cm², determine:

**a)** sua área total;

**b)** a medida do seu apótema.

**57** Um suporte de mesa, feito de madeira maciça, é constituído de um prisma reto cuja base quadrada coincide com a base menor de um tronco de pirâmide regular quadrangular, como mostra a figura. Sabe-se que a altura do prisma é 20 cm.

**a)** Quantos metros cúbicos de madeira foram usados na confecção desse suporte? Considere $\sqrt{7} \simeq 2,65$.

**b)** Deseja-se pintar a superfície desse suporte com um material impermeabilizante cujo preço é R$ 28,00 o litro. Sabendo que cada 1000 cm² necessitam de 400 mL do impermeabilizante, determine o custo aproximado dessa pintura.

**58** As bases de um tronco de pirâmide são dois pentágonos regulares cujos lados medem 5 dm e 3 dm, respectivamente. Sendo essas bases paralelas e a medida do apótema do tronco de pirâmide 10 dm, determine a área lateral desse tronco.

**59** Calcule o volume de um tronco de pirâmide regular quadrangular de 4 dm de altura e cujas áreas das bases são iguais a 36 dm² e 144 dm².

# Complementos sobre poliedros

## Poliedros convexos

Observe os sólidos geométricos seguintes. Todos são exemplos de **poliedros**.

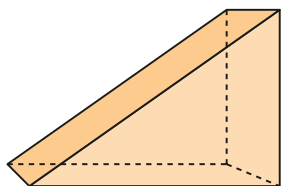



figura 1

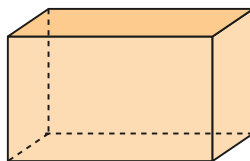



figura 2

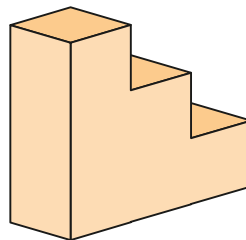



figura 3

Vamos lembrar que:

- a superfície de cada poliedro é formada por polígonos planos, chamados **faces** do poliedro;
- os lados dos polígonos são chamados **arestas** do poliedro;
- os vértices dos polígonos são os **vértices** do poliedro.

Assim, os poliedros representados nas figuras 1, 2 e 3 são tais que:

- figura 1: tem 5 faces, 9 arestas e 6 vértices;
- figura 2: tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices;
- figura 3: tem 10 faces, 24 arestas e 16 vértices.

Agora veja os mesmos poliedros representados acima, nos quais destacamos os planos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ que contêm, cada um, uma face de cada poliedro.

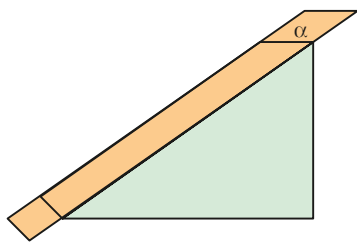
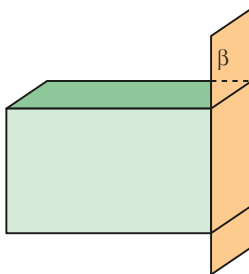
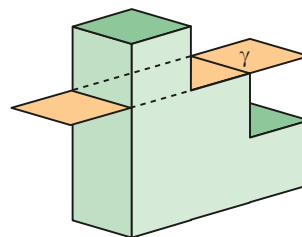



figura 1 figura 2 figura 3

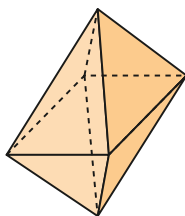
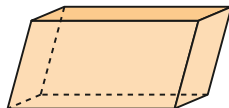
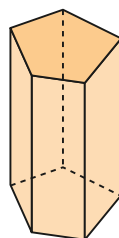
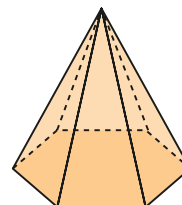
Note que $\alpha$ e $\beta$ deixam todas as outras faces dos poliedros em um mesmo semiespaço e que isso não ocorre com $\gamma$, que deixa algumas faces em semiespaços opostos.

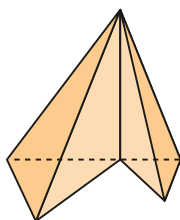
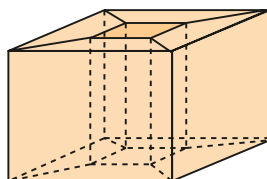
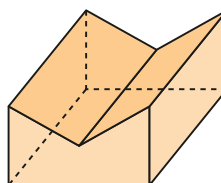
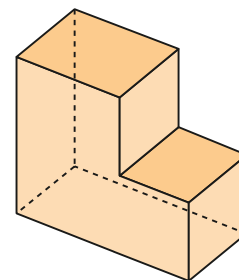
Nos poliedros das figuras 1 e 2, qualquer plano que contenha uma face deixa as demais faces no mesmo semiespaço. Por isso, esses poliedros são chamados de **poliedros convexos**.

No poliedro da figura 3, existe pelos menos um plano que contém uma face mas deixa as demais faces em dois semiespaços opostos. Por isso, esse poliedro é denominado **poliedro não convexo**.

**OBSERVAÇÃO**

A reunião das faces de um poliedro convexo recebe o nome de superfície poliédrica convexa.

São poliedros convexos:

poliedro 1

poliedro 2

poliedro 3

poliedro 4

São poliedros não convexos:

poliedro 5

poliedro 6

poliedro 7

poliedro 8

Em várias partes do mundo, modernas construções de engenharia nos remetem a poliedros convexos e não convexos.

SEBASTIAN VIVALLO OÑATE/AGÊNCIA MAKRO/GETTY IMAGES

O edifício em *Las Condes* lembra um poliedro não convexo. Santiago, Chile, 2015.

JALES VALQUER/FOTOARENA

O edifício à esquerda na foto lembra um poliedro não convexo; já o edifício mais alto, à direita, lembra um poliedro convexo. São Paulo (SP), 2016.

BINGDIAN/THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Essa surpreendente construção (sede da Televisão Central da China) também lembra um poliedro não convexo. Pequim, China, 2015.

## Relação de Euler

Pode-se mostrar que para todo **poliedro convexo** vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

em que **V**, **A** e **F** são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces do poliedro. Essa relação foi demonstrada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Considerando-se os poliedros convexos do exemplo anterior, temos:

| | **V** | **A** | **F** | **V − A + F** |
|---|---|---|---|---|
| **Poliedro 1** | 6 | 12 | 8 | $6 - 12 + 8 = 2$ |
| **Poliedro 2** | 8 | 12 | 6 | $8 - 12 + 6 = 2$ |
| **Poliedro 3** | 10 | 15 | 7 | $10 - 15 + 7 = 2$ |
| **Poliedro 4** | 7 | 12 | 7 | $7 - 12 + 7 = 2$ |

Vamos fazer a contagem de **V**, **A** e **F** para os poliedros não convexos do exemplo 9:

| | **V** | **A** | **F** | **V − A + F** |
|---|---|---|---|---|
| **Poliedro 5** | 6 | 10 | 7 | $6 - 10 + 7 = 3$ |
| **Poliedro 6** | 16 | 32 | 16 | $16 - 32 + 16 = 0$ |
| **Poliedro 7** | 10 | 15 | 7 | $10 - 15 + 7 = 2$ |
| **Poliedro 8** | 12 | 18 | 8 | $12 - 18 + 8 = 2$ |

Os poliedros não convexos 5 e 6 não satisfazem a relação de Euler; os poliedros não convexos 7 e 8 satisfazem a relação de Euler. Isso nos sugere que um poliedro não convexo pode ou não satisfazer a relação de Euler.

Se um poliedro (convexo ou não) satisfaz a relação de Euler, diz-se que é um **poliedro euleriano**.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**7** Quantas arestas e quantos vértices tem um poliedro convexo de 20 faces, todas triangulares?

**Solução:**

Determinemos o número **A** de arestas. Como um triângulo possui 3 lados, nas 20 faces triangulares teríamos 60 arestas ($20 \cdot 3 = 60$). Nesse cálculo, cada aresta, por ser comum a duas faces, foi contada duas vezes.

Então:

$$A = \frac{60}{2} = 30$$

Temos $F = 20$ e $A = 30$.

Como o poliedro é convexo, ele satisfaz a relação de Euler. Daí:

$$V - 30 + 20 = 2$$
$$V = 12$$

Esse poliedro possui 30 arestas e 12 vértices.

**8** Um poliedro convexo possui 1 face octogonal e 8 faces triangulares. Determine o número de arestas e vértices desse poliedro.

**Solução:**

Vamos determinar o número **A** de arestas:

- em uma face octogonal, temos 8 arestas ($1 \cdot 8 = 8$).
- em oito faces triangulares, temos 24 arestas ($3 \cdot 8 = 24$).

Como cada aresta é comum a duas faces, no cálculo anterior cada aresta foi contada duas vezes:

Daí: $A = \frac{8 + 24}{2} = 16$

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 16 + 9 = 2 \Rightarrow V = 9$

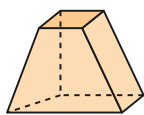
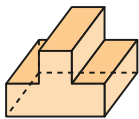
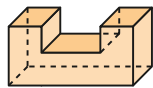
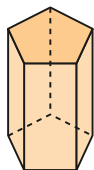
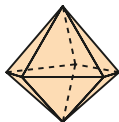
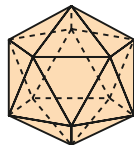
Esse poliedro possui 16 arestas e 9 vértices.

**PENSE NISTO:**

Você conhece algum poliedro nessas condições?

Possível resposta: pirâmide octogonal.

## EXERCÍCIOS

**60** Dados os poliedros representados nas figuras:

**a)** classifique-os em convexo ou não convexo;

**b)** determine o número **V** de vértices, **A** de arestas, e **F** de faces de cada um deles;

**c)** indique quais são eulerianos.

**61** Um poliedro convexo possui 12 faces, todas pentagonais. Qual é o número de arestas e vértices desse poliedro?

**62** Um poliedro convexo composto de 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais foi confeccionado inspirado numa bola de futebol. Determine o número de arestas e o número de vértices desse poliedro.

**63** Um poliedro convexo possui 13 faces, das quais 6 são triângulos, 6 são retângulos e 1 é um hexágono. Qual é o número de vértices desse poliedro?

**64** Um poliedro convexo possui apenas faces triangulares e quadrangulares. Se esse poliedro tem 20 arestas e 10 vértices, determine o número de faces de cada tipo.

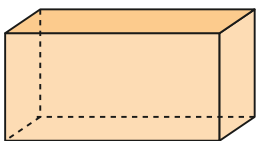
## Poliedros de Platão

Um poliedro é chamado **poliedro de Platão** se satisfaz três condições:

- 1ª condição: Todas as faces têm o mesmo número **n** de arestas.
- 2ª condição: Todos os vértices são pontos em que concorre o mesmo número **m** de arestas.
- 3ª condição: O poliedro é euleriano, isto é, satisfaz a relação de Euler.

Aplicando as condições, vejamos se os poliedros dos exemplos abaixo são poliedros de Platão:

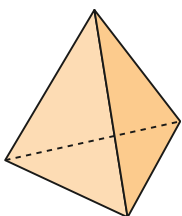
EXEMPLO **10**

Todo paralelepípedo é um poliedro de Platão, pois:

1ª) todas as faces são quadriláteros ($n = 4$);

2ª) em cada um de seus vértices concorrem três arestas ($m = 3$);

3ª) $V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$, portanto o poliedro é euleriano.

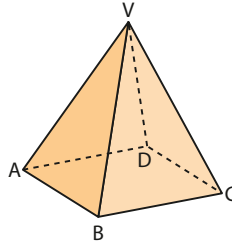
EXEMPLO **11**

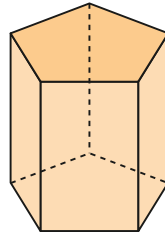
Todo tetraedro é um poliedro de Platão, pois:

1ª) todas as faces são triângulos ($n = 3$);

2ª) cada um de seus vértices é ponto de encontro de três arestas ($m = 3$);

3ª) é euleriano, pois $V - A + F = 4 - 6 + 4 = 2$.

EXEMPLO **12**

Uma pirâmide quadrangular não é um poliedro de Platão, pois sua base é um quadrilátero e suas faces laterais são triângulos. Além disso, em **V** concorrem 4 arestas e em **A**, por exemplo, concorrem 3 arestas.

EXEMPLO **13**

Um prisma reto pentagonal não é um poliedro de Platão, pois suas bases são pentágonos e suas faces laterais são quadriláteros.

## Propriedade

Existem cinco, e somente cinco, tipos de poliedros de Platão.

**Demonstração:**

É preciso mostrar que as três condições que caracterizam um poliedro de Platão são satisfeitas apenas para 5 tipos de poliedros.

- 1ª condição: Cada uma das **F** faces do poliedro tem **n** arestas (com $n \geqslant 3$) e, como cada aresta está contida em duas faces, temos:

$$n \cdot F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n} \quad (1)$$

- 2ª condição: Cada um dos **V** vértices do poliedro é ponto de concorrência ("encontro") de **m** arestas (com $m \geqslant 3$) e, como cada aresta contém dois vértices, temos:

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m} \quad (2)$$

- 3ª condição: Como o poliedro é euleriano, temos:

$$V - A + F = 2 \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3), temos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

Dividindo os dois membros por 2A (com $A \neq 0$), obtemos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \quad (4)$$

Já sabemos que $n \geqslant 3$ e $m \geqslant 3$. Notemos, porém, que **m** e **n** não podem ser ambos maiores que 3, pois se isso ocorresse teríamos:

$$\left.\begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geqslant 4 \Rightarrow \dfrac{1}{m} \leqslant \dfrac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geqslant 4 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leqslant 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant 0$$

Isso contraria a igualdade (4), uma vez que $\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} > 0$, pois $A > 0$.

Concluímos então que, nos poliedros de Platão devemos ter $m = 3$ ou $n = 3$.

- Se $m = 3$ (em cada vértice do poliedro concorrem 3 arestas), retomando a igualdade (4), temos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow n < 6$$

  Então, $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$.

  Assim, há três poliedros nos quais concorrem 3 arestas em cada vértice:

  $\underset{(1)}{m = 3 \text{ e } n = 3}$; $\underset{(2)}{m = 3 \text{ e } n = 4}$; $\underset{(3)}{m = 3 \text{ e } n = 5}$

- Se $n = 3$ (todas as faces do poliedro são triangulares), obtemos, em (4):

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow m < 6$$

  Assim, podemos ter:

  $\underset{(4)}{n = 3 \text{ e } m = 5}$; $\underset{(5)}{n = 3 \text{ e } m = 4}$; $\underset{\text{(coincide com 1)}}{n = 3 \text{ e } m = 3}$

Reunindo os resultados obtidos para $m = 3$ ou para $n = 3$, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares do quadro seguinte, que mostra que existem exatamente cinco tipos de poliedros de Platão:

| m | n |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 3 | 4 |
| 3 | 5 |
| 5 | 3 |
| 4 | 3 |

**EXEMPLO 14**

Vamos caracterizar e representar o poliedro de Platão que possui faces pentagonais:

- Como as faces são pentagonais, então $n = 5$.
- Recorrendo ao quadro anterior, para $n = 5$, devemos ter $m = 3$.
- Em cada face há 5 arestas; lembrando que cada aresta é comum a duas faces, temos:

$$5F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{5} \quad (1)$$

- Em cada vértice concorrem 3 arestas; lembrando que cada aresta contém dois vértices, temos:

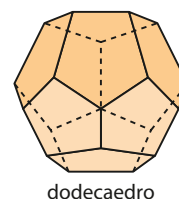
$$3V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{3} \quad (2)$$

- Usando a relação de Euler, (1) e (2) temos:

$$\frac{2A}{3} - A + \frac{2A}{5} = 2 \Rightarrow A = 30$$

  Substituindo **A** por 30 em (1), obtemos $F = 12$, e em (2), obtemos $V = 20$.

  Trata-se, portanto, de um poliedro convexo de 12 faces ($F = 12$) pentagonais ($n = 5$), chamado dodecaedro (nome determinado pelo número de faces).

dodecaedro

## Poliedros regulares

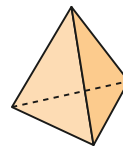
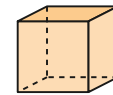
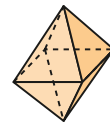
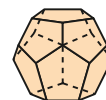
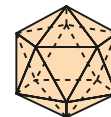
Um poliedro convexo é regular se:

- suas faces são polígonos regulares e congruentes.
- em cada vértice concorre o mesmo número de arestas.

No poliedro regular é possível notar que:

- todas as faces têm o mesmo número de arestas, pois as faces são congruentes.
- todos os vértices são pontos de interseção de um mesmo número de arestas.
- ele satisfaz a relação de Euler, pois é convexo.

Desse modo, todo poliedro regular é poliedro de Platão.

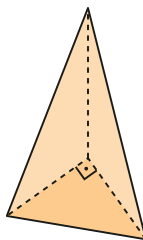
Existem, dessa forma, cinco tipos de poliedros regulares, representados ao lado.

tetraedro regular
($m = 3$ e $n = 3$)

hexaedro regular (cubo)
($m = 3$ e $n = 4$)

octaedro regular
($m = 4$ e $n = 3$)

dodecaedro regular
($m = 3$ e $n = 5$)

icosaedro regular
($m = 5$ e $n = 3$)

## EXERCÍCIOS

**65** Observe o tetraedro representado ao lado e responda às perguntas seguintes, justificando.

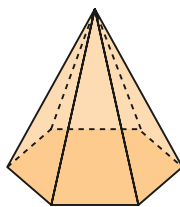
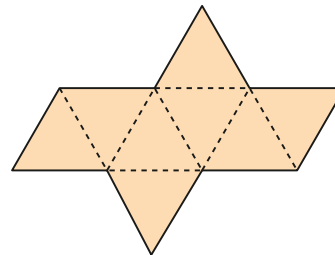
**a)** Esse poliedro é euleriano?

**b)** Esse poliedro é de Platão?

**c)** Esse poliedro é regular?

**66** Observe a pirâmide regular hexagonal representada e responda às questões seguintes, justificando.

**a)** Esse poliedro é euleriano?

**b)** Esse poliedro é de Platão?

**c)** Esse poliedro é regular?

**67** Observe a planificação da superfície de um poliedro, em que todos os segmentos representados são congruentes.

**a)** Qual é o nome desse poliedro? Caracterize-o. Faça sua representação.

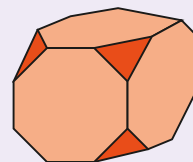
**b)** Esse poliedro é regular?

## DESAFIO

(Unifesp-SP) Um poliedro é construído a partir de um cubo de aresta $a > 0$, cortando-se em cada um de seus cantos uma pirâmide regular de base triangular equilateral (os três lados da base da pirâmide são iguais). Denote por **x**, $0 < x \leq \frac{a}{2}$, a aresta lateral das pirâmides cortadas.

face lateral das pirâmides cortadas

**a)** Dê o número de faces do poliedro construído.

**b)** Obtenha o valor de **x**, $0 < x \leq \frac{a}{2}$, para o qual o volume do poliedro construído fique igual a cinco sextos do volume do cubo original. A altura de cada pirâmide cortada, relativa à base equilateral, é $\frac{x}{\sqrt{3}}$.

# CAPÍTULO 9
# Corpos redondos

## Cilindro

Observe abaixo alguns objetos que encontramos no nosso dia a dia.

FOTOS: CRISTINA XAVIER

Todos esses objetos lembram uma forma geométrica chamada **cilindro**, que estudaremos neste tópico.

Note que a lata mostrada na figura ao lado lembra a forma de um sólido com as seguintes características:

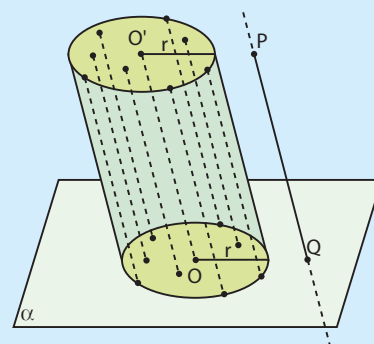
THINKSTOCK/GETTY IMAGES

- apresenta dois círculos com raios de medidas iguais que estão contidos em planos paralelos;
- sua superfície lateral é constituída por todos os segmentos de reta de igual comprimento, paralelos à reta que contém os centros dos círculos e que têm extremidades nas circunferências desses círculos.

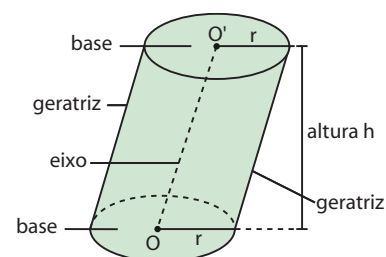
Por essas razões, podemos afirmar que a lata tem a forma de um **cilindro**.

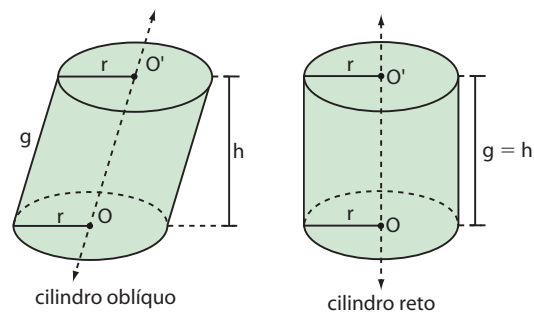
Consideremos um círculo de centro **O** e raio de medida **r**, contido em um plano $\alpha$, e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intersecta $\alpha$.

Tomemos segmentos de reta paralelos e congruentes a $\overline{PQ}$, cada um deles com uma extremidade em um ponto do círculo e com a outra extremidade em um mesmo semiespaço determinado por $\alpha$.

A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado **cilindro circular** ou, simplesmente, **cilindro**.

### Elementos e classificação

No cilindro representado ao lado, temos:

- os círculos de centros **O** e **O**' e raio de medida **r**, contidos em planos paralelos, chamados **bases** do cilindro;
- os segmentos paralelos a $\overline{OO'}$, com extremidades em pontos das circunferências das bases, chamados **geratrizes** do cilindro;
- a reta $\overleftrightarrow{OO'}$, que é o **eixo** do cilindro;
- a distância, entre os planos das bases, que é a **altura** do cilindro.

Quanto à inclinação da geratriz em relação aos planos de suas bases, um cilindro classifica-se em:

- **cilindro oblíquo**, se a geratriz é oblíqua aos planos das bases;
- **cilindro reto**, se a geratriz é perpendicular aos planos das bases. Nesse caso, a geratriz é a altura do cilindro.

# Áreas do cilindro circular reto

## Área da base ($A_b$)

A área da base é a área de um círculo de raio de medida **r**.

$$A_b = \pi r^2$$

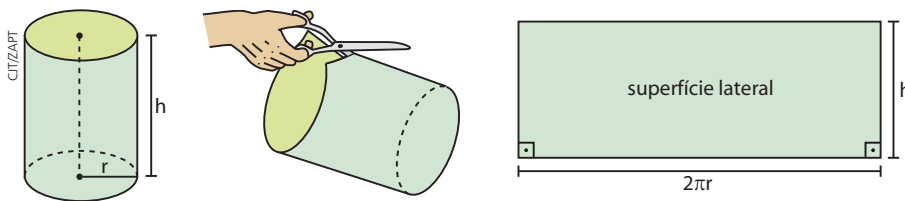
## Área lateral ($A_\ell$)

Dá-se o nome de **área lateral** à área de um retângulo de base $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e altura **h**, em que **r** é a medida do raio da base do cilindro e **h** a medida da altura do cilindro.

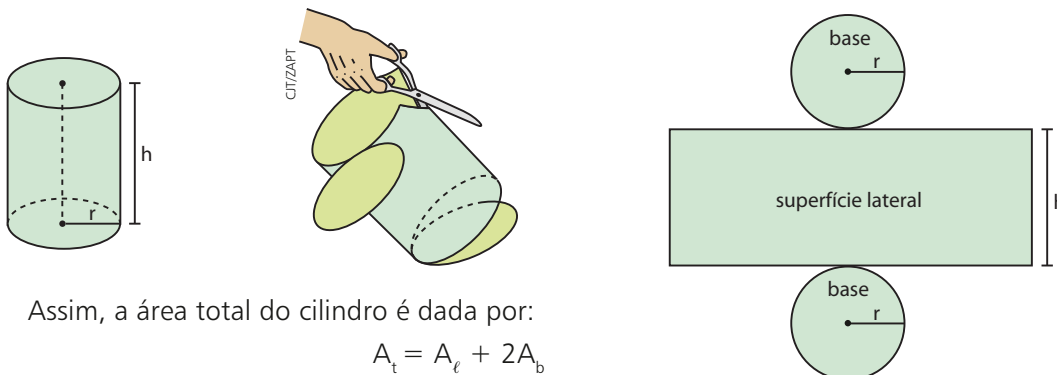
Isso pode ser visualizado se planificarmos a superfície lateral do cilindro.

**OBSERVAÇÃO**

O cilindro circular reto é também chamado **cilindro de revolução**, pelo fato de ser gerado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados.

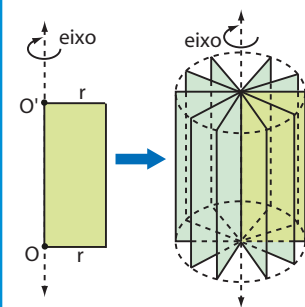
A reta $\overline{OO'}$ é o eixo de rotação.

Assim, $A_\ell$ = área de um retângulo $\Rightarrow$ $A_\ell = 2\pi r \cdot h$

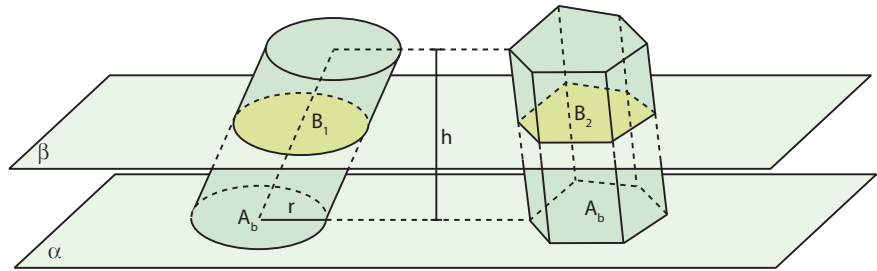
## Área total ($A_t$)

A **área total** de um cilindro é a soma da área da superfície lateral com a área dos círculos das bases.

Assim, a área total do cilindro é dada por:

$$A_t = A_\ell + 2A_b$$

Substituindo $A_\ell = 2\pi r \cdot h$ e $A_b = \pi r^2$, temos:

$$A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi r \cdot (h + r)$$

## Volume (V) do cilindro

Consideremos um cilindro de altura de medida **h** e área da base $A_b$. Consideremos também um prisma de altura de medida **h** e área da base $A_b$. Note que o cilindro e o prisma têm alturas iguais e bases equivalentes.

Suponhamos que os dois sólidos tenham as bases contidas em um mesmo plano α e fiquem no mesmo semiespaço de origem α. Qualquer plano β paralelo a α que secione o cilindro também seciona o prisma, e as seções $B_1$ e $B_2$ têm áreas iguais a $A_b$, pois são congruentes às respectivas bases. Então, pelo princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma têm volumes iguais.

$$V_{cilindro} = V_{prisma}$$

Como $V_{prisma} = A_b \cdot h$, então o volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela medida da altura:

$$V_{cilindro} = A_b \cdot h$$

Como $A_b = \pi r^2$, temos:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

**EXEMPLO 1**

Pretende-se pintar externamente a base inferior e a superfície lateral de um vaso que tem a forma de um cilindro reto em que o diâmetro da base mede 40 cm e a altura mede 36 cm. Considerando a espessura do vaso desprezível, vamos usar $\pi \simeq 3$ para calcular a área da superfície a ser pintada e a maior quantidade de terra que pode ser colocada em seu interior.

Como r = 20 cm e h = 36 cm, temos:

A = área da superfície a ser pintada $\Rightarrow A = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 3 \cdot 20^2 + 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 36 \Rightarrow A = 5\,520\ cm^2$

V = volume do vaso $\Rightarrow V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = 3 \cdot 20^2 \cdot 36 \Rightarrow V = 43\,200\ cm^3$

Logo, a área da superfície a ser pintada é 5 520 $cm^2$ e o volume máximo de terra que pode ser colocado no vaso é 43 200 $cm^3$.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

**1** Uma vela tem a forma de um cilindro reto, com área total igual a $108\pi\ cm^2$ e medida do raio da base igual a $\frac{1}{5}$ da medida da altura. Determine sua área lateral e seu volume.

**Solução:**

Sendo **r** a medida do raio da base e **h** a medida da altura, temos:

$$r = \frac{1}{5}h \text{ e } A_t = 108\pi$$

Como $A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$, então $108\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow rh + r^2 = 54$.

Substituindo $r = \frac{1}{5}h$, obtemos:

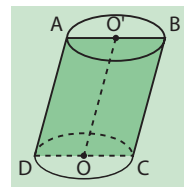
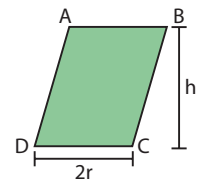
$$\frac{1}{5}h \cdot h + \left(\frac{1}{5}h\right)^2 = 54 \Rightarrow \frac{h^2}{5} + \frac{h^2}{25} = 54 \Rightarrow 6h^2 = 1\,350 \Rightarrow h^2 = 225 \Rightarrow h = 15 \text{ cm}$$

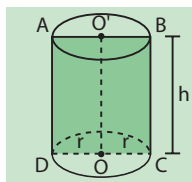
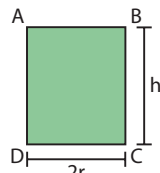
Temos, então: $r = \frac{1}{5}h \Rightarrow r = \frac{1}{5} \cdot 15 \Rightarrow r = 3$ cm.

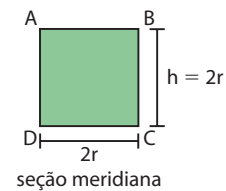
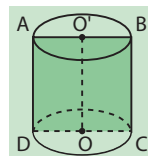
Logo, $\begin{cases} A_\ell = 2\pi \cdot r \cdot h \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 15 = 90\pi \\ V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 = 135\pi \end{cases}$, ou seja, a área lateral é $90\pi$ cm² e o volume é $135\pi$ cm³.

## Seção meridiana e cilindro equilátero

Sejam **O** e **O'** os centros dos círculos das bases de um cilindro e $\overleftrightarrow{OO'}$ o eixo do cilindro. **Seção meridiana** de um cilindro é a interseção deste com um plano que contém o segmento $\overline{OO'}$.

A seção meridiana de um cilindro oblíquo é um paralelogramo.

cilindro oblíquo

seção meridiana

A seção meridiana de um cilindro reto é um retângulo de dimensões 2r (medida do diâmetro da base) e **h** (medida da altura do cilindro).

cilindro reto

seção meridiana

**Cilindro equilátero** é um cilindro reto cuja seção meridiana é um quadrado. Num cilindro equilátero, $g = h = 2r$.

seção meridiana

**EXEMPLO 2**

Vejamos como obter a área lateral $\mathbf{A_\ell}$, a área total $\mathbf{A_t}$ e o volume **V** de um cilindro equilátero cujo raio mede 3 cm.

- Área lateral

$\left.\begin{matrix} A_\ell = 2\pi rh \\ h = 2r \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_\ell = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_\ell = 36\pi$

Logo, a área lateral desse cilindro é $36\pi$ cm².

- Área total

$\left.\begin{matrix} A_t = A_\ell + 2A_b \\ A_b = \pi r^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_t = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2 \Rightarrow A_t = 6 \cdot \pi \cdot 3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 54\pi$

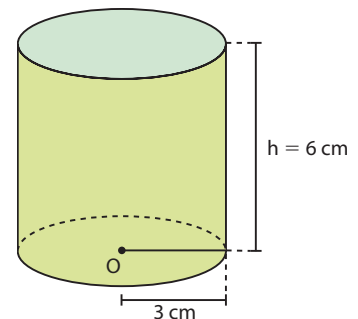
Logo, a área total desse cilindro é $54\pi$ cm².

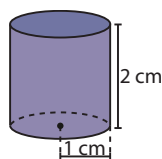
- Volume

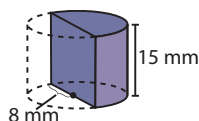
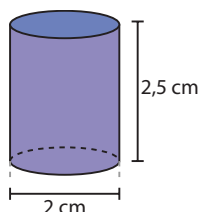
$\left.\begin{matrix} V = \pi r^2 h \\ h = 2r \end{matrix}\right\} \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \Rightarrow V = 2 \cdot \pi \cdot 3^3 \Rightarrow V = 54\pi$

Logo, o volume desse cilindro é $54\pi$ cm³.

## EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

**1** Calcule a área lateral, a área total e o volume dos sólidos cujas medidas estão indicadas nas figuras.

**a)** cilindro equilátero

**b)** cilindro reto

**c)** semicilindro reto

**2** Uma lata de óleo cilíndrica possui as seguintes medidas internas: raio da base = 4 cm e altura = 22 cm. Nessa lata, é possível armazenar mais que um litro de óleo?

**3** Determine o volume de um cilindro, sabendo que sua área lateral é igual a $250\pi$ cm² e que o raio de sua base mede 10 cm.

**4** Um reservatório cilíndrico de armazenamento de água possui internamente 8 m de diâmetro e 14 m de altura e está vazio. Se ele receber água à razão de 160 litros por minuto, qual é o menor número inteiro de dias necessários para enchê-lo completamente? Use $\pi \simeq \frac{22}{7}$.

**5** O perímetro da seção meridiana de um cilindro reto mede 28 cm. Sabendo que a área lateral do cilindro é $48\pi$ cm², determine seu volume.

**6** Seja uma caixa-d'água, de formato cilíndrico, em que a área lateral é igual a $\frac{6\pi}{5}$ m² e o raio da base mede 80 cm. Determine:

**a)** a medida da altura dessa caixa;

**b)** a capacidade da caixa, em litros. Use $\pi \simeq 3,14$.

**7** Um recipiente cilíndrico tem 20 cm de altura e diâmetro interno de 10 cm. Determine quantos quilogramas de mercúrio são necessários para encher completamente esse vaso, sabendo que a densidade do mercúrio é 13,6 g/cm³. Use $\pi \simeq 3,14$.

**8** Um cilindro reto tem $30\pi$ m² de área lateral e $45\pi$ m³ de volume. Determine:

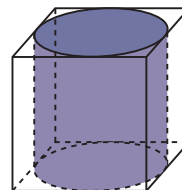
**a)** a medida de sua altura;

**b)** sua área total.

**9** Calcule a área total da superfície de um cilindro equilátero, sabendo que o seu volume é igual a $250\pi$ cm³.

**10** A planificação da superfície lateral de um cilindro reto tem dimensões 6 cm e 8 cm. Determine a área total e o volume do cilindro, considerando $\pi \simeq 3,1$.

**11** Um poço, com a forma de um cilindro reto, deve ser construído em um terreno plano. Se ele deve ter 24 dm de diâmetro por 140 dm de profundidade, quantos metros cúbicos de terra deverão ser removidos para sua construção? Considere $\pi \simeq \frac{22}{7}$.

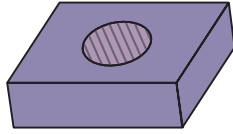
**12** Um cilindro está inscrito em um cubo cuja aresta mede 10 cm, conforme mostra a figura abaixo.

**a)** Determine, na ordem dada, a razão entre as áreas totais do cubo e do cilindro.

**b)** Determine os volumes do cubo e do cilindro.

**13** Para o intervalo de uma reunião de trabalho foi servido café em uma garrafa térmica cilíndrica, com as seguintes medidas internas: 18 cm de altura e 5 cm de raio de base. O café será servido em copinhos plásticos, também cilíndricos e com espessura desprezível, sendo 4 cm a medida do diâmetro da base e 4 cm a medida da altura.
Considere $\pi \simeq 3,1$.

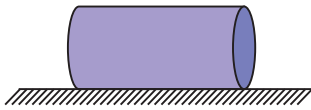
**a)** Se cada um dos 30 participantes quiser se servir uma única vez de café, enchendo completamente o copinho, haverá café suficiente para todos? Explique.

**b)** Os copinhos de plástico são fabricados a um custo de R$ 8,50 o metro quadrado e vendidos com 30% de lucro sobre o preço de custo do material. Na confecção de cada copinho, são acrescentados 25% de plástico, para reforçar sua "boca". Qual é o valor a ser pago por uma encomenda de 1 500 desses copinhos plásticos?

**14** Uma peça de madeira, com a forma de um prisma reto de base quadrada, tem em seu centro um furo cilíndrico de 2,8 cm de raio, conforme mostra a figura abaixo.

Se o prisma tem 10 cm de altura e o lado do quadrado da base mede 18 cm, então, considerando $\pi \simeq \frac{22}{7}$, determine:

**a)** o volume da peça;

**b)** a massa dessa peça, em quilogramas, considerando que a densidade da madeira é 0,93 g/cm$^3$.

**15** Um tambor de forma cilíndrica tem 2 m de comprimento e 1 m de diâmetro. Deseja-se encher o tambor com uma mistura de 90% de gasolina e 10% de álcool. Que volume de álcool será necessário? Use $\pi \simeq 3,14$.

**16** Dispõe-se de uma folha retangular de metal que tem 8 cm de largura por 12 cm de comprimento. A partir dessa folha, podem ser construídos dois tipos de tubo cilíndrico: $\mathbf{C_1}$, soldando-se os dois lados maiores, ou $\mathbf{C_2}$, soldando-se os outros dois lados. Determine qual das duas opções

**a)** forneceria um cilindro de maior volume.

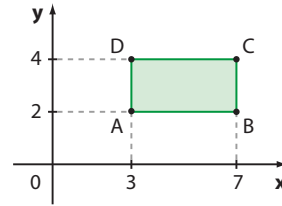
**b)** gastaria menos material na fabricação, considerando os tubos fechados.

**17** Uma construção em forma de uma torre circular cilíndrica possui 240 cm de medida do diâmetro interno e 50 cm de espessura. O volume de concreto usado na construção da torre foi de 449,5 m$^3$. Considerando $\pi \simeq 3,1$, determine a medida da altura da torre.

**18** Numa feira livre, o caldo de cana é vendido em dois recipientes cilíndricos: o copo grande, que tem 5 cm de raio da base e 12 cm de altura, e o copo médio, com 3 cm de raio da base e altura de 10 cm. Para o consumidor, qual copo é mais vantajoso, se o maior custa o triplo do médio?

**19** Em um experimento, um professor de Química usou um vasilhame cilíndrico de 6 cm de raio da base, contendo água até certa altura. Imediatamente após adicionar 16 pedras cúbicas de gelo, cada uma com aresta de 3 cm, o nível da água atingiu 12 cm. Qual era o nível da água antes da adição do gelo? Considere $\pi \simeq 3$.

**20** Com a rotação de um quadrado em torno de um de seus lados obtém-se um cilindro. Determine a medida do lado do quadrado, de modo que a área da seção meridiana do cilindro seja 50 cm$^2$.

**21** Observe a figura:

Qual é o volume do sólido obtido ao girarmos o retângulo ABCD em torno do eixo **y**?

**22** Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto, sendo 4 m a medida do raio da base e 10 m a medida da altura.
Inicialmente vazio, o tanque irá receber água a uma vazão constante.
Sejam **x** ($0 \leq x \leq 10$) a altura, em metros, atingida pela água no reservatório e V(x) o volume de água no reservatório, em metros cúbicos.

**a)** V(x) e **x** são grandezas diretamente proporcionais? Explique.

**b)** Faça a representação gráfica da função que relaciona V(x) e **x**, obtendo também a sua lei. Não é necessário usar aproximação para $\pi$.

**23** Deseja-se revestir com tecido a supercifície lateral e as bases de um cilindro reto. As medidas do diâmetro da base e da altura do cilindro são, respectivamente, 40 cm e 50 cm. Considere $\pi \simeq 3,1$.

**a)** É possível fazer esse revestimento com um retalho retangular do tecido medindo 1,3 m por 0,9 m? Explique. (Admita que os cortes no tecido possam proporcionar o máximo de aproveitamento, não havendo perdas.)

**b)** Em caso de resposta afirmativa do item *a*, determine a área do retalho que vai sobrar.

**24** Um reservatório na forma de cilindro reto possui, como medidas internas, altura igual a 9 m e raio da base igual a 4 m. O combustível contido no reservatório ocupa $\frac{5}{8}$ de sua capacidade. Considere $\pi \simeq 3$.

**a)** Qual é a altura (nível) do combustível no reservatório?

**b)** Se forem adicionados 2 400 L de combustível, quantos centímetros se elevará o seu nível no reservatório?

**c)** Qual é a quantidade máxima de litros de combustível que pode ser despejada no reservatório sem que haja transbordamento?

## A Matemática e as chuvas

O agravamento da crise hídrica na região Sudeste nos últimos anos, as secas “permanentes” em algumas regiões do Nordeste e os eventos climáticos extremos decorrentes do aquecimento global fizeram com que assuntos como *índice pluviométrico*, nível dos mananciais que abastecem a população, desperdício e consumo consciente de água ganhassem cada vez mais espaço no cotidiano do brasileiro.

Conhecer o índice pluviométrico de uma região é importante para que se reúnam informações úteis para a economia local (agricultura, pecuária etc.), além de auxiliar no planejamento urbano, prevendo usos mais adequados para áreas onde possam ocorrer desabamentos, deslizamentos de terra ou inundações, por exemplo.

E você? Quando ouve notícias com dados do índice pluviométrico, como “Neste mês, as chuvas em Curitiba superaram o índice de 100 mm”, sabe o que significa? Nesta atividade vamos construir o significado desse conceito.

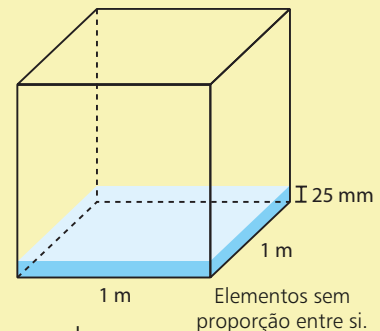
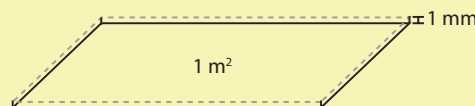
O índice pluviométrico indica a **quantidade de chuva por metro quadrado** registrada em certo local, em um determinado período de tempo.

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

**a)** Quando dizemos que o índice pluviométrico em certa região foi de 25 mm na semana, significa que, se tivéssemos um reservatório aberto de 1 m² da área de base, o nível de água atingiria a altura de 25 mm (veja a figura ao lado).

Qual é o volume total de água da chuva recolhida no reservatório ao lado? Expresse a resposta em m³ e, em seguida, transforme em litros.

25 mm
1 m
1 m

Elementos sem proporção entre si.

**b)** No índice pluviométrico, em certo período de tempo, cada 1 mm de precipitação corresponde a quantos litros de chuva por metro quadrado?

**c)** É claro que os pluviômetros, instrumentos usados para medir a quantidade de chuva, não precisam ter, como base, um quadrado de área 1 m².

Imagine que se pretenda medir a quantidade de chuva em uma região por meio de um cilindro reto graduado, ao qual se acopla um funil, como mostra a imagem ao lado.

Considere que a abertura maior do funil, por onde a chuva será coletada, tenha diâmetro com medida 10 cm e que, em certo dia, o volume de água da chuva coletado tenha sido de 300 mL (ou 0,3 L).

Qual foi, em mm, a precipitação nesse dia? Use $\pi \simeq 3{,}14$.

LUCIANO GALVÃO/EASYPIX

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

Por fim, vale a pena destacar que, em uma cidade grande, há várias estações de medição da intensidade da chuva. A média das intensidades de precipitação medidas nesses pontos, em certo período (mês, por exemplo), fornece o **índice pluviométrico** da região, no período considerado.

**Fontes de pesquisa:** SAEMA. Disponível em: <saema.com.br/portal/home/indice-pluviometrico>. Acesso em: 10 mar. 2016.; INPE. Disponível em: <www.inpe.br/acessoainformacao/node/402>. Acesso em: 10 mar. 2016.; Agritempo. Disponível em: <www.agritempo.gov.br/agritempo/jsp/Estatisticas/index.jsp>. Acesso em:10 mar. 2016.

Aplicações

# Conheça os pluviômetros oficiais

O pluviômetro é um dos instrumentos que permitem verificar a quantidade de chuva que cai em determinado local. Há outros meios, como os satélites meteorológicos, mas não oferecem a precisão de um pluviômetro quando há a necessidade de registrar pequenas quantidades de chuva. Há vários tipos de pluviômetros e, no Brasil, o Instituto Nacional de Meteorologia (Inmet) utiliza o modelo *Ville de Paris*.

1

O *Ville de Paris* tem um bocal de 22,57 centímetros de diâmetro, equivalente a uma área de captação de chuvas de 400 centímetros quadrados, medida recomendada pelas normas internacionais.

3

O controle diário permite fazer o levantamento da quantidade de chuva em um local ou em determinada região ao longo de um ano ou de outros períodos menores de tempo, por exemplo um mês. É possível fazer comparações dos índices entre diferentes cidades, estados e regiões do Brasil. Consegue-se investigar em que mês choveu mais ou menos, em que dias do mês ou do ano costuma chover com mais intensidade ou até saber quantos dias de chuva ocorreram em uma década. Todas essas informações podem ser transformadas em gráficos ou mapas, possibilitando melhor visualização das informações obtidas.

2

A leitura do pluviômetro é feita uma vez por dia, geralmente pela manhã, quando se recolhe a água acumulada. No *Ville de Paris* essa leitura é feita com o auxílio de uma proveta, tubo cilíndrico de vidro ou plástico graduado em milímetros.

Casa Paulistana de Comunicação

proveta graduada

4

Os dados pluviométricos podem ser utilizados de várias maneiras, tanto nas cidades quanto no campo. Permitem conhecer desde o momento certo para iniciar o manejo do solo e o plantio até planejar medidas preventivas contra enchentes e alagamentos, como fazem as prefeituras. O setor privado utiliza os dados para, por exemplo, planejar a melhor época para realizar obras.

pluviômetro Ville de Paris

SAMANTHA MARTINS/ESTAÇÃO METEOROLÓGICA DO IAG-USP

## Outros tipos de pluviômetros utilizados no Brasil:

**Paulista**, com abertura de 500 cm² para a captação de chuvas. É utilizado pelo governo do estado de São Paulo;

**Casella**, com área de captação de chuvas de 200 cm². É o mais utilizado pelo setor privado, que inclui empresas envolvidas com o agronegócio. Esses modelos geralmente são feitos de plástico resistente. Diferencial: incluem em sua estrutura a gradação em milímetros, o que dispensa o uso da proveta.

# Cone

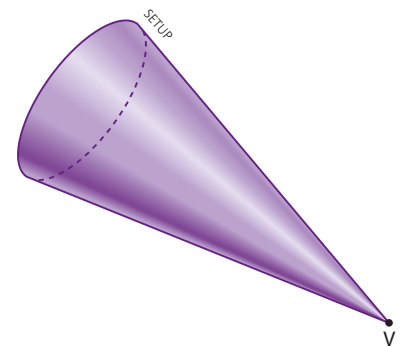
Os objetos e alimentos abaixo podem ser encontrados no nosso dia a dia. Todos se assemelham com a forma geométrica chamada **cone**, que vamos estudar neste tópico.

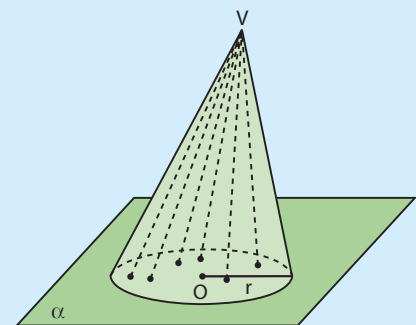
FOTOS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

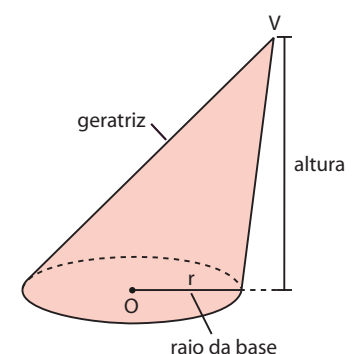
Elementos sem proporção entre si.

Observe a figura ao lado.
Ela apresenta as seguintes características:

- uma superfície circular, que chamaremos **base**;
- um ponto em **V**, que chamaremos **vértice**;
- superfície lateral constituída por todos os segmentos de reta que têm uma extremidade na circunferência do círculo da base e a outra extremidade no ponto **V**.

Essa figura tem a forma de um sólido chamado **cone**.

Consideremos um círculo de centro **O** e raio de medida **r**, contido em um plano $\alpha$, e um ponto **V**, não pertencente a $\alpha$.

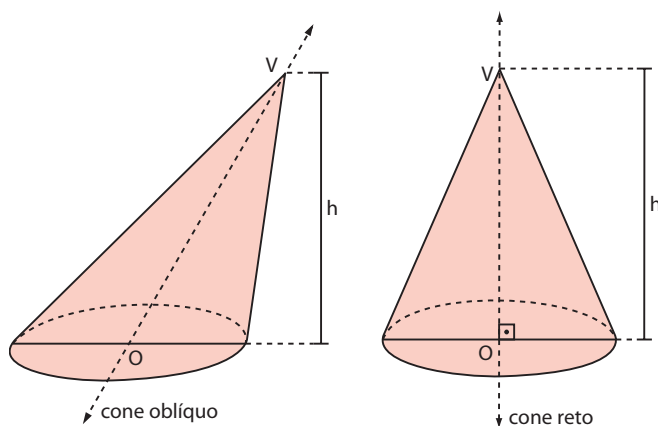
Chama-se **cone circular**, ou apenas cone, a reunião dos segmentos com uma extremidade em **V** e a outra em um ponto do círculo.

## Elementos e classificação

- O ponto **V** é o **vértice** do cone.
- O círculo de centro **O** e raio de medida **r** é a **base** do cone.
- Cada segmento com uma extremidade em **V** e a outra num ponto da circunferência da base é uma **geratriz** do cone.
- A distância do vértice ao plano da base é a **altura** do cone.

Quanto à inclinação da reta $\overleftrightarrow{VO}$ em relação ao plano da base, um cone classifica-se em:

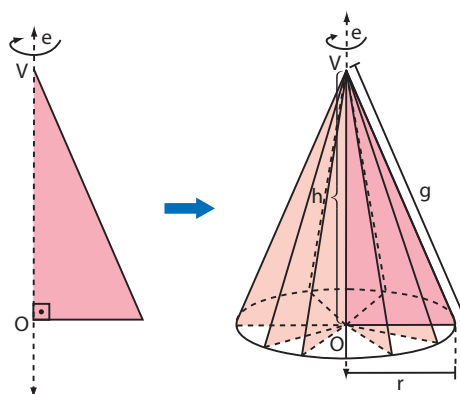
- **cone oblíquo**, se a reta $\overleftrightarrow{VO}$ é oblíqua ao plano da base;
- **cone reto**, se a reta $\overleftrightarrow{VO}$ é perpendicular ao plano da base. Nesse caso, $\overline{VO}$ é a altura do cone.

**PENSE NISTO:**

As geratrizes de um cone oblíquo são congruentes? E as de um cone reto?

Não; sim.

**OBSERVAÇÃO**

O cone circular reto é também chamado **cone de revolução**, pelo fato de ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.
Observe que em um cone de revolução vale a relação:

$$r^2 + h^2 = g^2$$

## Áreas do cone circular reto

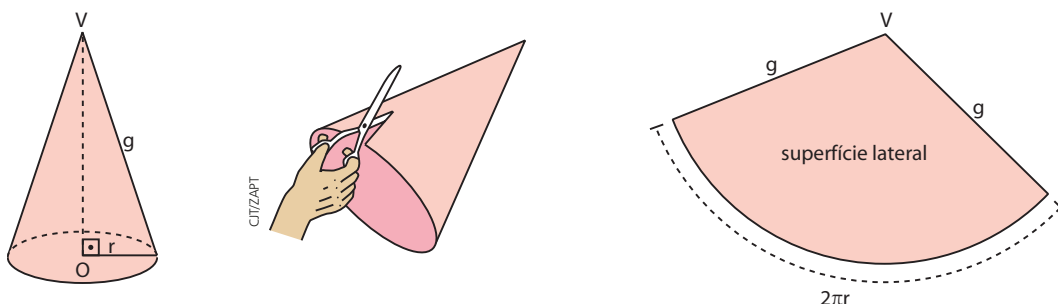
### Área da base ($A_b$)

A base do cone é um círculo de raio de medida **r**, então a **área da base** é:

$$A_b = \pi \cdot r^2$$

### Área lateral ($A_\ell$)

**Área lateral** é a área de um setor circular cujo raio mede **g** (medida da geratriz do cone) e cujo comprimento do arco é $2\pi r$ (perímetro da base).

A área lateral pode ser visualizada se planificarmos a superfície lateral do cone. Veja:

A área do setor circular de raio de medida **g** e comprimento de arco $2\pi r$, isto é, a área lateral $\mathbf{A_\ell}$, pode ser obtida por uma regra de três:

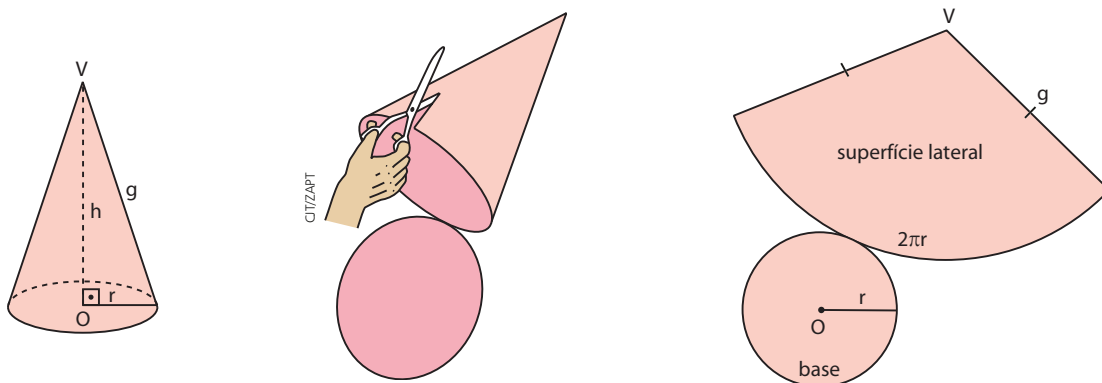
| comprimento do arco | | área do setor |
|---|---|---|
| $2\pi g$ | ——— | $\pi g^2$ |
| $2\pi r$ | ——— | $A_\ell$ |

Então:

$$A_\ell = \frac{(\pi g^2) \cdot (2\pi r)}{2\pi g} \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot r \cdot g$$

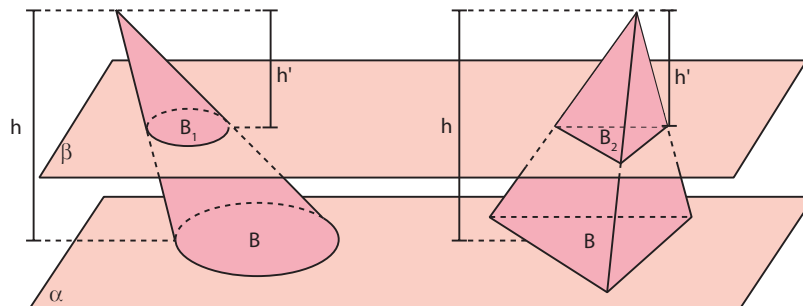
## Área total ($A_t$)

A superfície total de um cone é a reunião da superfície lateral com o círculo da base. Assim, a **área total** do cone é dada por:

$$A_t = A_\ell + A_b$$

Substituindo $A_\ell = \pi \cdot r \cdot g$ e $A_b = \pi \cdot r^2$, temos:

$$A_t = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow A_t = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

## Volume (V) do cone

Consideremos um cone de altura de medida **h** e base circular com área **B**. Consideremos também um tetraedro cuja altura mede **h** e base com área **B**. Note que o cone e o tetraedro têm alturas congruentes e bases equivalentes.

Suponhamos que os dois sólidos tenham as bases contidas em um mesmo plano $\alpha$ e que seus vértices estejam no mesmo semiespaço de origem $\alpha$. Qualquer plano $\beta$ paralelo a $\alpha$ que secione o cone a uma distância **h**' do vértice também seciona o tetraedro à mesma distância **h**' do vértice.

A seção do cone pelo plano β é um círculo de área $\mathbf{B_1}$. Como os dois cones obtidos são semelhantes, temos:

$$\frac{B_1}{B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad (1)$$

A seção do tetraedro pelo plano β é um triângulo de área $\mathbf{B_2}$. Como os dois tetraedros são semelhantes, temos:

$$\frac{B_2}{B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad (2)$$

De (1) e (2), resulta:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{B_2}{B}$$

e, então, $B_1 = B_2$. Logo, as seções obtidas são equivalentes e, pelo princípio de Cavalieri, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$V_{cone} = V_{tetraedro}$$

Como $V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$, então o volume de um cone é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela medida da altura:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Como $A_b = \pi r^2$, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

**EXEMPLO 3**

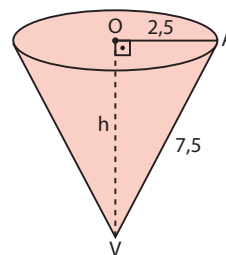
Uma casquinha de sorvete tem a forma de um cone reto em que a geratriz mede 7,5 cm e o raio da base mede 2,5 cm. Vamos determinar seu volume, considerando $\sqrt{2} \simeq 1,4$ e $\pi \simeq \frac{22}{7}$.

Determinemos a altura **h** da casquinha, vista no esquema ao lado.

No △AVO, retângulo, temos: $h^2 = (7,5)^2 - (2,5)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h^2 = 50 \Rightarrow h = 5\sqrt{2} \Rightarrow h \simeq 7$ cm

Logo:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 6,25 \cdot 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V \simeq 45,8 \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume aproximado da casquinha de sorvete é 45,8 cm³, ou seja, 45,8 mL.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**2** Quais são as medidas do raio e da altura de um cone de revolução cuja planificação da superfície lateral é um setor circular de 120° e 6 cm de raio?

**Solução:**

- Área lateral

A área lateral é a área do setor. Então:

$$\left.\begin{array}{l}360° \text{ — } \pi \cdot 6^2 \\ 120° \text{ — } A_\ell\end{array}\right\} \Rightarrow A_\ell = \frac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\ell = 12\pi \text{ cm}^2$$

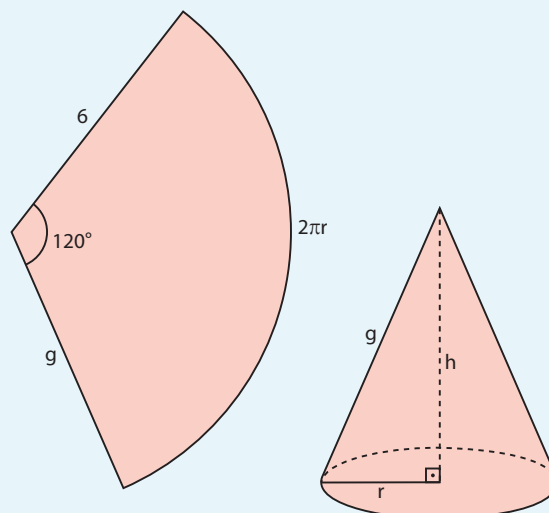
- Cálculo de **r** e **h**

Como $A_\ell = \pi \cdot r \cdot g$ e $g = 6$ cm, temos:

$$12\pi = \pi \cdot r \cdot 6 \Rightarrow r = 2 \text{ cm}$$

Como $r^2 + h^2 = g^2$, temos:

$$2^2 + h^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 32 \Rightarrow h = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Logo, o cone tem $4\sqrt{2}$ cm de altura e o raio da base mede 2 cm.

**3** Um reservatório tem a forma de um cone circular reto invertido com raio de medida R = 3 m e altura de medida H = 4 m. Ele está preenchido com água até metade da sua altura, como ilustra a figura abaixo. Qual é o volume do reservatório? Que volume de água ele contém?

**Solução:**

- Volume do reservatório

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} \Rightarrow V = 12\pi \text{ m}^3$$

Logo, o volume do reservatório é $12\pi$ m³.

- Cone de água

Sabemos que $h = \frac{H}{2} = 2$ m.

Como:

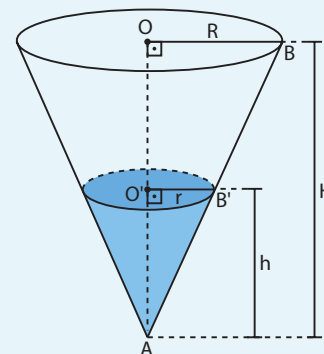
$$\triangle OAB \sim \triangle O'AB' \Rightarrow \frac{OB}{O'B'} = \frac{OA}{O'A} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{R}{r} = 2$$

então:

$$r = \frac{R}{2} = 1{,}5 \text{ m}$$

- Volume de água

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot (1{,}5)^2 \cdot 2}{3} \Rightarrow V = 1{,}5\pi \text{ m}^3$$

Portanto, o volume de água contido no reservatório é $1{,}5\pi$ m³.

**PENSE NISTO:**

Se o reservatório em forma de cone está preenchido com água até metade de sua altura, então o volume dessa água corresponde a metade do volume do reservatório?

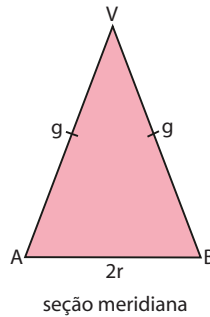
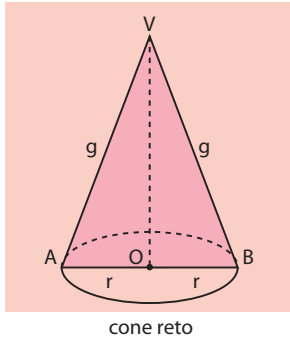
Não. Observe que $\frac{1{,}5\pi}{12\pi} = \frac{1}{8}$. De fato, como os dois cones, representados pelo reservatório e pela água em seu interior, são sólidos semelhantes, temos:

$H = 2h \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{1}{2}$ (razão de semelhança). Logo, $\frac{v}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

## Seção meridiana e cone equilátero

Sejam **V** o vértice de um cone e **O** o centro de seu círculo da base.

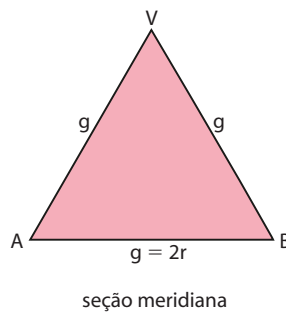
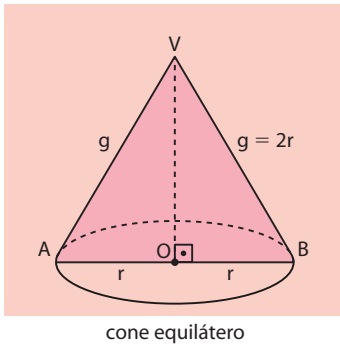
**Seção meridiana** de um cone é a interseção dele com um plano que contém o segmento $\overline{VO}$. A seção meridiana de um cone reto é um triângulo isósceles.

cone reto

seção meridiana

**Cone equilátero** é um cone reto cuja seção meridiana é um triângulo equilátero.

Num cone equilátero, $g = 2r$.

cone equilátero

seção meridiana

Se $\theta$ é a medida do ângulo do setor de raio **g**, temos:

ângulo — comprimento do arco

$$\left.\begin{matrix} 360° & \text{———} & 2\pi \cdot g \\ \theta & \text{———} & 2\pi \cdot r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta = 360° \cdot \frac{r}{g} \underset{g = 2r}{\Rightarrow} \theta = 180°$$

**PENSE NISTO:**

Ao planificarmos a superfície lateral de um cone equilátero, qual é a medida do ângulo do setor obtido?

**EXEMPLO 4**

Vejamos como obter a área lateral $\mathbf{A_\ell}$, a área total $\mathbf{A_t}$ e o volume **V** de um cone equilátero de raio 4 cm.

- Área lateral

$$\left.\begin{matrix} A_\ell = \pi \cdot r \cdot g \\ g = 2r \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot r \cdot 2r = 2\pi \cdot r^2 \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 4^2 \Rightarrow A_\ell = 32\pi \text{ cm}^2$$

Logo, a área lateral desse cone equilátero é $32\pi$ cm².

- Área total

$$\left.\begin{matrix} A_t = A_\ell + A_b \\ A_b = \pi \cdot r^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_t = 32\pi + \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_t = 32\pi + \pi \cdot 4^2 \Rightarrow A_t = 48\pi \text{ cm}^2$$

Portanto, a área total desse cone equilátero é $48\pi$ cm².

- Volume

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Vejamos agora como calcular a altura **h**:

$$h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 = (2r)^2 - r^2 \Rightarrow h^2 = 3r^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Logo:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{64\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume desse cone equilátero é $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³.

## EXERCÍCIOS

**25** Calcule o volume do cone cujo raio da base mede 4 cm e cuja altura mede 5 cm.

**26** Determine a área da base de um cone de revolução de 6 cm de altura cujo volume é $128\pi$ cm$^3$.

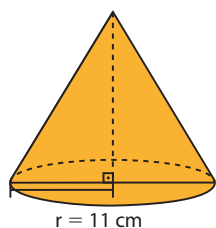
**27** Um cone circular reto tem 20 dm de altura e sua geratriz mede 25 dm. Determine a área total e o volume desse cone.

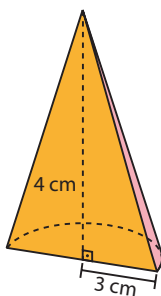
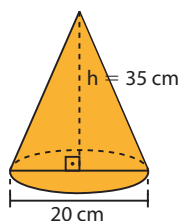
**28** Em alguns comércios, encontramos "guarda-chuvas" de chocolate.

EXPERIENCIAGASTRONOMICA.WORDPRESS.COM

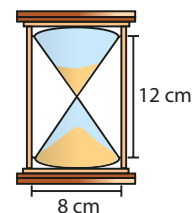
Considere que cada guarda-chuva tem o formato de um cone circular reto com 4 cm de diâmetro da base e 6 cm de altura. Sabendo que a densidade do cacau usado na fabricação desse chocolate é de 1,05 g/cm$^3$, determine a massa de cacau, em quilogramas, necessária para preparar 2 500 desses cones. Use $\pi \simeq 3,1$.

**29** Calcule a área lateral, a área total e o volume de cada um dos sólidos, cujas medidas estão indicadas.

**a)** cone equilátero

**b)** cone reto

**c)** semicone

**30** Dona Charlote produz sobremesas para eventos como casamentos e aniversários. Para produzir uma *mousse* de maracujá, ela utilizou um recipiente cilíndrico cujas medidas internas do diâmetro e da altura são, respectivamente, 0,4 m e 0,8 m. Depois distribuiu a *mousse* em copos com formato cônico invertido com 8 cm de medida do diâmetro, 18 cm de medida da altura e espessura desprezível. Considerando que o recipiente que dona Charlote utilizou estava completamente cheio, determine o número mínimo de copos de formato cônico necessários para fazer a transferência de toda a *mousse*.

**31** Sabe-se que a seção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles de área igual a 36 cm$^2$. Se esse cone tem 15 cm de altura, qual é o seu volume?

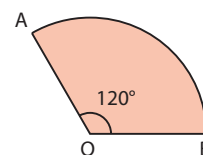
**32** A ampulheta é um instrumento constituído de dois vasos cônicos idênticos que se comunicam pelos vértices e é usada para medir o tempo mediante a passagem de certa quantidade de areia finíssima do vaso superior para o inferior.

CIT/ZAPT

Considerando que a ampulheta mostrada na figura acima está inscrita em uma estrutura semelhante a um cilindro de 12 cm de altura e cujo diâmetro da base mede 8 cm, calcule o volume de ar existente no espaço compreendido entre o cilindro e os dois cones.

**33** Qual é a medida do ângulo central de um setor circular obtido pela planificação da superfície lateral de um cone cuja geratriz mede 18 cm e o raio da base mede 3 cm?

**34** Seja o triângulo retângulo cujos catetos medem 9 dm e 12 dm. Em cada caso seguinte, determine o volume do sólido gerado pela rotação desse triângulo, em torno:

**a)** do cateto menor; **b)** do cateto maior.

**35** Um setor circular foi recortado de uma cartolina, de modo que o arco $\overset{\frown}{AB}$ desse setor mede 120° e tem comprimento igual a $\frac{10\pi}{3}$ cm.

Fazendo-se coincidir os pontos **A** e **B**, obtemos a superfície lateral de um cone reto de vértice **O**. Qual é o volume desse cone?

**36** O chapéu do bruxo mostrado na figura lembra a superfície lateral de um cone de revolução de 12 cm de altura e $100\pi$ cm³ de volume. Se ele é feito de cartolina, quanto desse material foi usado na sua confecção?

GRAPHORAMA

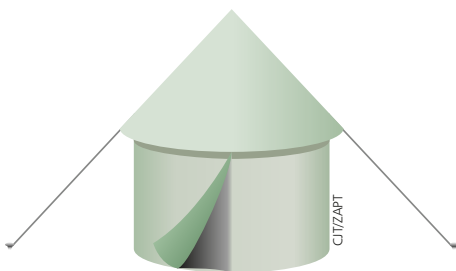
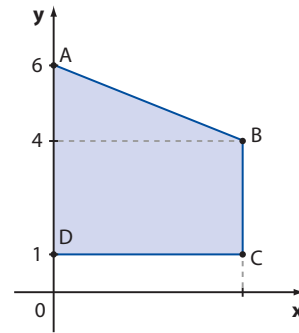
**37** Para uma festa infantil do dia das bruxas foram encomendados 120 chapéus de bruxa idênticos, cada um confeccionado a partir de um semicírculo de 56 cm de diâmetro. Use $\pi \simeq 3$.

**a)** Que altura terá cada chapéu?

**b)** Sabendo que os semicírculos são recortados a partir de folhas quadradas de papel-cartão, cada uma com 56 cm de lado, determine a quantidade mínima, em metros quadrados, do material desperdiçado na confecção dos chapéus.

**38** Em uma festa de casamento, serviram-se bebidas em taças em forma de cone reto, com base de diâmetro 4 cm e geratriz de medida $\sqrt{53}$ cm. Determine quantos litros de bebida foram necessários para encher as 600 taças que foram servidas nessa festa. Considere $\pi \simeq \frac{22}{7}$.

**39** Sabe-se que a cúpula da barraca mostrada na figura tem a forma de um cone circular reto de 1,5 m de altura, no qual as medidas da geratriz e do raio da base somam 4,5 m. Determine a área da parte dessa barraca que fica exposta ao sol do meio-dia.

CIT/ZAPT

**40** Girando-se o quadrilátero ABCD em torno do eixo **y**, obtemos um sólido cujo volume é $\frac{275\pi}{3}$ u.v. (unidades de medida de volume).

Qual é a abscissa do ponto **C**?

**41** Dobrando-se, simultaneamente, as medidas da altura e do diâmetro de um cone circular reto, por quanto ficam multiplicados:

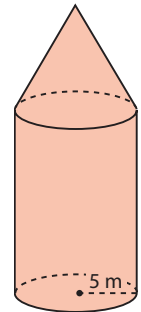
**a)** sua área total? **b)** seu volume?

**42** Girando-se em torno da hipotenusa um triângulo de catetos com medidas $\sqrt{65}$ cm e $2\sqrt{26}$ cm, qual é o volume do sólido obtido?

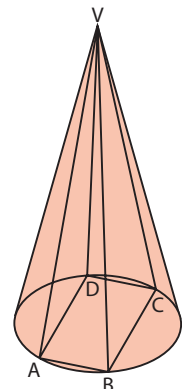
**43** Determine a medida da altura de um cone equilátero cuja área total é $54\pi$ m².

**44** O silo representado ao lado possui altura total de 15 metros. Nele podem ser armazenados $325\pi$ m³ de cereais. Determine:

**a)** a medida da altura do cone;

**b)** o custo de fabricação do silo, sabendo que a chapa de aço utilizada em sua confecção custa R$ 200,00 por m². Considere $\pi \simeq 3,1$ e $\sqrt{34} \simeq 5,8$.

**45** A altura de um triângulo equilátero mede $6\sqrt{3}$ cm. Determine o volume do sólido gerado pela rotação desse triângulo em torno de um de seus lados.

**46** Na figura, VABCD é uma pirâmide regular quadrangular cuja base está inscrita na base do cone de vértice **V**.

Determine a razão entre o volume da pirâmide e o volume do cone, nesta ordem.

TROQUE **IDEIAS**

## O volume do cone e as funções

Professor, o objetivo desta atividade é integrar os eixos de Funções e Geometria.

Um fabricante de funis metálicos para óleo de motores de veículo (carros, caminhões, ônibus etc.) está analisando a possibilidade de lançar uma nova linha de funis em formato aproximado de cone circular reto, em vários tamanhos.

Primeiramente, ele pensou em manter fixa a medida do raio do cone em 10 cm e variar a medida da altura. Intuitivamente, ele sabe que, quanto maior for a medida da altura, maior será o volume de óleo que o funil comportará. Vamos analisar essa relação.

Foram consideradas quatro possibilidades, como mostra a tabela seguinte:

| | Modelo I | Modelo II | Modelo III | Modelo IV |
|---|---|---|---|---|
| **Raio** | 10 cm | 10 cm | 10 cm | 10 cm |
| **Altura** | 5 cm | 10 cm | 12 cm | 15 cm |

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

**a)** Para cada modelo apresentado, calcule o volume de óleo que o funil comportaria.

**b)** Mantida constante a medida do raio, o volume **V** do cone varia apenas em função da medida **h** de sua altura. Qual é a lei da função que relaciona **V** e **h**? Como classificamos essa função?

**c)** Em seu caderno, faça o gráfico de V × h. Para facilitar, considere $\pi \simeq 3$ e use "escalas" diferentes nos dois eixos.

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

O fabricante pretende agora estudar novas possibilidades de tamanho para o funil. Ele vai manter fixa a medida da altura em 15 cm e variar a "boca" do funil, alterando a medida de seu raio, como mostra a tabela seguinte:

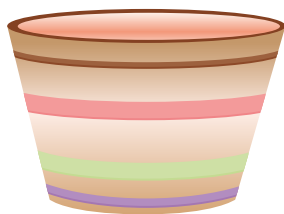
| | Modelo I | Modelo II | Modelo III | Modelo IV |
|---|---|---|---|---|
| **Altura** | 15 cm | 15 cm | 15 cm | 15 cm |
| **Raio** | 5 cm | 10 cm | 15 cm | 20 cm |

**d)** Para cada modelo apresentado, calcule o volume do cone.

**e)** Se a medida **h** da altura é mantida fixa, o volume **V** do cone varia apenas em função da medida **r** do raio da base. Qual é a lei da função que relaciona **V** e **r**? Como classificamos essa função? **V** e **r** são grandezas diretamente proporcionais?

**f)** Nessas condições, represente, em seu caderno, o gráfico de V × r. Para facilitar, considere $\pi \simeq 3$ e preste atenção nas escalas escolhidas nos dois eixos.

## Tronco de cone

Observe as figuras seguintes:

vaso

cúpula do abajur

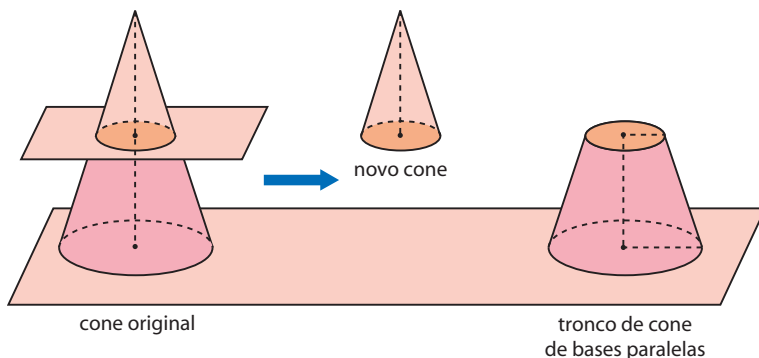
copo

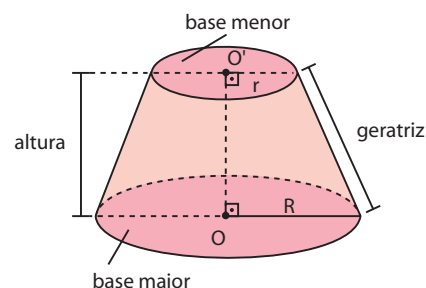
CJT/ZAPT

Elementos sem proporção entre si.

Elas lembram a forma de um sólido denominado **tronco de cone**, o qual vamos estudar agora.

Quando secionamos um cone circular reto, por um plano paralelo à base (supondo que o plano não contém o vértice do cone), ele fica dividido em dois sólidos:

- o sólido que contém o vértice é um novo cone, obtido pelo secionamento;
- o sólido que contém a base do cone original é um tronco de cone de bases paralelas.

Façamos a identificação dos principais elementos de um tronco de cone:

- **base maior do tronco**: é a base do cone original ou primitivo.
- **base menor do tronco**: é a seção determinada pelo plano ao intersectar o cone. Essa seção é um círculo e corresponde à base do novo cone.
- **altura do tronco**: é a distância entre os planos das bases.
- **geratriz do tronco**: é um segmento contido em uma geratriz do cone original, cujas extremidades são pontos das circunferências das bases (sendo um ponto em cada base).

## Áreas

- Área da base maior (**$A_B$**)

A área do círculo de raio de medida **R** é chamada **área da base maior** do tronco.

Logo:

$$A_B = \pi R^2$$

- Área da base menor (**$A_b$**)

A área do círculo de raio de medida **r** recebe o nome de **área da base menor** do tronco.

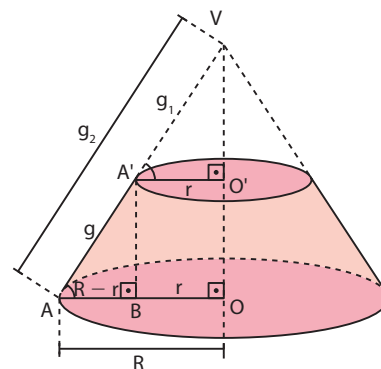
Logo:

$$A_b = \pi r^2$$

- Área lateral (**$A_\ell$**)

A superfície lateral de um tronco de cone é a reunião das geratrizes do tronco. A área dessa superfície é a **área lateral** do tronco.

A fórmula que permite calcular **$A_\ell$** pode ser obtida subtraindo-se da área lateral do cone original a área lateral do novo cone, obtido pelo secionamento, ou seja:

$$A_\ell = \pi R g_2 - \pi r g_1$$
$$A_\ell = \pi R \cdot (g_1 + g) - \pi r g_1$$
$$A_\ell = \pi[R \cdot g + (R - r) \cdot g_1] \quad (1)$$

Os triângulos VA'O' e A'AB são semelhantes; por isso, podemos escrever:

$$\frac{VA'}{A'A} = \frac{A'O'}{AB} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{r}{R - r} \Rightarrow g_1 = \frac{r \cdot g}{R - r} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$A_\ell = \pi\left[R \cdot g + (R - r) \cdot \frac{r \cdot g}{R - r}\right] = \pi[R \cdot g + r \cdot g] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\ell = \pi \cdot g \cdot (R + r)$$

- Área total (**A**$_t$)

A **área total** é igual à soma das áreas das duas bases com a área lateral.

$$A_t = A_B + A_b + A_\ell$$

## Volume

Considere um tronco de cone de bases paralelas, cuja medida da altura é **h**. Sendo **R** a medida do raio da base maior e **r** a medida do raio da base menor, então o volume **V** do tronco é:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot [R^2 + R \cdot r + r^2]$$

**Demonstração:**

O volume **V** do tronco de cone é obtido pela diferença entre os volumes dos dois cones, ou seja:

$$V = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot (h + h_1)}_{\text{volume do cone original (ou primitivo)}} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h_1}_{\text{volume do novo cone}}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot [R^2 \cdot h + (R^2 - r^2) \cdot h_1] \quad (1)$$

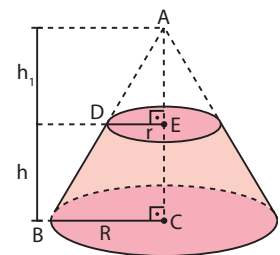
Como os triângulos ACB e AED são semelhantes, temos:

$$\frac{h_1 + h}{h_1} = \frac{R}{r} \Rightarrow h_1R - h_1r = hr \Rightarrow h_1 = \frac{h \cdot r}{R - r} \quad (2)$$

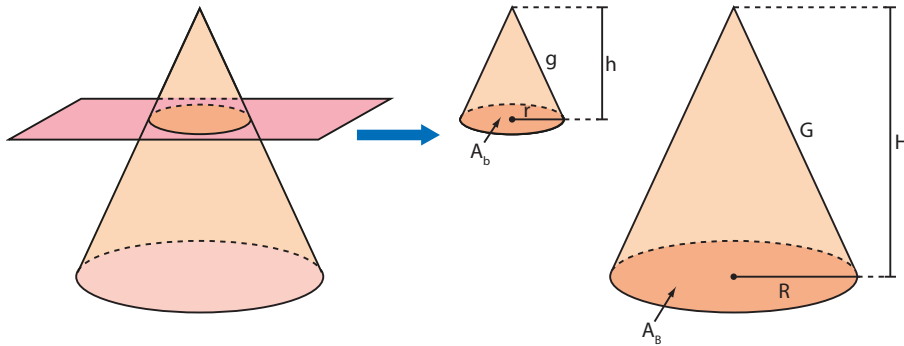
Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \left[R^2 \cdot h + (R^2 - r^2) \cdot \frac{h \cdot r}{R - r}\right]$$

Como $R^2 - r^2 = (R + r) \cdot (R - r)$, então:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot [R^2 \cdot h + (R + r) \cdot hr] \Rightarrow V = \frac{\pi h}{3} \cdot [R^2 + Rr + r^2]$$

## Cones semelhantes

Já vimos que, quando um cone circular reto é secionado por um plano paralelo à sua base (o plano não contém o vértice do cone), ele fica dividido em um tronco de cone e em um novo cone. Podemos notar que os dois cones (o original e o novo, obtido pelo secionamento) são semelhantes; assim, todas

as propriedades estudadas para pirâmides semelhantes podem ser estendidas para cones semelhantes:

- razão entre elementos lineares: $\frac{h}{H} = \frac{g}{G} = \frac{r}{R} = k$
- razão entre áreas: $\frac{A_b}{A_B} = k^2$; $\frac{A_\ell}{A_L} = k^2$; $\frac{A_t}{A_T} = k^2$
- razão entre volumes: $\frac{v}{V} = k^3$

**EXEMPLO 5**

Calculemos a área lateral, a área total e o volume de um tronco de cone reto cuja geratriz mede 10 cm e os raios das bases medem 8 cm e 2 cm, respectivamente.

- Área lateral, em $cm^2$:

$$A_\ell = \pi(R + r) \cdot g \Rightarrow A_\ell = \pi(8 + 2) \cdot 10 \Rightarrow A_\ell = 100\pi$$

Logo, a área lateral desse tronco de cone é $100\pi$ $cm^2$.

- Área total:

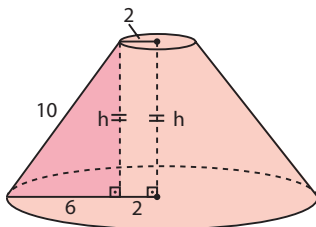
$$A_t = A_\ell + A_B + A_b$$

em que $A_B = \pi \cdot (8 \text{ cm})^2 = 64\pi \text{ cm}^2$ e $A_b = \pi \cdot (2 \text{ cm})^2 = 4\pi \text{ cm}^2$.

Logo, $A_t = 100\pi + 64\pi + 4\pi = 168\pi \Rightarrow A_t = 168\pi \text{ cm}^2$

Portanto, a área total é $168\pi$ $cm^2$.

- Volume:

É preciso, inicialmente, determinar a medida **h** da altura do tronco:

$10^2 = h^2 + 6^2$

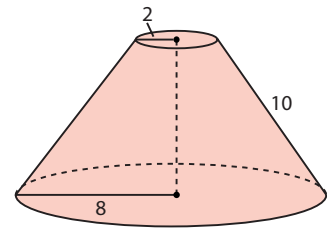
$100 - 36 = h^2$

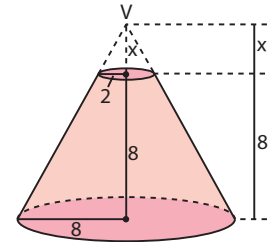
$h^2 = 64 \Rightarrow h = 8 \text{ cm}$

O volume desse tronco pode ser obtido com ou sem o uso da fórmula:

- Usando a fórmula:

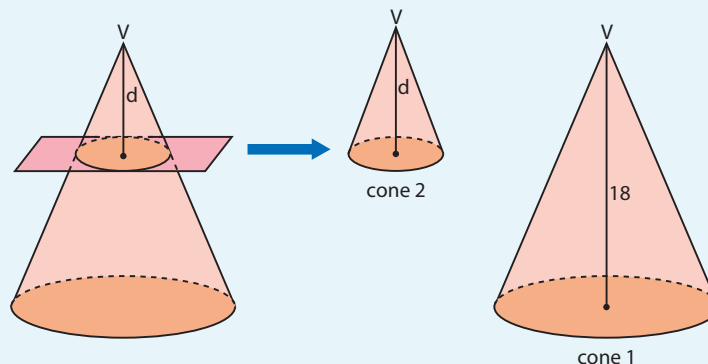
$$V = \frac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2]$$

$$V = \frac{\pi \cdot 8}{3}[8^2 + 8 \cdot 2 + 2^2] = \frac{\pi \cdot 8}{3} \cdot 84 = 224\pi \Rightarrow V = 224\pi \text{ cm}^3$$

- Sem a fórmula:
  Imaginemos o cone original e o cone "retirado" correspondentes a esse tronco.
  Como os cones são semelhantes, vamos comparar as medidas de seus elementos lineares (raio da base e altura):
  $\frac{8}{2} = \frac{8 + x}{x} \Rightarrow 4 = \frac{8 + x}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$ cm
- Volume do cone original: $\frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot \left(8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{2\,048\pi}{9}$ cm$^3$
- Volume do cone "retirado": $\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32\pi}{9}$ cm$^3$

  O volume do tronco é: $\frac{2\,048\pi}{9}$ cm$^3$ $-$ $\frac{32\pi}{9}$ cm$^3$ $=$ $\frac{2\,016\pi}{9}$ cm$^3$ $= 224\pi$ cm$^3$

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**4** Um cone circular reto tem 18 dm de altura. A que distância de seu vértice deve passar um plano paralelo à base, de modo que o volume desse cone seja oito vezes o volume do novo cone, obtido pelo secionamento?

**Solução:**

Sejam:
- **d**: distância do vértice **V** do cone ao plano
- $\mathbf{V_1}$: volume do cone "primitivo"
- $\mathbf{V_2}$: volume do novo cone

Temos:

$$V_1 = 8 \cdot V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 8 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = \sqrt[3]{8} = 2$$

O valor encontrado para **k** significa que a razão entre um elemento linear do cone "primitivo" e seu homólogo do novo cone obtido é igual a 2.

Desse modo, comparando as medidas das alturas dos dois cones, temos:

$$\frac{18}{d} = 2 \Rightarrow d = 9$$

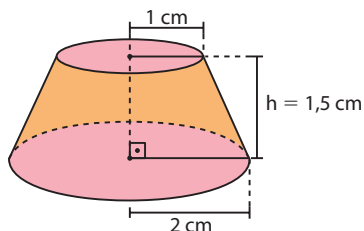
Portanto, a distância do vértice ao plano é 9 dm.

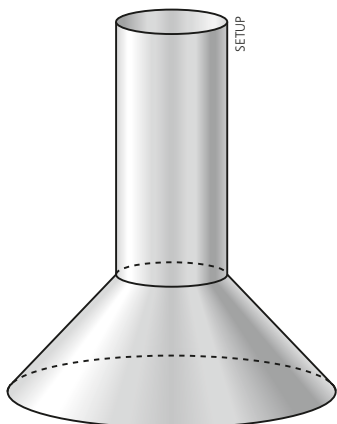
Como a razão entre os elementos lineares é $k = 2$, a razão entre as áreas das bases é $k^2 = 4$ e então: $\frac{A_1}{A_2} = 4 \Rightarrow A_1 = 4A_2$.

**PENSE NISTO:**

Qual a razão entre a área da base do cone 1 e a área da base do cone 2?

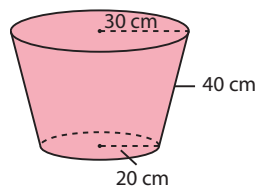
# EXERCÍCIOS

**47** Obtenha o volume e a área total do tronco de cone abaixo.

**48** Determine o volume de um tronco de cone reto, sabendo que a medida de sua geratriz é 29 cm e que os raios das bases medem 10 cm e 30 cm, respectivamente.

**49** A coifa abaixo é constituída de um cilindro reto, com 0,40 m de altura e 0,20 m de raio da base, acoplado a um tronco de cone reto, cuja medida da altura é igual à medida do raio da base maior e cuja geratriz mede $\frac{\sqrt{5}}{5}$ m.

Considerando a superfície total da coifa como a reunião das superfícies laterais do cilindro e do tronco de cone, determine a sua área total.

**50** Em uma estufa, determinadas mudas de espécies vegetais são plantadas em vasos de vidro, cada um em forma de paralelepípedo retorretângulo, cujas dimensões são 40 cm, 30 cm e 20 cm.

Deseja-se transferir a terra desses recipientes (que se encontram completamente cheios) para um outro, cujos formato e dimensões são dados a seguir.

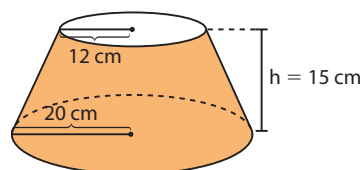
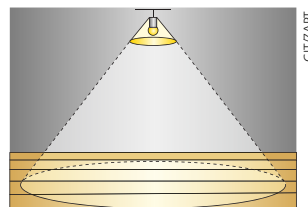
Qual é o número mínimo de vasos de vidro necessários para encher completamente de terra o novo recipiente?

Use $\pi \simeq 3$ e $\sqrt{15} \simeq 3{,}9$. Considere desprezível a espessura do vidro.

**51** Um cone de 10 cm de altura é intersectado, a 4 cm de seu vértice, por um plano paralelo à sua base, determinando uma seção de área $36\pi$ m$^2$. Determine:

**a)** a área da base do cone;

**b)** os volumes dos dois cones;

**c)** a razão entre as geratrizes do cone original e do cone obtido na seção, nessa ordem.

**52** Uma fábrica produz abajures cuja cúpula, feita em tecido rústico, tem a forma de um tronco de cone de bases paralelas e cujas dimensões estão indicadas na figura. Sabe-se que o custo de confecção da cúpula é de R$ 250,00/m$^2$ e o custo de fabricação do pé do abajur é de R$ 40,00. Qual é o custo total de fabricação de um lote com 125 abajures? Considere $\pi \simeq 3{,}1$.

**53** Um quebra-luz, cuja forma é um cone com 3 dm de altura e 5 dm de raio da base, tem presa, em seu vértice, uma lâmpada de comprimento desprezível. Em certo momento, esta projeta, no chão, um círculo de área $400\pi$ dm$^2$. A que distância do chão encontra-se a lâmpada?

**54** Os raios das bases de um tronco de cone de revolução medem 6 m e 4 m. Determine a altura desse tronco para que a área total seja o dobro da área lateral.

# Esfera

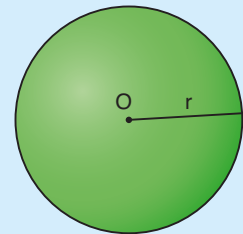
Observe os objetos seguintes:

FOTOS: THINKSTOCK/GETTY IMAGES

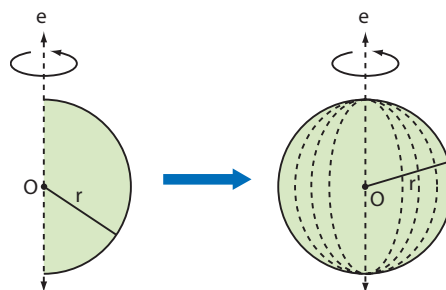
M.C.ESCHER.SELF PORTRAIT IN SPHERICAL MIRROR,1935/M.C. ESCHER MUSEUM

*Autorretrato no espelho esférico*. Litografia de 1935 do artista holandês M. C. Escher, exposta no museu M. C. Escher, Holanda.

Todos eles lembram a forma de uma esfera, sólido que passaremos a estudar agora.

Consideremos um ponto **O** e um segmento de medida **r**. Denomina-se **esfera** de centro **O** e raio **r** o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto **O** é menor ou igual a **r**.

É importante diferenciarmos esfera de superfície esférica: a **superfície esférica** de centro **O** e raio **r** é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto **O** é igual a **r**.

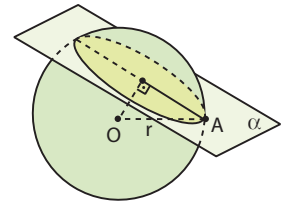
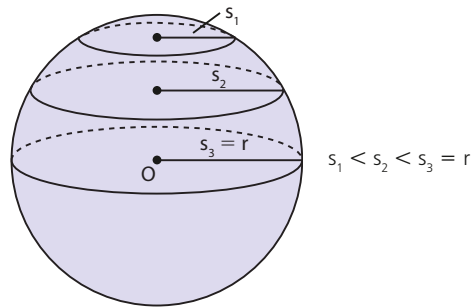
**OBSERVAÇÕES**

- A **superfície esférica** de centro **O** e raio **r** é a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém seu diâmetro.
- A **esfera** de centro **O** e raio **r** é o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

## Seção de uma esfera

Quando um plano $\alpha$ intersecta, em mais de um ponto, uma esfera de centro **O** e raio de medida **r**, o conjunto de pontos comuns ao plano e à esfera é um **círculo**, como mostra a figura ao lado.

Dizemos, assim, que toda seção plana de uma esfera é um círculo. A medida do raio desse círculo varia de acordo com a distância do plano $\alpha$ ao centro **O**. Quanto mais próximo de **O** o plano $\alpha$ intersectar a esfera, maior será a medida **s** do raio da seção. Se $\alpha$ passar pelo centro **O**, o raio da seção determinada será o próprio raio da esfera e, nesse caso, a seção recebe o nome de **círculo máximo da esfera**.

Acompanhe a figura abaixo.

$s_1 < s_2 < s_3 = r$

**EXEMPLO 6**

Suponha que um plano $\alpha$ intersecte uma esfera, a 5 cm de seu centro, determinando nela um círculo de raio 12 cm. Vamos encontrar a medida do raio dessa esfera.

Sejam:

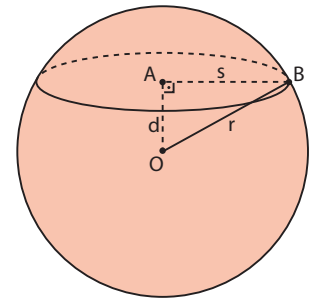
**d**: distância de $\alpha$ ao centro **O**; d = 5 cm

**s**: medida do raio da seção; s = 12 cm

**r**: medida do raio da esfera

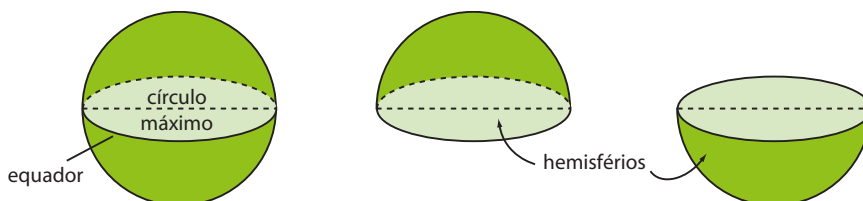
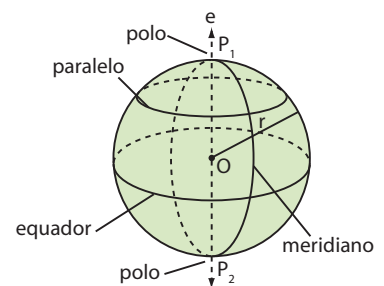
No $\triangle AOB$ temos:

$r^2 = s^2 + d^2 \Rightarrow r^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow r^2 = 144 + 25 \Rightarrow r^2 = 169 \Rightarrow r = 13$ cm

Assim, o raio da esfera mede 13 cm.

## Elementos de uma esfera

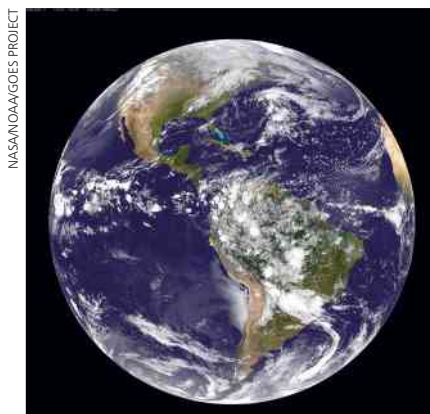
Observando a figura ao lado, vamos caracterizar os elementos de uma esfera de centro **O**, raio **r** e eixo de rotação **e**.

- **Polos**: os polos $P_1$ e $P_2$ correspondem aos pontos de interseção da superfície esférica com o eixo **e**.
- **Equador**: é a circunferência do círculo (seção) obtido ao se intersectar a esfera por um plano perpendicular ao eixo **e**, pelo centro da esfera.

  O círculo associado ao equador (círculo máximo da esfera) divide a esfera em duas "partes" iguais, conhecidas como hemisférios ou semiesferas.

As duas metades de uma laranja, como na foto ao lado, remetem à ideia de hemisférios.

- **Paralelo**: é a circunferência do círculo obtido ao se intersectar a esfera por um plano perpendicular ao eixo **e**.
  O plano que contém um paralelo é paralelo ao plano que contém o equador.
- **Meridiano**: é a circunferência do círculo obtido ao se intersectar a esfera por um plano que contém o seu eixo.

**OBSERVAÇÃO**

Sabemos que o planeta Terra não tem a forma exata de uma esfera, devido a um achatamento nos polos. No entanto, é comum considerar seu formato aproximadamente esférico. Nesse sentido, observe que a caracterização dos elementos de uma esfera está relacionada às linhas imaginárias do nosso planeta, estudadas em Geografia, que servem para localizar pontos na superfície esférica da Terra e também definir os 24 fusos horários.
Procure visualizar, em um globo terrestre, os seguintes elementos: polo Norte e polo Sul, hemisfério Norte e hemisfério Sul, linha do Equador, trópico de Câncer e trópico de Capricórnio, e o meridiano de Greenwich. Estabeleça uma relação entre esses elementos e os elementos de uma esfera.

Nosso planeta não tem a forma exata de uma esfera.

**PENSE NISTO:**

Se o raio da Terra mede aproximadamente 6 370 km, quantos quilômetros mede a linha do Equador?

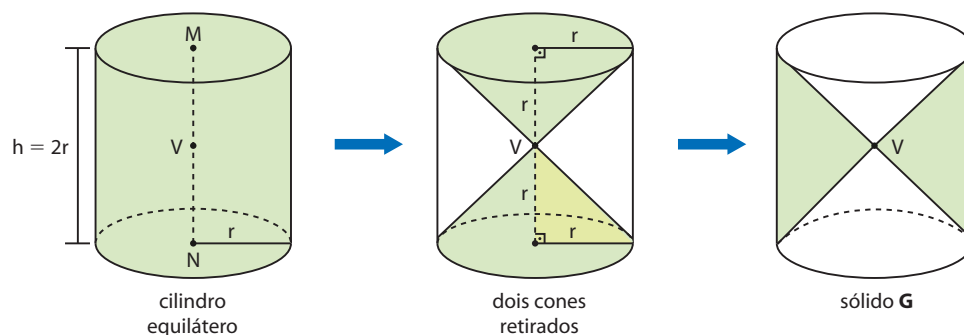
O Equador corresponde à circunferência do círculo máximo da Terra, supondo-a esférica, e seu comprimento é $2 \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km} \simeq 40003 \text{ km}$.

## Volume da esfera

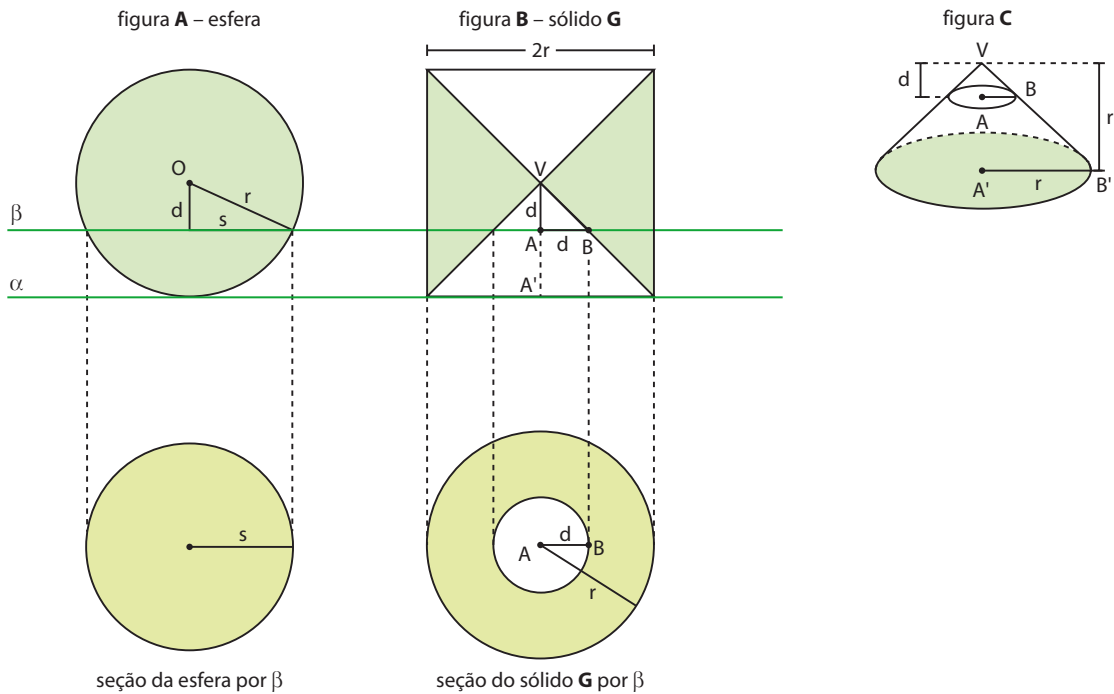
O volume **V** de uma esfera de raio **r** é dado por: $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

**Demonstração:**

Vamos tomar um cilindro equilátero, cujo raio da base mede **r** e a altura mede **2r**.

Seja **V** o ponto médio do segmento $\overline{MN}$, contido no eixo do cilindro. Desse cilindro retiramos dois cones cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Esses cones têm como vértice comum o ponto **V**, e a medida de suas alturas é **r**, como mostra a sequência de figuras abaixo. O sólido geométrico obtido será indicado por **G**.

Considere agora uma esfera de raio **r** e o sólido **G** obtido anteriormente. Imagine que essa esfera seja tangente a um plano $\alpha$ e que o cilindro original descrito tenha uma das bases contida em $\alpha$.

seção da esfera por β

seção do sólido G por β

Quando um plano $\beta$, paralelo a $\alpha$, intersecta a esfera a uma distância **d** de seu centro, ele determina nela um círculo de raio **s** cuja área é:

$$\pi s^2 = \pi \cdot (r^2 - d^2) \quad \textcircled{1}$$ (Veja a figura **A**.)

O plano $\beta$, naturalmente, também intersecta o sólido **G**, a uma distância **d** de **V**, determinando, como seção, uma coroa circular. Essa coroa circular é limitada por duas circunferências: uma de raio **r** e a outra de raio **d**, com $r > d$, cuja área é dada por:

$\pi \cdot (r^2 - d^2)$ ② (Observe nas figuras **B** e **C** que o triângulo VAB é isósceles e, portanto, $AB = d$.)

Por ① e ②, concluímos que as áreas das seções na esfera e no sólido **G** são iguais. Logo, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido **G** têm o mesmo volume.

O volume do sólido **G** pode ser calculado por:

$$V_G = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone}$$

$$V_G = \underbrace{\pi \cdot r^2}_{A_b} \cdot \underbrace{2r}_{h} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\pi \cdot r^2}_{A_b} \cdot \underbrace{r}_{h} \Rightarrow V_G = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_G = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Segue, daí, que o volume da esfera também é dado por: $V_{esfera} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

**EXEMPLO 7**

Quantos litros de gás pode conter um reservatório industrial em formato esférico e com raio interno medindo 2 m?

É preciso calcular o volume de uma esfera cujo raio mede 2 m:

$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \dfrac{32\pi}{3}$ ou aproximadamente 33,49 m³ (usamos $\pi \simeq 3,14$).

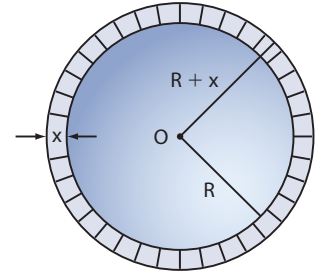
Logo, o reservatório pode conter aproximadamente 33 490 litros de gás.

## Área da superfície esférica

Diferentemente do cilindro e do cone, a esfera é um corpo redondo cuja superfície não pode ser planificada, isto é, não é possível "colocar" a superfície de uma esfera em um plano sem dobrá-la nem esticá-la.

A seguir, veja uma justificativa para a fórmula da área de uma superfície esférica, cuja demonstração formal exige conhecimentos mais avançados.

Seja uma esfera de centro **O**, raio de medida **R** e área da superfície igual a **A**.

Dado um número real positivo **x**, vamos considerar a esfera de centro **O** e raio de medida R + x. Observe as duas esferas concêntricas na figura ao lado.

O sólido limitado por essas duas esferas é uma espécie de "casca" formada por segmentos de reta cujo comprimento é **x**.

Intuitivamente, vamos imaginar a superfície da primeira esfera como uma "placa sólida de espessura suficientemente pequena" (essa ideia pode ser estendida para qualquer superfície).

Assim, para valores de **x** cada vez mais próximos do zero (indica-se $x \to 0$ e lê-se "x tende a zero"), o volume **V** do sólido limitado pelas duas esferas é aproximadamente igual a $A \cdot x$, em que **A** é a área da superfície esférica cujo raio mede **R**.

Expressando também **V** como a diferença entre os volumes das duas esferas, temos:

$$A \cdot x = \frac{4\pi}{3}(R + x)^3 - \frac{4\pi}{3}R^3$$

$$A \cdot x = \frac{4\pi}{3}(R^3 + 3R^2x + 3Rx^2 + x^3 - R^3)$$

$$A \cdot x = \frac{4\pi}{3}x \cdot (3R^2 + 3Rx + x^2)$$

$$A = \frac{4\pi}{3} \cdot (3R^2 + 3Rx + x^2)$$

Se x tende a 0, as parcelas $3Rx$ e $x^2$ também tendem a zero e daí:

$$A = \frac{4\pi}{3} \cdot 3R^2 = 4\pi R^2$$

Assim, a área de uma superfície esférica de raio de medida **R** é dada por:

$$A = 4\pi R^2$$

**EXEMPLO 8**

Uma indústria recebeu uma encomenda para a confecção de 5 000 bolinhas de pingue-pongue. O plástico usado na confecção das bolinhas custa R$ 5,00 o metro quadrado. Se o diâmetro de uma bolinha é de 3 cm, qual é o custo mínimo da indústria com o material para essa encomenda? Vamos usar 3,14 como aproximação de $\pi$.

O raio de cada bolinha mede:

$$r = \frac{3}{2}\text{ cm} = 1{,}5\text{ cm}$$

A área da superfície de uma bolinha é:

$$4\pi \cdot (1{,}5\text{ cm})^2 = 9\pi\text{ cm}^2 = 9 \cdot 3{,}14\text{ cm}^2 = 28{,}26\text{ cm}^2$$

Para confeccionar as 5 000 bolinhas, são necessários, no mínimo:

$$5\,000 \cdot (28{,}26\text{ cm}^2) = 141\,300\text{ cm}^2 = 14{,}13\text{ m}^2$$

O custo em reais para a confecção das bolinhas é:

$$14{,}13 \cdot 5 = 70{,}65\text{, ou seja, R\$ }70{,}65$$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**5** A superfície de uma bolha de sabão, de formato esférico, tem $36\pi$ cm² de área. Qual é o volume de ar contido nessa bolha?

**Solução:**

Com base na informação sobre a área da superfície esférica, é possível encontrar a medida **r** de seu raio:

$$A = 36\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 36\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$$

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

O volume de ar contido na bolha corresponde ao volume da esfera, ou seja:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} \Rightarrow V = 36\pi \text{ cm}^3$$

Não. De A = V obtemos: $\cancel{4\pi} r^2 = \frac{\cancel{4\pi} r^{\cancel{3}}}{3} \Rightarrow r^2 = \frac{r^3}{3} \Rightarrow r = 3$; assim a coincidência não ocorre para outros valores de **r**.

Portanto, $V = 36\pi$ cm³.

**PENSE NISTO:**

Nesse exercício, você pode constatar que a área da superfície de uma esfera de raio 3 e o volume da esfera são numericamente iguais. Essa coincidência ocorre para algum outro valor de **r**?

**6** Duas esferas de gelo cujos raios medem 2 cm e 1 cm são derretidas. A água obtida pela fusão (passagem do estado sólido para o líquido) é colocada integralmente em um recipiente cúbico de vidro cuja aresta mede 4 cm. Qual é o nível, em centímetros, atingido pela água nesse recipiente? Considere $\pi \simeq 3,1$ e despreze a espessura do vidro.

**Solução:**

O volume total de água obtida por derretimento corresponde à soma dos volumes das duas esferas, ou seja:

$$V = \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} + \frac{4\pi \cdot 1^3}{3} = \frac{32\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \Rightarrow V = 12\pi \text{ cm}^3 = 37,2 \text{ cm}^3$$

A área da base do recipiente cúbico é $(4 \text{ cm})^2 = 16$ cm².

Assim, considerando **x** o nível, em centímetros, que a água atinge no recipiente temos:

$$A_b \cdot x = 37,2 \Rightarrow 16 \cdot x = 37,2 \Rightarrow x \simeq 2,3 \text{ cm}$$

Portanto, a água atinge o nível de 2,3 cm nesse recipiente.

## EXERCÍCIOS

**55** Se uma esfera tem 12 cm de diâmetro, qual é a área de sua superfície e qual é o seu volume?

**56** Calcule o volume de uma esfera, sabendo que a área de sua superfície é igual a $576\pi$ cm².

**57** O raio de uma esfera mede 4 cm. Um plano que seciona essa esfera determina nela um círculo com raio de medida 1 cm. Determine a distância do plano ao centro da esfera.

**58** Um plano intersecta uma esfera a uma distância do centro igual à medida do raio da seção que ele determina na esfera. Sabendo que o raio da esfera mede 4 cm, determine:

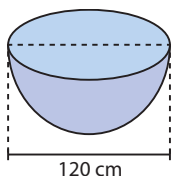
**a)** a área da seção;

**b)** a área do círculo máximo dessa esfera;

**c)** a área da superfície esférica.

**59** Uma esfera oca tem 1 dm de raio exterior e 1 cm de espessura. Qual é o volume da parte oca da esfera?

**60** Um recipiente, na forma de paralelepípedo retângulo, está completamente cheio de terra. Suas dimensões são 4 m de comprimento, 2 m de largura e 1 m de altura. Deseja-se distribuir toda a terra do recipiente em vasos idênticos, cada um com a forma de um hemisfério, como mostra a figura. Qual é o número mínimo de vasos que serão necessários?

Use $\pi \simeq 3{,}14$.

**61** Duas esferas são concêntricas, e seus raios medem 4 cm e 2 cm, respectivamente. Um plano tangente à esfera menor intersecta a outra esfera, determinando uma seção **S**.

**a)** Qual é a área de **S**?

**b)** Qual é o comprimento da circunferência de **S**?

**62** A área de uma superfície esférica é $144\pi$ cm$^2$. Em quantos centímetros deve-se aumentar a medida do raio para que a área da superfície passe a ser $256\pi$ cm$^2$?

**63** Um plano intersecta uma esfera determinando uma seção de área $36\pi$ cm$^2$. Sabendo que a área da superfície dessa esfera é $400\pi$ cm$^2$, determine a distância do centro da esfera ao plano.

**64** A figura mostra um reservatório industrial de aço usado para armazenamento de cereais, conhecido como silo.

Ele é formado por um cilindro circular reto, com 8 m de altura e raio interno da base 2 m, encimado por uma semiesfera.

Usando $\pi \simeq 3{,}1$, responda:

**a)** Quantos metros quadrados de aço são gastos na confecção desse silo?

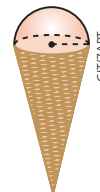
**b)** Quantos metros cúbicos de cereais o silo pode armazenar?

**65** Um joalheiro necessita confeccionar uma esfera de ouro cuja medida do raio seja 3 cm. Ele dispõe de algumas esferas menores do mesmo material, cada qual com raio de medida 2 cm.

**a)** Determine o número mínimo de esferas menores a serem fundidas para que ele possa confeccionar a esfera maior.

**b)** A sobra do ouro fundido, nas condições do item *a*, será vendida ao preço de R$ 140,00 por grama. Sabendo que a densidade do ouro é de 19,3 g/cm$^3$, determine o valor que será arrecadado com a venda da sobra. Considere $\pi \simeq 3$.

**66** A casquinha de um sorvete tem a forma de um cone circular reto, com $\sqrt{241}$ cm de geratriz e 8 cm de diâmetro da base.

Uma bola de sorvete foi servida, de modo que a parte que ficou visível corresponde a uma semiesfera, como mostra a figura.

Determine quantos centímetros cúbicos da casquinha não contêm sorvete. Considere $\pi \simeq 3$.

**67** Uma esfera de raio **r** tem volume **V** e a área de sua superfície é **A**. Expresse, em função de **V** e de **A**, o volume e a área da superfície da esfera obtida em cada um dos seguintes casos:

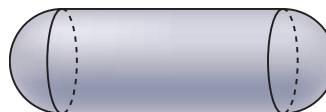
**a)** **r** é dobrado;

**b)** **r** é reduzido à sua terça parte.

**68** Para enfeite de Natal, Silvana colocou, em um recipiente de vidro na forma de cone circular reto, 200 bolinhas de mesmo tamanho coloridas e maciças e preencheu o espaço vazio com um líquido colorido. As medidas do diâmetro da base e da altura do recipiente são 20 cm e 30 cm, respectivamente, e a medida do diâmetro de cada bolinha é 3 cm. Considere $\pi \simeq 3{,}1$.

**a)** Determine o volume do líquido usado para preencher o recipiente.

**b)** Qual seria a resposta do item *a* caso Silvana tivesse comprado 200 bolinhas, cada qual com diâmetro medindo metade do diâmetro da bolinha utilizada?

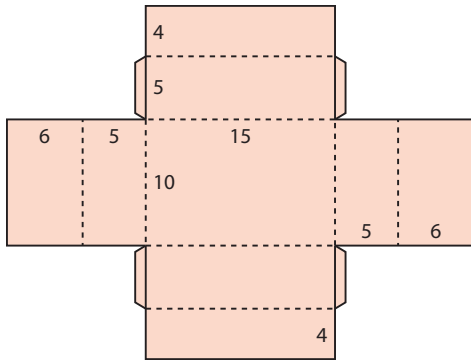
**69** Um aquecedor a gás tem a forma de um cilindro com duas semiesferas acopladas em suas extremidades, como mostra a figura.

Sabendo que o diâmetro da base do cilindro é 0,90 m e que o comprimento total do aquecedor é 1,90 m, calcule:

**a)** a área de sua superfície;

**b)** o volume máximo de gás que o seu interior pode conter, em litros.

Use $\pi \simeq 3$.

**70** Uma pedra com formato esférico e 21 cm de medida do raio foi mergulhada em um tanque que tem a forma de um cilindro reto cujo raio da base mede 0,7 m. Considerando que o nível da água no tanque elevou-se **x** centímetros, sem que houvesse transbordamento, determine o valor de **x**.

**71** (Enem-MEC) Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.

Os sólidos são fabricados nas formas de:

I. um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm.

II. um cubo de aresta 2 cm.

III. uma esfera de raio 1,5 cm.

IV. um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm.

V. um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm.

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos

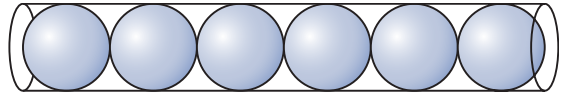
**a)** I, II e III.

**b)** I, II e V.

**c)** I, II, IV e V.

**d)** II, III, IV e V.

**e)** III, IV e V.

**72** Uma loja vende bolinhas de gude em embalagens cilíndricas, cada qual contendo seis unidades, conforme mostra a figura abaixo.

Se cada bolinha tem 2 cm de diâmetro, determine o volume do ar existente entre a embalagem e as bolinhas.

Considere $\pi \simeq 3{,}14$.

**73** Um objeto de decoração tem a forma de uma esfera inscrita em um cubo. Se a área de uma face do cubo é 196 $cm^2$, determine a área da superfície esférica.

**74** Um cubo oco de aresta de medida 20 cm contém em seu interior 8 esferas maciças iguais, tangentes entre si e tangentes também às paredes internas do cubo. Considere $\pi \simeq 3$ e determine:

**a)** a área do quadrilátero cujos vértices são quatro pontos de contato de 4 esferas com a base inferior do cubo;

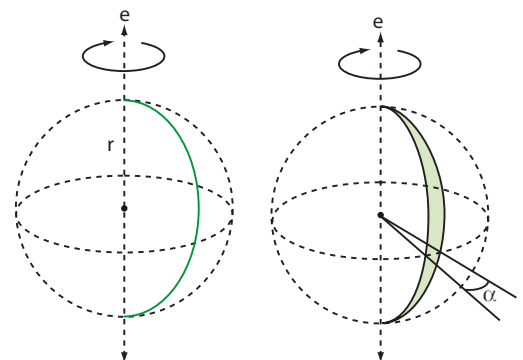
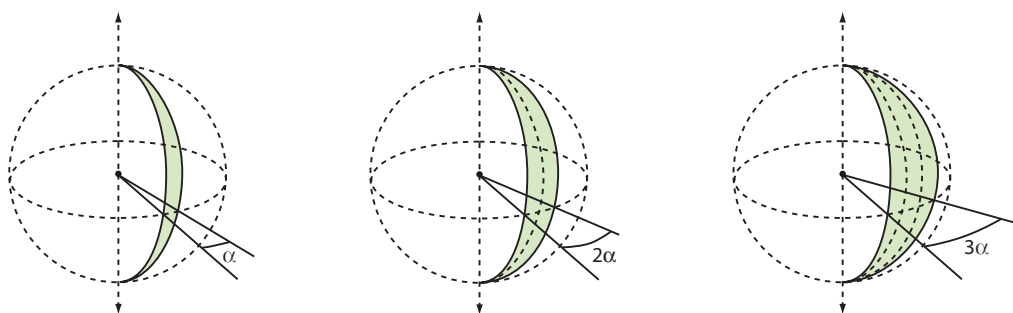
**b)** o volume do sólido cujos vértices são os centros das 8 esferas.

# Partes da esfera

## Fuso esférico

**Fuso esférico** é a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência, a qual gira $\alpha$ graus ($0° < \alpha \leqslant 360°$) em torno do eixo que contém seu diâmetro.

Quando $\alpha$ é dobrado, a área do fuso é dobrada; triplicando $\alpha$, também a área do fuso é triplicada; e assim sucessivamente. No caso de $\alpha = 360°$, o fuso transforma-se na superfície da esfera, cuja área é $A = 4\pi r^2$.

De modo geral, a área do fuso é proporcional a $\alpha$ e, portanto, pode ser calculada por uma regra de três simples.

Vejamos como ficam as expressões da área de um fuso em função da medida (α) do ângulo de giro, em graus e radianos:

Para α em graus:

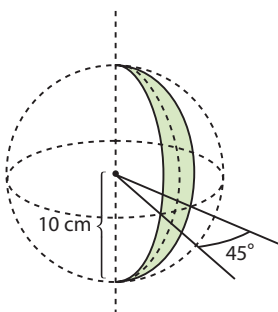
$$\left.\begin{matrix} 360° — 4\pi r^2 \\ \alpha — A_{fuso} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°}$$

Para α em radianos:

$$\left.\begin{matrix} 2\pi \text{ rad} — 4\pi r^2 \\ \alpha — A_{fuso} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_{fuso} = 2r^2\alpha$$

Essas expressões não precisam ser memorizadas, pois sempre podem ser obtidas por meio de regra de três simples, como mostra o exemplo a seguir.

**EXEMPLO 9**

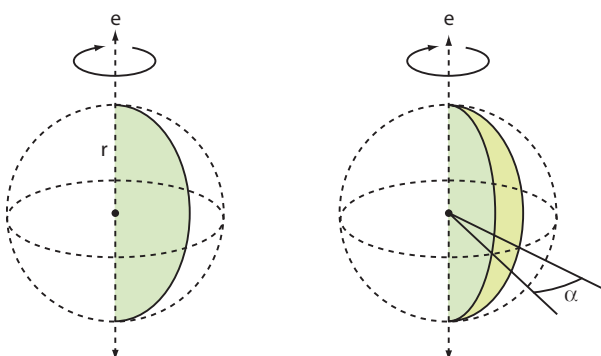
Vamos calcular a área do fuso esférico da figura abaixo.

Para calcular a área do fuso esférico, podemos estabelecer a seguinte proporção:

ângulo área

$$\left.\begin{matrix} 360° — 4\pi \cdot 10^2 \\ 45° — x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{360°}{45°} = \frac{400\pi}{x} \Rightarrow 8 = \frac{400\pi}{x} \Rightarrow x = 50\pi$$

A área desse fuso é $50\pi$ cm².

## Cunha esférica

Dá-se o nome de **cunha esférica** ao sólido gerado pela rotação de um semicírculo que gira α graus ($0° < \alpha \leq 360°$) em torno de um eixo que contém seu diâmetro.

Note que, se $\alpha$ é dobrado, o volume da cunha esférica é dobrado; se $\alpha$ é triplicado, o volume da cunha esférica também é triplicado; e assim sucessivamente. No caso em que $\alpha = 360°$, a cunha esférica transforma-se em uma esfera, e seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

De modo geral, o volume da cunha esférica é proporcional a $\alpha$ e, portanto, pode ser calculado por uma regra de três simples.

Observe as relações obtidas:

Para $\alpha$ em graus:

$$\left.\begin{array}{l} 360° — \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha — V_{cunha} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270°}$$

Para $\alpha$ em radianos:

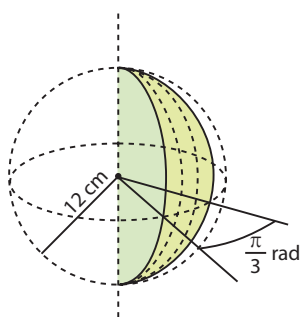
$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ rad} — \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha — V_{cunha} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{2r^3\alpha}{3}$$

Assim como as fórmulas para o fuso esférico, as fórmulas para a cunha esférica não precisam ser memorizadas; basta estabelecer uma regra de três.

Observe que a superfície de uma cunha esférica contida em uma esfera de raio **r** é a reunião de um fuso esférico com dois semicírculos de raio **r**.

Assim, a área total da cunha esférica é igual à soma da área do fuso esférico com a área de um círculo de raio **r.**

**EXEMPLO 10**

Vamos calcular o volume e a área total da cunha esférica representada na figura.

- O volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi \cdot (12 \text{ cm})^3 = 2\,304\pi \text{ cm}^3$.
  Assim, o volume da cunha pode ser obtido pela regra de três:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,304\pi — 2\pi \text{ rad} \\ V_{cunha} — \frac{\pi}{3} \text{ rad} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\,304}{V_{cunha}} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow V_{cunha} = 384\pi$$

  Portanto, o volume da cunha é $384\pi \text{ cm}^3$.
- A área da superfície esférica é $4\pi \cdot (12 \text{ cm})^2 = 576\pi \text{ cm}^2$.
  Observe que $\frac{\pi}{3}$ corresponde à sexta parte de $2\pi$; então, a área do fuso esférico é $\frac{576\pi \text{ cm}^2}{6} = 96\pi \text{ cm}^2$

A área da cunha esférica pode ser obtida pela soma:

$$96\pi + \underbrace{\pi \cdot 12^2}_{\text{reunião de dois semicírculos}} = 96\pi + 144\pi = 240\pi$$

Portanto, a área da cunha esférica é $240\pi \text{ cm}^2$.

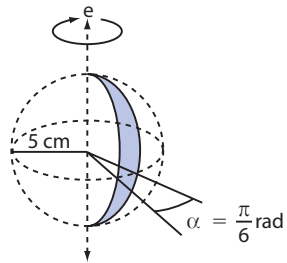
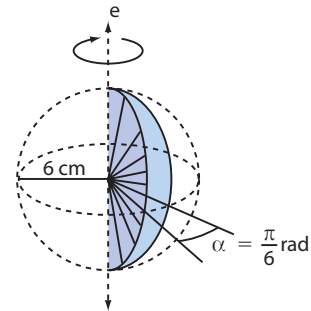
**PENSE NISTO:**

Considerando um gomo de uma laranja esférica, responda: Qual é a forma da casca do gomo? E do gomo?

A casca do gomo de uma laranja tem forma de fuso esférico e o gomo tem forma de cunha esférica.

## EXERCÍCIOS

**75** Calcule, com os dados abaixo:

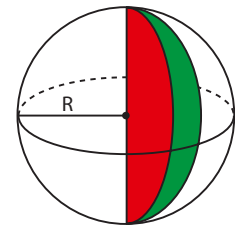
**a)** a área do fuso;

**b)** a área total e o volume da cunha.

**76** Determine a área de um fuso de 45° em uma esfera de 10 cm de raio.

**77** Determine, em graus, a medida do ângulo do fuso de uma esfera, sabendo que a área do fuso é $54\pi$ cm² e a da superfície esférica é $324\pi$ cm².

**78** Uma cunha esférica de 10° tem volume 1 078 m³. Qual é a sua área total? Considere $\pi \simeq \frac{22}{7}$.

**79** (Vunesp-SP) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente.

Uma melancia com forma esférica de raio de medida R cm foi cortada em 12 fatias iguais, e cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.

Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio R cm é $4\pi R^2$ cm², determine, em função de $\pi$ e de **R**:

**a)** a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico);

**b)** quantos centímetros quadrados de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, a área da superfície total de cada fatia.

## DESAFIO

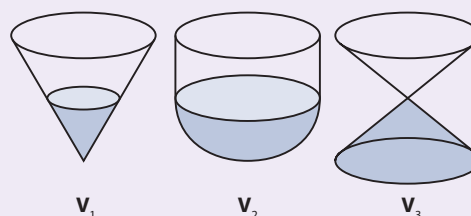
(Enem-MEC) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. Representando por $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$ e $\mathbf{V_3}$ o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:

**a)** $V_1 = V_2 = V_3$

**b)** $V_1 < V_3 < V_2$

**c)** $V_1 = V_3 < V_2$

**d)** $V_3 < V_1 < V_2$

**e)** $V_1 < V_2 = V_3$

# Matemática, natureza e arte

## A Geometria dos fractais

A Geometria euclidiana que estudamos em toda fase escolar não é suficiente para descrever determinadas formas geométricas, como a de uma nuvem, a de uma linha de recorte de um litoral, a de uma couve-flor, a de uma folha de samambaia e muitas outras que vemos na natureza. A curiosidade de compreender tais formas desafiou a ciência a estudá-las. A **Geometria dos fractais** nasceu dessa necessidade.

As raízes desse ramo da Matemática estão no século XIX, embora haja algumas indicações em épocas remotas, como na Grécia, na Índia e na China, entre os anos de 1200 a.C. e 800 a.C. Porém, somente há poucos anos, com o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos algoritmos computacionais, a Geometria dos fractais vem se consolidando.

O pai dos fractais é o francês Benoît Mandelbrot (1924-2010), que no início dos anos 80 impulsionou os estudos sobre essas formas geométricas. Esta frase atribuída a ele sintetiza o espírito da Geometria de que falamos: "Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som de um latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta".

SANDRA DIAS CAMPOS

**O pai dos fractais**

Benoît Mandelbrot nasceu na Polônia em 1924 e, após o início da Segunda Guerra Mundial, em 1939, se mudou com a família para a França e naturalizou-se francês. Passou por várias instituições de ensino, incluindo a *École Polytechnique* e a *Sorbonne*, em Paris. Insatisfeito com a geometria clássica, desenvolveu diversos estudos em diferentes áreas do saber para buscar novas respostas aos seus problemas científicos e à compreensão da natureza. Com o apoio de recursos de computação de empresas privadas, onde passou a trabalhar a partir de 1958, desenvolveu a geometria fractal. Publicou alguns livros, entre eles a sua obra clássica *The Fractal Geometry of Nature*, traduzida e publicada em língua portuguesa com o título *Objectos Fractais*.

STEVE JURVETSON

Benoît Mandelbrot (1924-2010), em 1985.

## O que é fractal?

O termo fractal refere-se ao adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere*, em latim, significa quebrar. Um fractal é uma forma geométrica que tem duas características essenciais:

**Complexidade infinita**

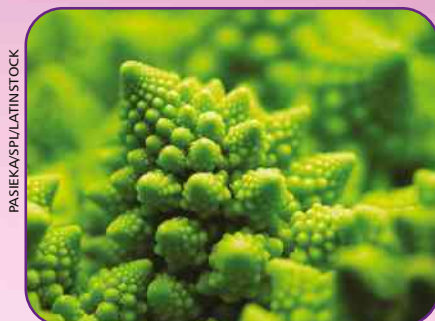
Os fractais caracterizam-se por repetir, indefinidamente, um determinado padrão com ligeiras variações.

**Autossimilaridade**

Quando ampliamos uma pequena parte de um fractal, ela se parece com o todo. Assim, os fractais têm cópias aproximadas de si em seu interior.

### Fractais da natureza

Vejamos algumas formas fractais presentes na natureza:

PASIEKA/SPL/LATINSTOCK

Detalhe de uma variedade de couve-flor.

LUCIDIO STUDIO INC./CORBIS/LATINSTOCK

Cada pequena parte da folha da samambaia se parece com a folha inteira.

CLAUDE NURIDSANY & MARIE PERENNOU/SPL/LATINSTOCK

Floco de neve.

## Fractais geométricos

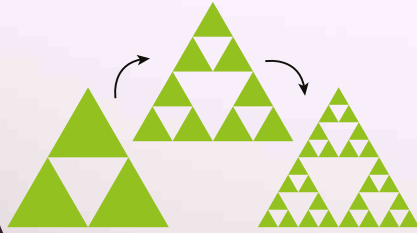
Vejamos alguns exemplos de fractais geométricos:

### Poeira de Cantor

O russo Georg Cantor (1845-1918) criou um tipo simples de fractal obtido pela divisão de um segmento em três partes de mesma medida e supressão da parte central. Repetindo-se o processo indefinidamente, chegamos a uma sucessão de pontos, conhecida como **poeira de Cantor**. Observe, na figura seguinte, as cinco primeiras repetições desse processo:

1ª
2ª
3ª
4ª
5ª

### Triângulo de Sierpinski

Criado pelo polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), esse fractal é resultante da remoção sucessiva do triângulo equilátero do centro quando se divide um triângulo equilátero em quatro triângulos congruentes. Observe, na figura seguinte, as três primeiras repetições desse processo:

### Floco de neve de Koch

Proposto pelo sueco Helge Von Koch (1870-1924), esse fractal é obtido a partir de um triângulo equilátero: divide-se cada lado do triângulo em três partes iguais. Na parte do centro (meio), acrescenta-se um novo triângulo equilátero, cujo lado mede a terça parte da medida do lado do triângulo anterior e assim sucessivamente, como mostra a figura seguinte:

LAGUNA DESIGN/SPL/LATINSTOCK

Segundo Mandelbrot, o floco de neve de Koch é "um modelo grosseiro, mas vigoroso de uma linha costeira".

A Geometria dos fractais tem aplicações importantes na Física, Biologia e Medicina, entre outras áreas do conhecimento. Uma notável aplicação visual dos fractais é na Arte: quando os computadores são alimentados por **processos iterativos**, criam magníficos desenhos abstratos, permitindo a visualização de belas imagens. Vejamos algumas delas:

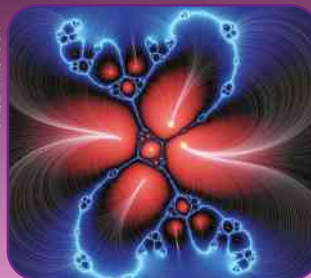
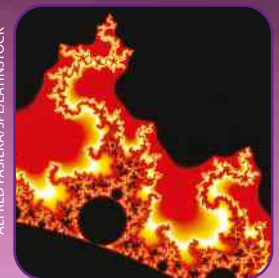
**Iteração** é um conjunto de regras e algoritmos que são executados sucessivas vezes.

STEVE ALLEN/SPL/LATINSTOCK

Fractal de Mandelbrot.

VICTOR HABBICK VISIONS/SPL/LATINSTOCK

Fractal de Mandelbrot.

ALFRED PASIEKA/SPL/LATINSTOCK

Conjunto de Mandelbrot.

**Fontes de pesquisa**: SALLUM, E. M. Fractais no Ensino Médio. *Revista do professor de matemática*. n. 57, 2005.; Fractais: propriedades e construção. Disponível em: <people.ufpr.br/~ewkaras/ic/geralic2003.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.; O Quadrado de Koch. Disponível em: <m3.ime.unicamp.br/recursos/1023>. Acesso em: 10 mar. 2016.

# CAPÍTULO 10 Análise Combinatória

Considere os seguintes problemas:

- De quantos modos distintos oito pessoas podem se sentar lado a lado em uma fila de cadeiras em um cinema?
- Quantas placas de automóveis podem ser formadas sem repetição de letras e de algarismos?
- De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Mega-Sena?
- De quantas maneiras diferentes pode-se definir as chaves de seleções da primeira fase de uma Copa do Mundo de futebol?

Todas as questões levantadas são problemas de contagem.

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que desenvolve técnicas e métodos de contagem que nos permitem resolver essas e outras questões.

## Princípio fundamental da contagem (PFC)

Veja como podemos resolver alguns problemas de contagem.

EXEMPLO 1

Um quiosque de praia, no Rio de Janeiro, lançou a seguinte promoção durante uma temporada de verão:

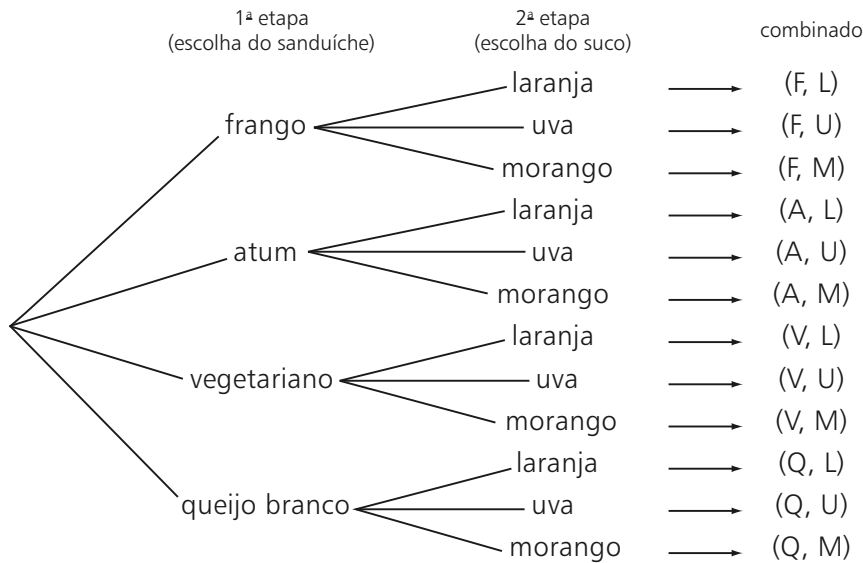
> Combinado de sanduíche natural e suco a R$ 20,00

PEDRO TEIXEIRA/O GLOBO

Para esse combinado, há quatro opções de recheio para o sanduíche (frango, atum, vegetariano e queijo branco) e três opções de suco (laranja, uva e morango).

De quantas formas distintas uma pessoa pode escolher o seu combinado?

- Em primeiro lugar, a pessoa deverá optar pelo sabor do lanche. Há quatro opções: frango (**F**), atum (**A**), vegetariano (**V**) e queijo branco (**Q**).
- Para cada uma das possibilidades anteriores, a escolha do suco pode ser feita de três maneiras possíveis: laranja (**L**), uva (**U**) ou morango (**M**).

A representação dessas possibilidades pode ser feita por meio de um diagrama sequencial, conhecido como **diagrama da árvore de possibilidades** ou, simplesmente, diagrama da árvore. Observe:

Observe que cada combinado consta de um **par ordenado** (x, y), em que x ∈ {F, A, V, Q} e y ∈ {L, U, M}.

O número de possibilidades é $4 \cdot 3 = 12$.

EXEMPLO **2**

Uma moeda é lançada três vezes sucessivamente. Quais são as sequências possíveis de faces obtidas nesses lançamentos?

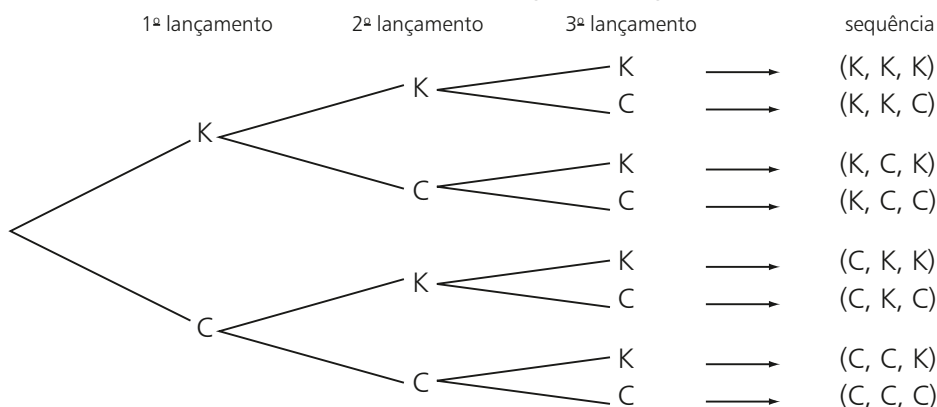
Vamos representar cara por **K** e coroa por **C**.

Há três etapas (lançamentos) a serem analisadas:

- O primeiro lançamento pode resultar em cara ou coroa.
- Para cada resultado obtido na primeira vez que a moeda for lançada, o segundo lançamento poderá resultar em cara ou coroa.
- A partir de cada um dos resultados anteriores, o terceiro lançamento pode resultar em cara ou coroa.

CIT/ZAPT

Vamos representar essas possibilidades no seguinte diagrama:

| 1º lançamento | 2º lançamento | 3º lançamento | sequência |
|---|---|---|---|
| K | K | K | → (K, K, K) |
| | | C | → (K, K, C) |
| | C | K | → (K, C, K) |
| | | C | → (K, C, C) |
| C | K | K | → (C, K, K) |
| | | C | → (C, K, C) |
| | C | K | → (C, C, K) |
| | | C | → (C, C, C) |

Cada sequência obtida é uma **tripla ordenada** (ou terna) de faces $(f_1, f_2, f_3)$, em que $f_1 \in \{K, C\}$, $f_2 \in \{K, C\}$ e $f_3 \in \{K, C\}$.

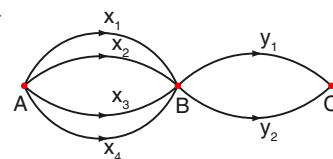
O número de sequências possíveis é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

**EXEMPLO 3**

Quatro estradas ligam as cidades **A** e **B**, e duas estradas ligam as cidades **B** e **C**. De quantas maneiras distintas pode-se ir de **A** a **C**, passando por **B**?

Vamos representar as estradas que ligam as cidades **A** a **B** por $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_4}$ e as que ligam as cidades **B** a **C** por $\mathbf{y_1}$ e $\mathbf{y_2}$.

Há duas etapas sucessivas a serem cumpridas; na primeira, deve-se ir de **A** até **B** e, na segunda, de **B** até **C**.

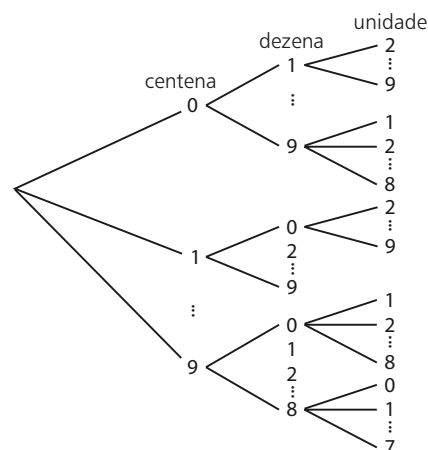
Cada caminho determina uma sequência de dois elementos $(x_i, y_j)$, em que $x_i \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $y_j \in \{y_1, y_2\}$, como mostra o esquema ao lado.

Caminhos possíveis: $(x_1, y_1)$, $(x_1, y_2)$, $(x_2, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_1)$, $(x_3, y_2)$, $(x_4, y_1)$, $(x_4, y_2)$.

O número de maneiras de realizar a viagem completa corresponde ao número de sequências possíveis, que é $4 \cdot 2 = 8$.

**EXEMPLO 4**

Leila esqueceu a senha de três algarismos para abrir o cadeado de sua mala de viagem. Ela só lembra que escolhera algarismos distintos entre si. Na pior das hipóteses, quantas combinações ela deverá testar para abrir a mala?

Representar todas as possibilidades no diagrama da árvore é impensável, mas é interessante, ao menos, representá-lo parcialmente para fixar ideias:

Temos:

- Para a escolha do algarismo das centenas: 10 opções (qualquer algarismo de 0 a 9).
- Para a escolha do algarismo das dezenas, a partir de cada escolha anterior: 9 opções, uma vez que o algarismo já escolhido para a centena não pode se repetir.
- Feitas as duas escolhas anteriores, há 8 opções distintas para a escolha do algarismo das unidades.

O diagrama acima representado, ainda que parcial, permite visualizar a "estrutura" da multiplicação: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ (número máximo de tentativas).

Suponha que uma sequência seja formada por **k** elementos $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$, em que:

- $\mathbf{a_1}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_1}$ maneiras distintas;
- $\mathbf{a_2}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_2}$ formas diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;
- $\mathbf{a_3}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_3}$ modos diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;

⋮

- $\mathbf{a_k}$ pode ser escolhido de $\mathbf{n_k}$ maneiras distintas, a partir das escolhas anteriores.

Então, o número de possibilidades para construir a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$ é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$$

Esse resultado é conhecido como **princípio fundamental da contagem** (PFC) ou **princípio multiplicativo** e serve de base para a resolução de muitos problemas de contagem.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1** Uma prova é composta de 8 questões do tipo verdadeiro (**V**) ou falso (**F**). De quantas maneiras distintas podem ser respondidas todas as questões dessa prova?

**Solução:**

Cada maneira de responder às questões da prova consta de uma sequência de oito elementos $(a_1, a_2, ..., a_8)$, em que cada $a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ pode ser escolhido de duas maneiras distintas: **V** ou **F**.

Assim, pelo PFC, o número de respostas possíveis para essa prova é:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{8 \text{ fatores}} = 2^8 = 256$$

Das 256 sequências possíveis de respostas, apenas uma apresenta todas as respostas falsas: (F, F, F, F, F, F, F, F). Nas outras 255 sequências, ao menos uma das respostas é **V**.

**PENSE NISTO:**

Em quantas dessas 256 sequências pelo menos uma das respostas é **V**?

**2** A seleção brasileira de futebol irá disputar um torneio internacional com outras cinco seleções, no sistema "todos jogam contra todos uma única vez". Quantas são as possíveis sequências de resultados — vitória (**V**), empate (**E**) e derrota (**D**) — da equipe brasileira nesse torneio?

**Solução:**

A sequência de resultados dos jogos pode ser representada por $(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)$, e, em cada jogo, pode ocorrer **V**, **D** ou **E**.

Pelo PFC, o número de sequências de resultados possíveis é:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$$

Formar o número 326 é diferente de formar o número 263, por exemplo; é importante lembrar que estamos construindo sequências.

**3** Considerando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, responda:

**a)** Quantos números de três algarismos podemos formar?

**b)** Quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar?

**PENSE NISTO:**

Por que importa a ordem de escolha dos algarismos neste problema?

**Solução:**

**a)** Devemos construir uma tripla ordenada (x, y, z) de modo que:

- **x** possa ser escolhido de seis modos distintos, pois o número que será formado não pode começar por zero. Note que 034 = 34.
- **y** possa ser escolhido de sete formas diferentes, pois pode haver repetição de algarismos.
- **z** possa ser escolhido de sete maneiras distintas, pois não há restrições.

Assim, pelo PFC, a quantidade de números é $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$.

**b)** Devemos construir uma tripla ordenada (x, y, z), respeitadas as restrições. Já que um número é ímpar quando termina por algarismo ímpar, é mais prático iniciar a resolução do problema pela "última casa" (das unidades):

- **z** pode ser escolhido de três modos distintos (1, 3 ou 5).
- **x** pode ser escolhido de cinco maneiras diferentes, pois não podemos escolher o zero nem o algarismo já escolhido para **z**.
- **y** pode ser escolhido de cinco formas distintas, pois devemos excluir os dois algarismos já escolhidos para **x** e para **z**.

Assim, pelo PFC, o resultado é $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$.

**PENSE NISTO:**

Para resolver o item *b*, um estudante iniciou analisando as possibilidades de escolha para a centena, depois para a dezena e, por fim, para a unidade, obtendo:

Qual foi o erro cometido?

Nesse raciocínio, não se sabe se o algarismo usado para a centena é par ou ímpar, da mesma forma que o algarismo da dezena. Desse modo, não é possível determinar, de maneira única, o número de possibilidades de escolha do algarismo da unidade (o qual pode ser 3, 2 ou 1).

## EXERCÍCIOS

**1** Para ir à praia, Sílvia pretende colocar um maiô e uma canga. Sabendo que ela possui cinco maiôs diferentes e três modelos diferentes de canga, determine o número de maneiras distintas de Sílvia se vestir.

**2** Um restaurante oferece almoço a R$ 40,00, incluindo: entrada, prato principal e sobremesa. De quantas formas distintas um cliente pode fazer seu pedido, se existem quatro opções de entrada, três de prato principal e duas de sobremesa?

**3** Em um teste vocacional, um jovem deve responder a doze questões, assinalando, em cada uma, uma única alternativa, escolhida entre "sim", "não" e "às vezes". De quantas formas distintas o teste poderá ser respondido?

**4** Três amigos chegam um pouco atrasados para uma aula de bicicleta na academia e encontram cinco bicicletas vagas.

De quantos modos distintos eles podem se distribuir nas bicicletas vagas?

**5** Responda:

**a)** Quantos números de cinco algarismos existem?

**b)** Quantos números ímpares de cinco algarismos existem?

**c)** Quantos números de cinco algarismos são maiores que 71 265?

**d)** Quantos números de cinco algarismos distintos começam por 7?

**6** Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, responda:

**a)** Quantos números de quatro algarismos podemos formar?

**b)** Quantos números pares de quatro algarismos podemos formar?

**c)** Em relação ao total do item *a*, qual é a porcentagem correspondente aos números que têm todos os algarismos distintos?

**7** Responda:

**a)** Uma moeda é lançada duas vezes sucessivamente. Quantas sequências de faces podem ser obtidas? Quais são elas?

**b)** Quantas sequências de faces poderiam ser obtidas, caso a moeda fosse lançada quatro vezes sucessivamente? E cinco vezes? E dez vezes?

**c)** Uma moeda foi lançada **n** vezes sucessivamente. Sabendo que o número de sequências de faces que poderiam ter sido obtidas é $4^{19}$, qual é o valor de **n**?

**8** Para acessar os serviços de um portal de vendas pela internet, o usuário deve cadastrar uma senha formada por quatro algarismos distintos. O sistema, entretanto, não aceita as senhas que contenham um ou mais algarismos correspondentes ao ano de nascimento do cliente. Determine o número de senhas que podem ser cadastradas por alguém que nasceu em:

**a)** 1966

**b)** 1954

**c)** 1999

**9** As placas de veículos atuais são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Considerando o alfabeto com 26 letras, quantas placas distintas podem ser fabricadas de modo que:

**a)** os algarismos sejam distintos?

**b)** as letras e os algarismos sejam distintos?

**c)** só algarismos pares distintos e vogais apareçam?

**d)** não apareça a letra **J** nem um algarismo maior que 6?

**e)** só apareçam algarismos ímpares e em ordem crescente?

**10** Quantos números de três algarismos distintos podemos formar usando:

**a)** apenas os algarismos 1, 2 e 3?

**b)** apenas os algarismos ímpares?

**c)** apenas os algarismos pares?

**d)** algarismos pares e ímpares intercalados?

**11** Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine:

**a)** a quantidade de números pares de três algarismos que podemos formar;

**b)** a quantidade de números pares de três algarismos distintos que podemos formar;

**c)** a quantidade de números divisíveis por 5, formados por 4 algarismos distintos.

**12** Em uma festa, há 32 rapazes e 40 moças; 80% do número de moças e $\frac{3}{8}$ do número de rapazes sabem dançar. Quantos pares podem ser formados por um rapaz e uma moça de modo que:

**a)** ninguém saiba dançar? **b)** apenas uma pessoa do par saiba dançar?

**13** (Obmep) Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

**a)** 8 **b)** 16 **c)** 18 **d)** 20 **e)** 24

ILUSTRAÇÃO EXTRAÍDA DA PROVA DA OBMEP ANO 2007, 1ª FASE, NÍVEL 1.

**14** Em uma empresa, os estagiários passam, obrigatoriamente e uma única vez, pelos seguintes setores: RH, financeiro, comercial e *marketing*.

**a)** Quantas ordens distintas são possíveis para o estagiário passar pelos quatro setores?

**b)** Se um estagiário iniciar o trabalho no setor comercial, de quantas formas distintas poderá completar seu treinamento?

**15** Leia a tira do *Recruta Zero*, de Mort Walker.

INTERCONTINENTAL PRESS

Suponha que cada um dos cinco soldados tenha exatamente uma carta para enviar a um dos três “destinos” destacados. De quantos modos distintos esses soldados podem distribuir as cartas nesses “destinos”?

**16** Para ir ao trabalho, uma secretária procura sempre combinar blusa, saia e sapatos. Como ela não gosta de repetir as combinações, fez um levantamento nos armários e verificou que são possíveis 420 combinações diferentes. Se ela possui dez blusas, quantas saias e quantos pares de sapatos ela pode ter, sabendo que, para cada item, há mais de uma peça?

**17** (Obmep) Patrícia escreveu, em ordem crescente, os inteiros positivos formados apenas por algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, .... Qual foi o 157º número que ela escreveu?

**a)** 997 **b)** 999 **c)** 1 111 **d)** 1 113 **e)** 1 115

**18** José e a família, que moram em Brasília, pretendem viajar nas férias de janeiro para Buenos Aires. Consultando um agente de viagem, José recebeu a informação de que só há voos para Buenos Aires com conexão em São Paulo, Rio de Janeiro ou Curitiba e obteve a malha de voos ao lado para a data solicitada.

De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher o voo de ida:

**a)** podendo usar companhias aéreas distintas?

**b)** usando a mesma companhia aérea?

| De | Para | Companhias aéreas |
|---|---|---|
| Brasília | São Paulo | A, B, C, D |
| Brasília | Rio de Janeiro | A, B, C, D |
| Brasília | Curitiba | A, B |
| São Paulo | Buenos Aires | A, B, C, D, E |
| Rio de Janeiro | Buenos Aires | B, C, E |
| Curitiba | Buenos Aires | A, B, C, F |

**19** Um estudante está procurando as soluções inteiras da equação $2x = a + b$, na incógnita **x**.

Sabendo que $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de quantas maneiras distintas o estudante poderá escolher **a** e **b** para obter soluções inteiras?

**20** Um programador de computador criou um código especial que utiliza apenas os símbolos: •, –, **x**.

GRAPHORAMA

Os diferentes códigos são sequências formadas por esses símbolos.

Quantos códigos:

**a)** de cinco símbolos começam por "•"?

**b)** contêm de dois a quatro símbolos?

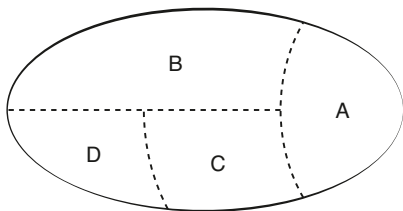
**c)** são formados por três símbolos, sendo um de cada tipo?

**d)** com quatro símbolos apresentam, pelo menos, três "•"?

**21** Uma agência de turismo vende pacotes para as cidades históricas de Minas Gerais. O passageiro deve escolher entre o tipo de transporte (rodoviário ou aéreo) e a categoria do hotel em que se hospedará (turística, turística superior, primeira ou luxo). Opcionalmente, ele pode contratar um seguro-viagem entre as opções de plano: básico ou clássico.

**a)** De quantos modos distintos o pacote poderá ser contratado sem incluir o seguro-viagem?

**b)** De quantos modos distintos o pacote poderá ser contratado incluindo o seguro-viagem?

**22** Um país é formado por quatro regiões **A**, **B**, **C** e **D**, como mostra o mapa seguinte:

Deseja-se colorir esse mapa de modo que regiões com uma fronteira comum tenham cores distintas.

Indique se as afirmações seguintes são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) e justifique as falsas.

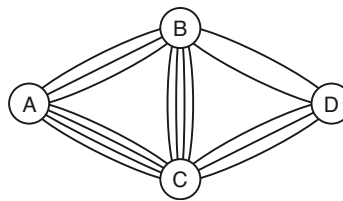
**a)** É possível colorir o mapa usando apenas duas cores.

**b)** Usando quatro cores distintas, o número de maneiras de colorir o mapa é 24.

**c)** Com quatro cores disponíveis, o número máximo de possibilidades para colorir o mapa é 60.

**d)** Com 5 cores disponíveis, e colorindo **A** e **D** com a mesma cor, existem 60 maneiras distintas de colorir o mapa.

**e)** O número mínimo de cores necessárias para colorir o mapa é 3.

**23** No esquema seguinte, **A**, **B**, **C** e **D** são cidades e as linhas representadas são estradas que ligam essas cidades.

De quantas formas distintas é possível ir de **A** até **D**, sem passar mais de uma vez pela mesma cidade?

**24** Quantos divisores positivos tem o número:

**a)** 120? **b)** 3 780? **c)** $48^5 \cdot 15^6$?

Sugestão: Faça a decomposição em fatores primos.

**25** Responda:

**a)** O número $1\,125 \cdot 2^n$, com $n \in \mathbb{N}$, apresenta 84 divisores positivos. Qual é o valor de **n**?

**b)** Qual é o número de divisores positivos de $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ... \cdot 18 \cdot 20$?

**26** Uma pulseira de tecido será bordada com quatro faixas retangulares, como mostra a figura abaixo.

Há cinco cores de bordado disponíveis. De quantos modos distintos a pulseira poderá ser feita:

**a)** se não se pretende repetir cor alguma?

**b)** se retângulos "vizinhos" devem ser bordados com cores diferentes?

**c)** se o primeiro e o último retângulos forem bordados com a mesma cor e nos retângulos "do meio" forem usadas cores de bordado distintas entre si e também distintas da cor usada nas extremidades?

**27** Para aumentar a segurança de suas operações via internet, o cliente de um banco deve digitar uma senha formada por 4 algarismos distintos. Uma vez que ela seja digitada corretamente, ele deverá digitar outra senha formada por duas letras (entre as 26 do alfabeto) seguidas de dois algarismos.

Suponha que o sistema não seja bloqueado após qualquer tentativa incorreta. Se, para testar cada possibilidade são gastos 30 segundos, qual seria o tempo máximo (em horas e minutos) gasto por uma pessoa (que não tem informação alguma sobre a senha) para ter acesso a uma determinada conta?

# Fatorial de um número natural

Na resolução de problemas de contagem por meio do princípio multiplicativo (ou PFC) é comum aparecerem multiplicações envolvendo números naturais consecutivos, por exemplo: $26 \cdot 25 \cdot 24$; $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$; $7 \cdot 6 \cdot 5$ etc.

Muitas vezes é possível escrever multiplicações desse tipo de forma mais resumida. Para isso, vamos apresentar o fatorial de um número natural, que será útil na contagem dos agrupamentos que serão apresentados a seguir.

Dado um número natural **n**, definimos o **fatorial de n** (indicado por **n!**) por meio das relações:

Se $n = 0$, então $0! = 1$ (1)

Se $n = 1$, então $1! = 1$ (2)

Se $n \geq 2$, então $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (3)

Notemos que, em (3), o fatorial de **n** representa o produto dos **n** primeiros números naturais positivos. Um pouco mais à frente, você vai compreender a "conveniência" de se definir $0! = 1$ e $1! = 1$.

Assim, temos, por exemplo:

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

**PENSE NISTO:**

Se $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, então o fatorial de **n** é um número par. Explique.

Se $n \geq 2$, n! contém como um de seus fatores o número 2, que é par. Como o produto de um número par por outro inteiro qualquer é par, concluímos que n! é par.

À medida que **n** aumenta, o cálculo de n! torna-se mais trabalhoso. Para ajudar, podemos utilizar a seguinte propriedade:

$$n! = n \cdot (n - 1)!, \ n \in \mathbb{N}^*$$

Veja estas simplificações:

- $6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} = 6 \cdot 5!$
- $5! = 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4!} = 5 \cdot 4!$
- $9! = 9 \cdot \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{8!} = 9 \cdot 8!$

  ou ainda $9 \cdot 8 \cdot \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{7!} = 9 \cdot 8 \cdot 7!$

**EXEMPLO 5**

Para calcularmos o valor de $\frac{10!}{7!}$, podemos desenvolver o fatorial do número maior, 10, até chegarmos ao fatorial do menor, 7.

Temos:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**4** Resolva a equação $\frac{(n + 1)!}{(n - 1)!} = 6$.

**Solução:**

Como $n + 1 > n - 1$, desenvolvemos o fatorial de $n + 1$ até chegarmos ao fatorial de $n - 1$:

$$\frac{(n + 1) \cdot n \cdot \cancel{(n - 1)!}}{\cancel{(n - 1)!}} = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow n = 2 \text{ ou } n = -3$$

Lembrando que só se define o fatorial de um número natural, concluímos que o único valor possível é $n = 2$; então $S = \{2\}$.

## EXERCÍCIOS

**28** Calcule:

**a)** $6!$
**b)** $4!$
**c)** $0! + 1!$
**d)** $3! - 2!$
**e)** $7! - 5!$
**f)** $5 \cdot 3!$

**29** Obtenha o valor de cada uma das expressões seguintes:

**a)** $\frac{8!}{6!}$
**b)** $\frac{9!}{10!}$
**c)** $\frac{3!}{4!} + \frac{4!}{5!}$
**d)** $\frac{7!}{5! \cdot 2!}$
**e)** $\frac{20!}{18! \cdot 2!}$
**f)** $\frac{8! \cdot 6!}{7! \cdot 7!}$

**30** Efetue:

**a)** $\frac{11! + 9!}{10!}$
**b)** $17! - 17 \cdot 16!$
**c)** $\frac{40! - 39!}{41!}$
**d)** $\frac{(85!)^2}{86! \cdot 83!}$

**31** Classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as seguintes afirmações, considerando que **a** e **b** são números naturais quaisquer.

**a)** $(a + b)! = a! + b!$
**b)** $(a - b)! = a! - b!$
**c)** $(2a)! = 2 \cdot a!$
**d)** $(a!)^2 = a! \cdot a!$
**e)** $(a \cdot b)! = a! \cdot b!$

**32** Simplifique:

**a)** $\frac{(n + 2)!}{(n + 1)!}$
**b)** $\frac{(n - 3)!}{(n - 2)!}$
**c)** $\frac{(n + 1)! + n!}{n!}$
**d)** $\frac{n! - (n - 1)!}{(n - 1)! + (n - 2)!}$

**33** Resolva as seguintes equações:

**a)** $(n + 2)! = 6 \cdot n!$
**b)** $n! = 120$
**c)** $\frac{n!}{(n - 2)!} = 42$
**d)** $\frac{(n + 2)! - (n + 1)!}{n(n - 1)!} = 25$
**e)** $(n - 5)! = 1$
**f)** $(n!)^2 - 100 \cdot n! = 2\,400$

**34** (Enem-MEC) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

**a)** $20 \cdot 8! + (3!)^2$
**b)** $8! \cdot 5! \cdot 3!$
**c)** $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$
**d)** $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$
**e)** $\frac{16!}{2^8}$

# Agrupamentos simples: permutações, arranjos e combinações

O princípio fundamental da contagem (PFC) é a principal técnica para resolução de problemas de contagem.

Vamos estudar a seguir as diferentes maneiras de formar um agrupamento e, por meio do PFC, desenvolver métodos de contagem para cada tipo de agrupamento.

Faremos, principalmente, o estudo dos **agrupamentos simples**, isto é, grupos de **k** elementos **distintos** escolhidos entre os **n** elementos de um conjunto, com $k \leq n$.

Estudaremos os seguintes agrupamentos simples: permutações, arranjos e combinações.

## Permutações

Aline (**A**), Bia (**B**), Claudinha (**C**) e Diana (**D**) são alunas do 6º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Elas vivem brigando por causa da posição em que cada uma quer sentar. Para resolver o problema, a professora sugeriu um rodízio completo das alunas na fileira, trocando a disposição todos os dias.

Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de as quatro meninas se acomodarem nas quatro carteiras?

Inicialmente, vamos escrever todas as possibilidades de acomodação:

MASTERFILE/RADIUS IMAGES/LATINSTOCK

| 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| B | A | C | D |
| C | A | B | D |
| D | A | B | C |

| 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|
| A | B | D | C |
| B | A | D | C |
| C | A | D | B |
| D | A | C | B |

| 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|
| A | D | C | B |
| B | C | A | D |
| C | B | A | D |
| D | B | A | C |

| 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|
| A | D | B | C |
| B | C | D | A |
| C | B | D | A |
| D | B | C | A |

| 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|
| A | C | B | D |
| B | D | A | C |
| C | D | A | B |
| D | C | A | B |

| 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|
| A | C | D | B |
| B | D | C | A |
| C | D | B | A |
| D | C | B | A |

Observe que uma disposição difere das demais apenas pela ordem em que as quatro alunas vão se sentar nas quatro carteiras.

Assim, cada maneira de arrumar as meninas na fileira corresponde a um **agrupamento ordenado** (sequência) formado por quatro elementos.

Dizemos que cada disposição no quadro corresponde a uma **permutação** das quatro crianças.

Vamos usar o PFC para contar o número de possibilidades:

- Para ocupar a primeira carteira da fileira, há quatro opções.
- Definida a primeira posição, há três opções de escolha para a menina que vai sentar na segunda posição.
- Definidas a primeira e a segunda posições, há duas opções de escolha para a menina que vai sentar na terceira carteira.
- Escolhidas a primeira, a segunda e a terceira posições, a menina que vai sentar na última carteira fica determinada de maneira única.

Assim, há 24 possibilidades ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$).

Desse modo, são necessários 24 dias para esgotar todas as possibilidades de as quatro meninas se acomodarem na fileira.

Dados **n** elementos distintos, chama-se **permutação simples** ou simplesmente **permutação** todo **agrupamento ordenado** (sequência) formado por esses **n** elementos.

## Cálculo do número de permutações

Sejam **n** elementos distintos e $\mathbf{P_n}$ o número de permutações possíveis desses **n** elementos.

Vamos contar o número de sequências formadas por **n** elementos:

- Para escolher o primeiro elemento da sequência temos **n** possibilidades.
- Para escolher o segundo elemento da sequência, uma vez definida a primeira posição, há $(n - 1)$ possibilidades.
- Definidos os dois primeiros elementos da sequência, podemos escolher o terceiro elemento de $(n - 2)$ maneiras.

⋮

- Escolhidos os $(n - 1)$ primeiros elementos da sequência, o elemento que irá ocupar a última posição na sequência fica determinado de maneira única.

Assim, pelo PFC:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \text{ isto é, } \boxed{P_n = n!}$$

Professor, é interessante ao menos iniciar a construção do diagrama para o estudante compreender a estrutura da multiplicação: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

**EXEMPLO 6**

Um caso de agrupamento formado por permutação corresponde aos anagramas formados com as letras de uma palavra.

Utilizando todas as letras da palavra PRATO (**P**, **R**, **A**, **T**, **O**) e trocando-as de ordem, temos uma sequência de cinco letras que forma uma "palavra" com ou sem sentido. Cada "palavra" formada corresponde a um anagrama, como em: PROTA, ATORP, RAPTO, TROPA etc.

O número de anagramas formados é o número de permutações possíveis das letras **P**, **R**, **A**, **T**, **O**, a saber:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

**PENSE NISTO:**

Como seria a representação dessas possibilidades em um diagrama da árvore?

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**5** Sejam os anagramas formados com as letras **G**, **R**, **A**, **N**, **I**, **Z**, **O**. Quantos começam e terminam por vogal?

**Solução:**

Para iniciar o anagrama, temos três possibilidades (**A**, **I**, **O**).

Definida a vogal do início, sobram duas opções para a vogal que irá ocupar a última letra do anagrama.

Definidas as duas extremidades, as outras cinco letras (uma vogal e quatro consoantes) podem ocupar qualquer posição no anagrama, num total de 120 possibilidades ($P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$).

O resultado procurado é, portanto, $3 \cdot 2 \cdot P_5 = 6 \cdot 120 = 720$.

**6** Giba e Gina têm três filhos: Carla, Luís e Daniel. A família quer tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado.

GRAPHORAMA

**a)** De quantas formas distintas os membros da família podem se distribuir?

**b)** Em quantas possibilidades o casal aparece lado a lado?

**Solução:**

**a)** Cada forma de dispor as 5 pessoas lado a lado corresponde a uma permutação dessas 5 pessoas, uma vez que a sequência é formada por todos os membros da família.

O número de posições possíveis é, portanto, $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

**b)** Para que Giba e Gina apareçam juntos (lado a lado), podemos considerá-los como uma única pessoa que irá permutar com as outras três, num total de 24 possibilidades ($P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$).

Porém, para cada uma dessas 24 possibilidades, Giba e Gina podem trocar de lugar entre si, de 2 maneiras distintas ($P_2 = 2! = 2$).

Assim, o resultado procurado é $\underbrace{P_4}_{\text{entre os blocos}} \cdot \underbrace{P_2}_{\text{dentro do bloco}} = 24 \cdot 2 = 48$.

## EXERCÍCIOS

**35** Determine o número de anagramas formados a partir de:

**a)** LUA

**b)** GATO

**c)** ESCOLA

**d)** REPÚBLICA

**e)** FESTA

**f)** PERNAMBUCO

**36** Um dado foi lançado quatro vezes sucessivamente e as faces obtidas foram 2, 3, 5 e 6, não necessariamente nessa ordem. De quantas formas distintas pode ter ocorrido a sequência de resultados?

**37** Considere os anagramas formados a partir de CONQUISTA.

**a)** Quantos são?

**b)** Quantos começam por vogal?

**c)** Quantos começam e terminam por consoante?

**d)** Quantos têm as letras CON juntas e nessa ordem?

**e)** Quantos apresentam a letra **C** antes da letra **A**?

**f)** Quantos apresentam as letras CON juntas, o mesmo ocorrendo com as letras QUIS e também com as letras TA?

**38** Uma vez por ano, dona Fátima, que mora no Recife, visita parentes em Caruaru, João Pessoa, Petrolina, Maceió e Garanhuns.

**a)** De quantas formas distintas ela pode escolher a sequência de cidades a visitar?

**b)** De quantos modos diferentes a ordem das cidades pode ser definida se dona Fátima pretende encerrar as visitas em Petrolina?

**39** Em uma mesma prateleira de uma estante há 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria.

**a)** De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros nessa prateleira, se desejamos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

ALEX ARGOZINO

**b)** De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros nessa prateleira de modo que nas extremidades apareçam livros de Álgebra e os livros de Trigonometria fiquem juntos?

**40** Em uma turma de um curso de idiomas, o professor escolherá, semanalmente, um aluno para comentar o filme visto na semana. Ele tem como alunos quatro rapazes e três moças e cada aluno irá comentar apenas um filme.

**a)** Quantas semanas serão necessárias para que todos os alunos da turma sejam chamados?

**b)** De quantos modos distintos poderá ser estabelecida a ordem dos alunos para comentar os filmes?

**c)** De quantos modos distintos poderá ser estabelecida a ordem dos alunos se o professor escolher primeiro só as moças e depois os rapazes?

**d)** De quantos modos distintos poderá ser estabelecida a ordem dos alunos se o professor escolher os alunos alternadamente de acordo com o sexo?

**41** Em quantos anagramas da palavra QUEIJO as vogais não aparecem todas juntas?

**42** Resolva estas equações:

**a)** $P_n = 24$

**b)** $\frac{P_n}{P_{(n-2)}} = 506$

**43** Permutando-se as letras **T**, **R**, **A**, **P**, **O**, **S**, são formados 720 anagramas. Esses anagramas são colocados em ordem alfabética.

**a)** Determine a posição da primeira "palavra" que começa por **R**.

**b)** Qual é a posição correspondente a PRATOS?

**c)** Que anagrama ocupa a 500ª posição?

**44** Considerando os anagramas da palavra BRASIL, responda:

**a)** quantos começam por **B**?

**b)** quantos começam por **B** e terminam por **L**?

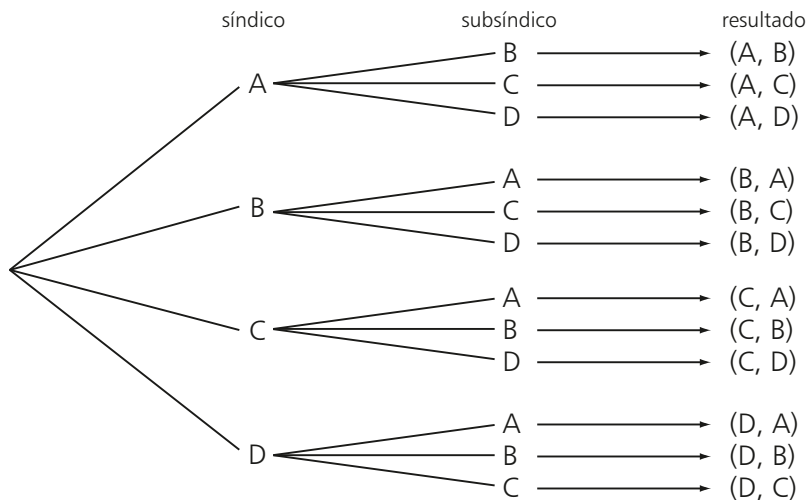
**c)** quantos começam por **B** ou terminam por **L**?

**45** Seja o conjunto $A = \{p, q, r, s\}$. Determine o número de funções que podem ser definidas de **A** em **A**.

## Arranjos

Em uma reunião de um condomínio residencial, foi realizada uma votação para definir os cargos de síndico e subsíndico do prédio.

Quatro moradores, **A**, **B**, **C**, **D**, candidataram-se a ocupar esses cargos. De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado dessa votação?

Façamos inicialmente uma representação de todas as possibilidades, usando o diagrama da árvore de possibilidades:

Observe que cada possibilidade acima representada corresponde a um **agrupamento ordenado** de duas pessoas escolhidas entre os quatro candidatos.

Note, por exemplo, que o par ordenado (A, B) é diferente do par ordenado (B, A), pois, na primeira situação, o síndico é **A** e o subsíndico é **B** e, na segunda situação, ocorre o contrário.

Dizemos que cada resultado da votação corresponde a um **arranjo** dos quatro elementos (candidatos) tomados dois a dois (isto é, escolhemos dois entre os quatro para formar o agrupamento ordenado).

Vamos, por meio do PFC, contar o número total de arranjos possíveis (indicaremos por $\mathbf{A}_{4,\,2}$):

- Para a escolha do síndico, há quatro possibilidades.
- Definido o síndico, sobram três opções para a escolha do cargo de subsíndico.

Assim, $A_{4,\,2} = 4 \cdot 3 = 12$.

Dado um conjunto com **n** elementos distintos, chama-se **arranjo** desses **n** elementos, tomados **k** a **k** (com $k \leq n$), qualquer agrupamento ordenado de **k** elementos distintos escolhidos entre os **n** existentes.

### Contagem do número de arranjos

Dados **n** elementos distintos, vamos indicar por $\mathbf{A}_{n,\,k}$ o número de arranjos desses elementos, tomados **k** a **k**. Vamos usar o PFC:

- O 1º elemento da sequência pode ser escolhido de **n** formas possíveis.
- O 2º elemento da sequência pode ser escolhido de $(n - 1)$ maneiras distintas, pois já fizemos a escolha anterior e não há repetição de elementos.

- Feitas as duas primeiras escolhas, há $(n - 2)$ maneiras diferentes de escolher o 3º elemento da sequência, pois não pode haver repetição.

⋮

- Para escolher o k-ésimo elemento, a partir das $(k - 1)$ escolhas anteriores, sobram $n - (k - 1) = (n - k + 1)$ opções.

Assim, pelo PFC, a quantidade de arranjos possíveis (indicada por $\mathbf{A}_{n,k}$) é:

$$A_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) \quad (1)$$

Para obter uma expressão equivalente a (1) usando fatorial, basta multiplicar e dividir seu segundo membro por:

$(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n - k)!$. De fato:

$$A_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) \cdot \frac{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Observe que o numerador da expressão acima corresponde a $n!$.

Assim:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n - k)!} \quad (2)$$

Os problemas que envolvem contagem do número de arranjos podem ser resolvidos pelo PFC ou pela aplicação das fórmulas equivalentes (1) ou (2).

**OBSERVAÇÃO**

As permutações, estudadas a partir da página 235, podem ser consideradas arranjos.

Dados **n** elementos distintos, todo arranjo (agrupamento ordenado) formado exatamente por esses **n** elementos corresponde a uma permutação desses elementos.

Com efeito, fazendo $k = n$ na fórmula do arranjo, obtemos:

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n - n)!}, \text{ isto é, } P_n = \frac{n!}{0!} = n!$$

Nessa última expressão, note a "conveniência" de termos definido $0! = 1$.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**7** Dado o conjunto das vogais $V = \{a, e, i, o, u\}$, determine a quantidade de arranjos que podemos formar com três elementos de **V**.

**Solução:**

Todo arranjo formado é um agrupamento ordenado de três elementos, escolhidos entre os cinco de **V**.

Alguns arranjos possíveis são: (a, e, i); (a, o, u); (e, a, i); (e, i, o); (u, o, i); (i, o, u) etc.

Façamos, então, essa contagem:

*1º modo*: Usando o PFC:

Multiplicando as possibilidades, obtemos o número de arranjos: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

*2º modo*: Usando uma das fórmulas:

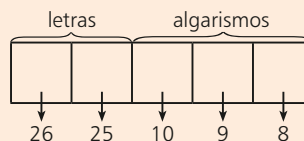
① $\underset{n\ k}{A_{5,\,3}} = \underset{n}{5} \cdot \underset{n-1}{4} \cdot \underset{n-k+1}{3} = 60$ ou ② $A_{5,\,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$

Observe, neste exercício, que um arranjo difere de outro pela natureza dos elementos escolhidos (letras) ou pela ordem dos elementos.

**8** A senha de um cartão magnético bancário, usado para transações financeiras, é uma sequência de duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto) seguida por uma sequência de três algarismos distintos. Quantas senhas podem ser criadas?

**Solução:**

Devemos determinar o número de sequências (agrupamentos ordenados) formadas por cinco elementos, sendo os dois primeiros letras distintas e os três últimos algarismos distintos.

Utilizemos o princípio multiplicativo:

São possíveis 468 000 senhas ($26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 468\,000$).

Observe também que:

$$\underbrace{26 \cdot 25}_{A_{26,\,2}} \cdot \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}_{A_{10,\,3}}$$

$A_{26,\,2}$: sequência de 2 letras distintas entre as 26

$A_{10,\,3}$: sequência de 3 algarismos distintos entre os 10

## EXERCÍCIOS

**46** Para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do grêmio de um colégio, candidataram-se dez alunos. De quantos modos distintos pode ser feita essa escolha?

**47** A senha de acesso a uma rede de computadores é formada por uma sequência de quatro letras distintas seguida por dois algarismos distintos:

**a)** Quantas são as possíveis senhas de acesso?

**b)** Quantas senhas apresentam simultaneamente apenas consoantes e algarismos maiores que 5?

Considere as 26 letras do alfabeto.

**48** Em uma pesquisa encomendada por uma operadora turística com o objetivo de descobrir os destinos nacionais mais cobiçados pelos brasileiros, o entrevistado deve escolher, em ordem de preferência, três destinos entre os dez apresentados pelo entrevistador. Um dos destinos apresentados é a cidade de Natal.

**a)** Quantas respostas diferentes podem ser obtidas?

**b)** Quantas respostas possíveis apresentam a cidade de Natal como destino preferido em 1º lugar?

**c)** Quantas respostas possíveis não contêm Natal entre os destinos mencionados?

**49** A 1ª fase de um torneio de futebol é disputada por 15 equipes no sistema de turno e returno (a equipe **A**, por exemplo, joga com a equipe **B** duas vezes: uma em seu campo e a outra no campo adversário). Quantas partidas são disputadas ao todo, se os dois mais bem classificados da 1ª fase fazem a final no mesmo sistema?

**50** Para a eleição do corpo dirigente de uma empresa, oito pessoas são pré-selecionadas. De quantas maneiras distintas poderão ser escolhidos o presidente, o vice-presidente e o diretor financeiro, se apenas dois deles têm conhecimentos para assumir a diretoria financeira?

**51** Uma empresa distribui a seus funcionários um questionário constituído de duas partes. Na primeira, o funcionário deve colocar a ordem de preferência de turno de trabalho: matutino, vespertino ou noturno. Na segunda, o funcionário deve escolher, em ordem de preferência, dois dos sete dias da semana para folgar. De quantas maneiras distintas um funcionário poderá preencher esse questionário?

**52** Em uma final de uma prova de natação participam cinco atletas europeus, dois norte-americanos e um brasileiro.

**a)** De quantos modos distintos poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

**b)** Em quantos resultados só aparecem atletas europeus nas três primeiras posições?

**c)** Em quantos resultados o atleta brasileiro recebe medalha?

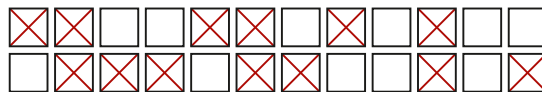
**d)** Supondo que o atleta brasileiro não recebeu medalha, determine o número de resultados em que há mais atletas europeus do que norte-americanos no pódio.

**53** Para compor as equipes para uma competição entre escolas, o professor de Educação Física de um colégio precisa definir a última vaga das seleções de vôlei, basquete e futebol, entre dez garotos que restaram. Oito deles competem nas três modalidades e os demais só jogam futebol. De quantas formas distintas o professor pode completar as três equipes?

**54** Seis amigos participam de uma brincadeira de futebol, que consiste em cobrança de pênaltis. Cada um escolhe, de todos os modos possíveis, um colega para bater o pênalti e outro para tentar defendê-lo.

**a)** Quantas cobranças de pênalti são feitas nessa brincadeira, incluindo as repetições?

**b)** Quantas cobranças haveria se o grupo resolvesse convidar um sétimo amigo para que ele escolhesse, de todos os modos possíveis, o cobrador e o defensor dos pênaltis?

**55** A sessão de um filme já havia começado quando duas pessoas que não se conhecem entram na sala. Elas percebem que só há lugares vagos nas duas primeiras fileiras, abaixo representadas (o × indica que o lugar está ocupado).

**a)** De quantas maneiras distintas elas poderão se acomodar?

**b)** De quantas maneiras distintas elas poderão sentar lado a lado?

**c)** De quantas maneiras distintas elas poderão sentar em uma mesma fileira?

**56** Um baralho comum é composto de 52 cartas, sendo 13 de cada naipe. Os naipes são: copas ♥, ouros ♦, espadas ♠ e paus ♣; e as cartas, para cada naipe, são: **A** (ás), 2, 3, ..., 10, **J** (valete), **Q** (dama) e **K** (rei).

As cartas de um baralho comum foram distribuídas em duas caixas da seguinte maneira: Na caixa **X**, foram colocadas todas as cartas de ouros e de paus e na caixa **Y**, todas as cartas de espadas e de copas. Deseja-se retirar, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, 3 cartas da caixa **X** e, em seguida, 2 cartas da caixa **Y**. As cinco cartas retiradas formam, na ordem em que foram extraídas, uma sequência.

**a)** Quantas sequências distintas de 5 cartas podem ser obtidas?

**b)** Em quantas sequências distintas aparecem os 4 ases e 1 rei?

**c)** Em quantas sequências distintas aparecem os 4 ases?

## Combinações

Quando termina o treino, Jaqueline costuma tomar uma vitamina com leite na lanchonete da academia. Numa tarde, a lanchonete dispunha das seguintes frutas: abacate, mamão, banana, maçã, morango e laranja. De quantas maneiras distintas Jaqueline pode pedir sua vitamina misturando exatamente duas dessas frutas?

Vamos representar, uma a uma, as possibilidades de mistura:

| | | |
|---|---|---|
| mamão e banana | maçã e morango | abacate e mamão |
| mamão e maçã | maçã e laranja | abacate e banana |
| mamão e morango | banana e morango | abacate e maçã |
| mamão e laranja | banana e laranja | abacate e morango |
| banana e maçã | morango e laranja | abacate e laranja |

ALAMY/FOTOARENA

As frutas fazem parte de um cardápio saudável.

Observe que escolher, por exemplo, mamão e laranja, nessa ordem, é o mesmo que escolher laranja e mamão, nessa ordem, pois, para determinar o sabor da vitamina, não importa a ordem em que as frutas sejam escolhidas.

Assim, cada escolha que Jaqueline poderá fazer consiste em um **agrupamento não ordenado** de duas frutas escolhidas entre as seis disponíveis. Dizemos que cada uma das possibilidades anteriores é uma **combinação** das seis frutas tomadas duas a duas, isto é, um **subconjunto** formado por dois elementos (frutas) escolhidos entre seis (frutas) disponíveis.

É usual representar as combinações entre chaves — { } —, assim como fazemos com conjuntos.

Como podemos contar o número de combinações dessas frutas?

Inicialmente, podemos usar o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados de duas frutas:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1^{\text{a}}\text{ fruta}}}{6} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 2^{\text{a}}\text{ fruta}}}{5} = 30$$

Esse cálculo inclui escolhas repetidas, pois sabemos que a ordem de escolha das frutas não importa. Por exemplo, estão incluídas as opções mamão com laranja e laranja com mamão, banana com maçã e maçã com banana etc.

O número de ordens possíveis em que duas determinadas frutas podem ser escolhidas é:

$$2 \cdot 1 = 2 = P_2$$

Assim, como cada escolha foi contada duas vezes, o número de combinações possíveis é $\frac{30}{2} = 15$.

Observe, nesse caso, que uma combinação difere das demais apenas pela natureza dos elementos escolhidos (frutas).

Suponha, agora, que Jaqueline quisesse misturar exatamente três frutas na sua vitamina. Quantas possibilidades ela teria?

Inicialmente, notamos que cada escolha consiste em um agrupamento não ordenado (combinação) de três frutas escolhidas entre seis.

Observe alguns subconjuntos de três elementos que podemos formar: {banana, mamão, maçã}; {mamão, abacate, laranja}; {laranja, banana, mamão} etc.

Vamos fazer a contagem do número de combinações.

Primeiro, usamos o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados de três frutas:

$$\underset{\text{1ª fruta}}{\underset{\uparrow}{6}} \cdot \underset{\text{2ª fruta}}{\underset{\uparrow}{5}} \cdot \underset{\text{3ª fruta}}{\underset{\uparrow}{4}} = 120$$

Como a ordem não importa, é preciso saber quantas vezes uma mesma vitamina foi contada nesse cálculo.

Imaginemos uma possível escolha: mamão (**M**), banana (**B**) e laranja (**L**).

Pelo PFC, o número de sequências formadas por essas três frutas é: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, que são as **permutações** possíveis de **M**, **B** e **L**:

(M, B, L), (M, L, B), (L, B, M), (L, M, B), (B, L, M) e (B, M, L)

Como as seis permutações desses elementos determinam uma mesma vitamina, concluímos que o número de combinações pedido é $\frac{120}{6} = 20$.

Dados **n** elementos distintos, chama-se **combinação** desses **n** elementos tomados **k** a **k** (com $k \leq n$) qualquer **subconjunto** formado por **k** elementos distintos, escolhidos entre os **n**.

## Contagem do número de combinações

Sejam **n** elementos distintos.

Vamos encontrar um método, baseado nos exemplos anteriores, para contar o número de combinações desses **n** elementos tomados **k** a **k** (com $k \leq n$). Indicaremos esse número por $C_{n,\,k}$ ou por $\binom{n}{k}$.

- Usamos o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados (arranjos) formado por **k** elementos distintos, escolhidos entre os **n** elementos disponíveis:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot [n - (k - 1)] = A_{n,\,k}$$

- Usamos o PFC para contar o número de sequências distintas (ordens) que podem ser formadas com os **k** elementos escolhidos (permutações de **k** elementos):

$$k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_k = k!$$

- Como qualquer permutação desses **k** elementos dá origem a uma única combinação, o número de combinações dos **n** elementos tomados **k** a **k** é:

$$C_{n,\,k} = \frac{A_{n,\,k}}{P_k} \Rightarrow \boxed{C_{n,\,k} = \frac{A_{n,\,k}}{k!}}$$

Aplicando a fórmula do arranjo, obtemos:

$$C_{n,\,k} = \frac{\frac{n!}{(n - k)!}}{k!} \Rightarrow \boxed{C_{n,\,k} = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!}}$$

**OBSERVAÇÕES**

- Se k = 1, o número de combinações de **n** elementos distintos, tomados um a um, é igual a **n**, pois corresponde ao número de subconjuntos que podem ser formados com exatamente um elemento escolhido entre os **n** elementos. De fato:

$$C_{n,1} = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{1!\,\cancel{(n-1)!}} = \frac{n}{1!} = n$$

O número de subconjuntos com **n** elementos formados a partir de um conjunto de **n** elementos é 1, que é o próprio conjunto.

Note, nesse caso, a "conveniência" de termos definido 1! = 1.

- Se k = n, o número de combinações de **n** (com $n \geq 1$) elementos distintos, tomados **n** a **n**, é igual a 1. De fato:

$$C_{n,n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!} \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Observe, novamente, a "conveniência" da definição especial 0! = 1.

**PENSE NISTO:**

Como você explica, por meio das noções de conjuntos, que $C_{n,n} = 1$?

- Observe que $C_{n,p} = C_{n,n-p}$ ou $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{\underbrace{[n-(n-p)]}_{=\,p}! \cdot (n-p)!} = C_{n,n-p}$$

Assim, temos:

$$C_{6,4} = C_{6,2};\quad C_{10,3} = C_{10,7};\quad \binom{11}{5} = \binom{11}{6} \text{ etc.}$$

**PENSE NISTO:**

Em um grupo formado por cinco pessoas, a quantidade de duplas (não ordenadas) que podemos formar é igual à quantidade de trios (não ordenados)? Por quê?

Sim, pois:

nº de duplas: $C_{5,2} = \binom{5}{2}$

nº de trios: $C_{5,3} = \binom{5}{3}$

$\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$, pois 2 + 3 = 5

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**9** Em uma classe de 30 alunos pretende-se formar uma comissão de três alunos para representação discente no colégio. Quantas comissões distintas podem ser formadas?

**Solução:**

Cada comissão corresponde a uma combinação dos 30 alunos, tomados 3 a 3, uma vez que não importa a ordem de escolha dos alunos.

Para contar as possibilidades, podemos ou não usar a fórmula.

*1º modo*: Sem a fórmula

- Contamos, inicialmente, o número de maneiras de escolher 3 alunos entre os 30, levando em conta a ordem de escolha:

$$30 \cdot 29 \cdot 28$$

- Como a ordem não importa, determinamos o número de ordens possíveis para escolher três determinados alunos:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ (ou } P_3 = 3!)$$

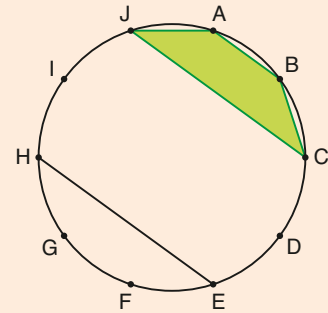
Assim, o número de combinações é $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4\,060$.

*2º modo*: Com a fórmula

$$C_{30,3} = \binom{30}{3} = \frac{30!}{(30-3)! \cdot 3!} = \frac{30!}{27! \cdot 3!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \cancel{27!}}{\cancel{27!} \cdot 6} = 4\,060$$

**10** Sobre uma circunferência marcam-se dez pontos distintos.

**a)** Quantos segmentos de reta podem ser construídos com extremidades em dois desses pontos?

**b)** Quantos quadriláteros convexos podem ser construídos com vértices em quatro desses pontos?

**Solução:**

**a)** Observe que escolher **H** e **E**, nessa ordem, é o mesmo que escolher **E** e **H**, nessa ordem, pois o segmento de reta formado será o mesmo.

Assim, devemos contar o número de agrupamentos não ordenados formados por dois desses dez pontos, a saber:

$$C_{10,\,2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \quad \text{ou} \quad C_{10,\,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{8!}} = 45$$

**b)** Observe, por exemplo, que a ordem de escolha dos pontos **A**, **B**, **C** e **J** não importa, pois o quadrilátero convexo formado por esses pontos continuará sendo o mesmo.

Assim, devemos escolher, sem importar a ordem, quatro dos dez pontos:

$$C_{10,\,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \quad \text{ou} \quad C_{10,\,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cancel{6!}} = 210$$

**11** Nove funcionários de uma grande empresa (5 mulheres e 4 homens) foram participar das gravações para uma campanha publicitária. Chegando ao local da filmagem, foram informados de que, na cena que seria gravada, deveriam aparecer apenas quatro pessoas, sendo 2 homens e 2 mulheres.

De quantas maneiras distintas poderão ser escolhidos os quatro funcionários?

**Solução:**

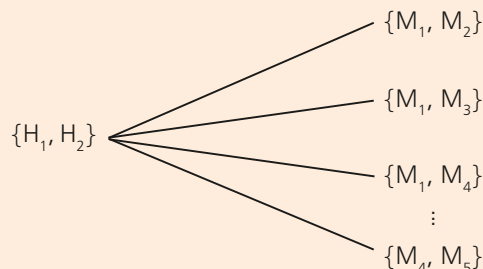
As 5 mulheres podem ser representadas por $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$, $\mathbf{M_4}$ e $\mathbf{M_5}$, e os 4 homens, por $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ e $\mathbf{H_4}$.

- Para escolher os dois funcionários homens, temos: $C_{4,\,2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$, ou seja, 6 possibilidades, abaixo destacadas:

$$\{H_1, H_2\}, \{H_1, H_3\}, \{H_1, H_4\}, \{H_2, H_3\}, \{H_2, H_4\} \text{ e } \{H_3, H_4\}$$

- Para escolher as duas funcionárias, temos: $C_{5,\,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$, ou seja, 10 possibilidades:

$\{M_1, M_2\}, \{M_1, M_3\}, \{M_1, M_4\}, \{M_1, M_5\}, \{M_2, M_3\}, \{M_2, M_4\}, \{M_2, M_5\}, \{M_3, M_4\}, \{M_3, M_5\}$ e $\{M_4, M_5\}$

Observe, por exemplo, a dupla masculina $\{H_1, H_2\}$; eles poderão se juntar a qualquer uma das dez duplas femininas:

Para a próxima dupla masculina listada $\{H_1, H_3\}$, temos, novamente, dez possibilidades de composição.

Enfim, para cada uma das 6 duplas masculinas, o número de possibilidades de composição com as duplas femininas é 10. Assim, o resultado procurado é:

$$\underbrace{6}_{C_{4,\,2}} \cdot \underbrace{10}_{C_{5,\,2}} = 60$$

**12** Uma locadora de automóveis tem à disposição de seus clientes uma frota de dezesseis carros nacionais e quatro carros importados, todos distintos. De quantas formas uma empresa poderá alugar três carros, de modo que pelo menos um carro nacional seja escolhido?

**Solução:**

*1º modo*:

Podemos ter um, dois ou três carros nacionais.

- Com um carro nacional e dois importados, o número de opções é $16 \cdot \binom{4}{2} = 16 \cdot 6 = 96$.
- Com dois carros nacionais e um importado, o número de opções é $\binom{16}{2} \cdot 4 = 120 \cdot 4 = 480$.
- Com os três carros nacionais, o número de opções é $\binom{16}{3} = 560$.

Assim, ao todo, o número de possibilidades é $96 + 480 + 560 = 1\,136$.

*2º modo*:

- O número de maneiras de a empresa alugar três carros quaisquer é $\binom{20}{3} = 1\,140$.
- O número de possibilidades de a empresa só alugar carros importados é $\binom{4}{3} = 4$.

Assim, a diferença $\binom{20}{3} - \binom{4}{3} = 1\,140 - 4 = 1\,136$ fornece o número de escolhas em que pelo menos um carro é nacional.

## EXERCÍCIOS

**57** De quantos modos distintos Lucas pode escolher quatro entre as nove camisetas regata que possui para levar em uma viagem?

**58** Um curso de idiomas oferece turmas para iniciantes em inglês, espanhol, alemão, italiano e japonês.

**a)** De quantas formas distintas um estudante pode se matricular em três desses cursos?

**b)** De quantas formas distintas ele poderá se matricular em três desses cursos, incluindo obrigatoriamente o de inglês?

**59** Em um grupo de 6 pessoas, a quantidade de duplas que podem ser formadas é maior, menor ou igual à quantidade de quartetos que podem ser formados? Compare também a quantidade de duplas com a de trios.

**60** Sobre uma circunferência marcam-se dez pontos.

**a)** Quantos triângulos podemos construir com vértices em três desses pontos?

**b)** Quantos pentágonos convexos podemos construir com vértices em cinco desses pontos?

**c)** Considere o decágono convexo cujos vértices são os pontos assinalados sobre essa circunferência. Qual é o número de diagonais que esse polígono possui?

**61** Uma junta médica deverá ser formada por quatro médicos e dois enfermeiros. De quantas maneiras ela poderá ser formada se estão disponíveis dez médicos e seis enfermeiros?

**62** Uma equipe de dez pesquisadores é formada por sete brasileiros e três estrangeiros. Para apresentar um projeto a uma empresa, será necessário escolher cinco pesquisadores, dos quais no mínimo um deve ser estrangeiro. De quantas formas distintas poderá ser feita essa escolha?

Para resolver os exercícios 63 a 65, reveja, se necessário, o enunciado do exercício 56.

**63** Escolhendo-se simultaneamente quatro cartas de um baralho comum, determine:

**a)** o número de maneiras distintas de escolher as quatro cartas;

**b)** de quantas formas distintas é possível escolher as quatro cartas de copas;

**c)** de quantos modos distintos é possível escolher quatro ases.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

**64** Duas cartas são sorteadas, de uma só vez, de um baralho comum. Determine o número de maneiras possíveis de ocorrer um resultado formado por:

**a)** um rei e uma rainha;

**b)** duas cartas de copas;

**c)** uma carta de copas e outra de ouros;

**d)** dois ases;

**e)** cartas de naipes distintos.

**65** De quantas maneiras distintas poderão ser sorteadas simultaneamente cinco cartas de um baralho de modo que o resultado do sorteio contenha:

**a)** três cartas de paus e duas de espadas?

**b)** o rei de ouros?

**c)** exatamente dois valetes?

**d)** pelo menos três valetes?

**66** Um casal de Curitiba decidiu que a viagem de lua de mel seria feita pelo Nordeste, visitando exatamente três das nove capitais.

**a)** De quantos modos distintos poderiam ser escolhidas as três capitais, sem levar em consideração a ordem de visita?

**b)** Se o casal pretendesse conhecer obrigatoriamente Salvador, de quantos modos poderia ser feita a escolha?

**c)** Se, por motivos logísticos, Fortaleza só pudesse ser visitada se São Luís também o fosse e vice-versa, determine de quantas maneiras a escolha poderá ser feita.

**67** Para montar uma cesta de café da manhã, estão disponíveis os seguintes itens: quatro tipos de pão, três tipos de queijo, três tipos de fruta, cinco sabores de geleia e quatro sabores de torta doce. De quantos modos distintos a cesta poderá ser montada se um cliente pedir dois tipos de pão, um tipo de queijo, duas frutas, dois sabores de geleia e uma torta doce?

ALEX ARGOZINO

**68** Marcam-se cinco pontos distintos sobre uma reta **r**. Sobre outra reta **s**, paralela (e distinta) a **r**, marcam-se mais quatro pontos distintos.

**a)** Quantos triângulos podem ser formados com vértices em três quaisquer desses pontos?

**b)** Quantos quadriláteros convexos podem ser formados com vértices em quatro quaisquer desses pontos?

**69** Para montar o seu enxoval, Priscila foi a uma loja onde a vendedora lhe mostrou 7 jogos de cama, 8 jogos de banho e **n** jogos de mesa. Priscila achou que seria suficiente comprar dois jogos de cama, dois de mesa e quatro de banho. Nessas condições, Priscila escolheu uma entre as 66 150 possibilidades de compra de seu enxoval. Qual é o valor de **n**?

**70** Faça o que se pede:

**a)** Em uma reunião havia 50 pessoas. Cada uma cumprimentou todas as outras uma única vez. Quantas saudações foram dadas nessa reunião?

**b)** Generalize o item *a*, supondo que havia **n** pessoas na reunião.

**c)** Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras uma única vez com um aperto de mão. Sabendo que foram dados 741 apertos de mão no total, determine o número de pessoas presentes à reunião.

**71** (Obmep) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diego e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados.

ILUSTRAÇÃO EXTRAÍDA DA PROVA DA OBMEP ANO 2015, 1ª FASE, NÍVEL 3.

De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

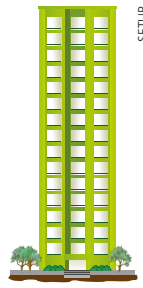
**a)** 20 **b)** 30 **c)** 60 **d)** 90 **e)** 120

**72** No grêmio de uma universidade serão realizadas eleições para os cargos de presidente, vice-presidente, tesoureiro e 4 conselheiros. Determine o número de maneiras distintas de ocorrer o resultado dessa eleição, sabendo que 14 alunos candidataram-se para ocupar qualquer um dos cargos e que todos os conselheiros eleitos terão a mesma função.

**73** Qual é o número de peças de um jogo de dominó comum (números de 0 a 6)?

ALEX ARGOZINO

**74** A frente de um prédio comercial de 15 andares possui 45 janelas idênticas, cada uma correspondendo a uma sala comercial, como mostra a figura ao lado.

SETUP

De madrugada, o porteiro do prédio verificou, no seu painel de controle, que em seis salas da frente as luzes haviam ficado acesas.

**a)** Determine o número de maneiras distintas de se ter seis salas com as luzes acesas.

**b)** Determine o número de maneiras distintas de se ter seis salas com as luzes acesas, sendo três em um andar e três em outro andar.

**c)** Determine o número de maneiras distintas de se ter seis salas com as luzes acesas, sendo duas em um andar, duas em outro e duas em um andar diferente dos anteriores.

**75** Uma organização beneficente pré-seleciona, todo mês, 10 tipos de produto de uma lista de 15, para montar uma cesta básica que será distribuída às famílias carentes de certa região.
Para cada tipo de produto, a organização tem 5 possíveis fornecedores dos quais serão escolhidos 2.
De quantos modos distintos essa organização pode adquirir a cesta básica em um determinado mês? Não é necessário efetuar todos os cálculos, deixe-os indicados.

**76** Uma livraria promoveu uma liquidação, colocando à venda 45 livros, todos distintos, sendo 20 livros ao preço de R$ 15,00 cada, 15 livros ao preço de R$ 20,00 cada e 10 livros ao preço unitário de R$ 10,00. Emília foi à livraria durante a liquidação, pretendendo gastar a exata quantia de R$ 50,00. De quantos modos distintos Emília poderá escolher os livros que irá comprar?

# Permutações com elementos repetidos

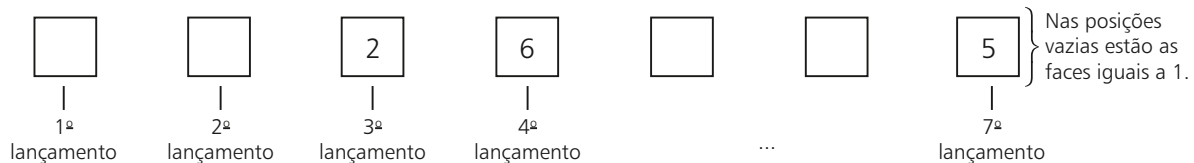
Estudamos, até aqui, os agrupamentos simples, isto é, aqueles formados por elementos distintos. Vamos agora estudar as permutações com elementos repetidos, cujas técnicas de contagem estão baseadas em estratégias já estudadas na contagem dos agrupamentos simples.

## 1º caso: Apenas um elemento se repete

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Um dado é lançado sete vezes sucessivamente. De quantas formas distintas pode ser obtida uma sequência com quatro faces iguais a 1 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6?

- Vamos escolher, de início, as posições (correspondentes à ordem dos lançamentos) que as faces 2, 5 e 6 podem ocupar.

  Para fixar ideias, veja o esquema seguinte, em que está representada uma possível ocorrência de posições:

  Observe que, fixadas as posições das faces 2, 6 e 5, as posições das faces iguais a 1 ficam determinadas de maneira única, uma vez que qualquer permutação de faces 1 gera a mesma sequência.

  Trata-se, então, de escolher três entre sete posições. Isso pode ser feito de 35 maneiras distintas ($C_{7,\,3} = 35$).

- Para a escolha anterior (3º, 4º e 7º lançamentos), as faces 2, 5 e 6 podem trocar de lugar entre si, num total de 6 maneiras distintas ($P_3 = 3! = 6$).

Os passos anteriores sugerem que o número de sequências possíveis seja dado por:

$$C_{7,3} \cdot P_3 = \frac{7!}{3!\,4!} \cdot 3! = \frac{7!}{4!}$$

← 7 é o número total de lançamentos
← 4 é o número de vezes que a face 1 ocorre

Indicaremos esse número por $P_7^{(4)}$.

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos obter o número de anagramas formados a partir de CASAL. Cada anagrama formado é uma sequência de cinco letras, das quais duas são iguais a **A**.

O total de anagramas é $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$.

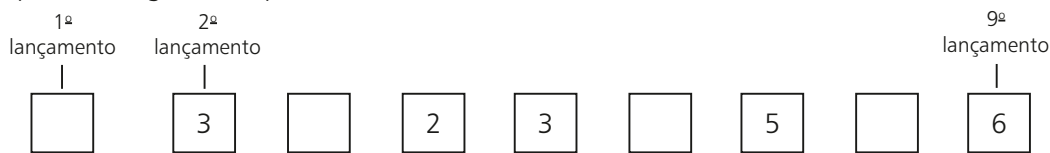
Já em VENEZUELA, há nove letras, das quais três são iguais a **E**. Então, o número de anagramas possíveis é:

$$P_9^{(3)} = \frac{9!}{3!} = 60\,480$$

## 2º caso: Dois elementos diferentes se repetem

Suponha, agora, que um dado seja lançado nove vezes sucessivamente. De quantas formas distintas pode ser obtida uma sequência com quatro faces iguais a 1, duas faces iguais a 3 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6?

- Inicialmente, vamos determinar as possíveis posições em que as faces distintas de 1 podem ocorrer. Há 126 possibilidades ($C_{9,5} = 126$), pois devem ser escolhidas cinco entre nove posições.

Acompanhe a seguir uma possível escolha.

As quatro faces 1 entram nas posições vazias.

- Para tal escolha de lugares (2º, 4º, 5º, 7º e 9º lançamentos), as faces 2 (uma vez), 3 (duas vezes), 5 (uma vez) e 6 (uma vez) podem trocar de lugar entre si. Usando o resultado obtido no 1º caso, sabemos que o número de possibilidades é $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!}$.

Assim, reunindo os dois passos anteriores, concluímos que o número de permutações possíveis é dado por:

$$C_{9,5} \cdot P_5^{(2)} = \frac{9!}{5!\,4!} \cdot \frac{5!}{2!} = \frac{9!}{4!\,2!}$$

← 9 é o número total de lançamentos
← 2 é o número de faces iguais a 3
↑ 4 é o número de faces iguais a 1

Indicaremos por $P_9^{(4,\,2)}$.

Para obter o número de anagramas formados a partir de BANANA, seguimos o mesmo raciocínio: são seis letras, das quais três são **A** e duas são **N**. Então, o total de anagramas é:

$$P_6^{(3,\,2)} = \frac{6!}{3!\,2!} = 60$$

## Caso geral

Dados **n** elementos, dos quais $\mathbf{n_1}$ são iguais a $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{n_2}$ são iguais a $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{n_3}$ são iguais a $\mathbf{a_3}$, ..., $\mathbf{n_r}$ são iguais a $\mathbf{a_r}$ (em que $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$), o número de permutações desses **n** elementos é dado por:

$$P_n^{(n_1,\, n_2,\, ...,\, n_r)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, ...\, n_r!}$$

Para determinarmos o número de anagramas formados a partir de CACHORRO, observamos que há oito letras, das quais duas são iguais a **C**, duas são iguais a **O**, duas são iguais a **R**, além de uma letra **A** e uma letra **H**. Temos, então, o seguinte número de anagramas:

$$P_8^{(2,\,2,\,2,\,1,\,1)} = P_8^{(2,\,2,\,2)} = \frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 5\,040$$

**EXEMPLO 7**

Um casal tem cinco filhos; três meninos e duas meninas. De quantos modos distintos poderia ter ocorrido a ordem dos nascimentos dos filhos?

Representando o sexo dos filhos por **M** (masculino) e **F** (feminino), devemos permutar cinco letras, das quais três são **M** e duas são **F**. Assim, o número de possibilidades é:

$$P_5^{(3,\ 2)} = \frac{5!}{3!\ 2!} = 10$$

Observe, a seguir, algumas possibilidades:

(M, M, M, F, F), (M, F, M, F, M), (F, M, M, M, F), ...

## EXERCÍCIOS

**77** Desconsiderando o acento gráfico, determine o número de anagramas formados a partir de:

**a)** MORANGO
**b)** FALTA
**c)** OURO
**d)** PANAMÁ
**e)** ACADEMIA
**f)** MATEMÁTICA
**g)** SOSSEGADO
**h)** COPACABANA
**i)** PROBABILIDADE

**78** Um dado é lançado quatro vezes sucessivamente. Determine o número de sequências de resultados em que:

**a)** as quatro faces são iguais a 5;
**b)** três faces são iguais a 2 e uma face é igual a 4;
**c)** duas faces são iguais a 3, uma face é 4 e outra é 5.

**79** Permutando os algarismos 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3 e 4, quantos números de 10 algarismos podemos formar?

**80** Considere os anagramas formados a partir de PIRATARIA.

**a)** Quantos são?
**b)** Quantos começam pela letra **A**?
**c)** Quantos começam por vogal?
**d)** Quantos começam e terminam por vogal?

**81** Permutando-se duas letras iguais a **A** e **n** letras iguais a **B** podem ser obtidos 21 anagramas. Qual é o valor de **n**?

**82** Um dado é lançado três vezes sucessivamente. Quantas sequências de resultados apresentam soma dos pontos:

**a)** menor que 8?
**b)** maior que 13?

**83** Um robô se encontra no ponto P(8, 10) de um sistema de eixos coordenados e quer chegar à origem (0, 0). Sabe-se que ele foi programado para dar um passo de uma unidade de medida de comprimento por vez, para a esquerda ou para baixo. Quantos caminhos distintos podem conduzi-lo à origem?

## DESAFIO

Três professores foram pré-selecionados para realizar quatro apresentações diferentes na semana pedagógica de um colégio.

Cada apresentação será atribuída a um único professor e todos os professores pré-selecionados devem, obrigatoriamente, fazer ao menos uma apresentação.

De quantos modos distintos podem ser atribuídas as apresentações?

CAPÍTULO 11

# Probabilidade

## Experimentos aleatórios

Todas as quartas-feiras e sábados, um banco estatal federal promove o sorteio dos números — aqui chamados dezenas — da Mega-Sena. Nela você pode escolher de 6 (aposta mínima) a 15 números (aposta máxima), dentre os 60 disponíveis. O resultado do sorteio consiste em 6 dezenas e você recebe prêmios, em dinheiro, ao acertar 4, 5 ou as 6 dezenas sorteadas – este último prêmio por acertar a sena é o sonho de milhões de brasileiros que lotam as casas lotéricas para fazer suas apostas. O brasileiro sabe, ainda que intuitivamente, que as chances de ele ganhar são muito pequenas. Mas, afinal, qual é essa chance?

Ao longo deste capítulo você saberá a resposta e terá a oportunidade de ler mais sobre a Mega-Sena, na seção *Troque ideias*, na página 275.

O sorteio das dezenas da Mega-Sena é um exemplo do que denominamos **experimento aleatório**: mesmo repetido um grande número de vezes (até janeiro de 2016 já haviam ocorrido mais de 1 780 sorteios), em condições idênticas, não é possível prever, entre os resultados possíveis, aquele que irá ocorrer. O resultado do sorteio depende exclusivamente do **acaso**. Dizemos que se trata de um **experimento de natureza aleatória** (ou **casual**).

Entende-se por dado não viciado (ou honesto) aquele cujas faces têm probabilidades iguais de sair em um lançamento.
Se necessário, consulte as páginas 256 e 257 para maiores detalhes.

Suponha, agora, que um dado não viciado (ou honesto) seja lançado. Não é possível dizer, com certeza, qual número será obtido na face superior. Pode ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Trata-se, também, de um experimento aleatório cujo resultado, entre os possíveis, não pode ser previsto com certeza.

Podemos citar vários outros experimentos de natureza aleatória:

- lançamento de uma moeda não viciada, em que se observa a face obtida;
- extração de uma carta de um baralho comum, em que se observa o naipe da carta;
- extração, ao acaso, de uma bola de uma caixa que contém 40 bolas de mesmo tamanho, sendo 25 pretas e 15 brancas, em que se observa a cor da bola;
- sorteio dos cinco algarismos que formam o número premiado na Loteria Federal.

SHUTTERSTOCK

A teoria da probabilidade permite que se façam **previsões** sobre as chances de um acontecimento ocorrer, em certo experimento aleatório, a partir da análise dos resultados obtidos, quando esse experimento é repetido, nas mesmas condições, um grande número de vezes.

## UM POUCO DE **HISTÓRIA**

### A teoria da probabilidade

Os primeiros registros ligados à teoria da probabilidade aparecem na obra do italiano Girolamo Cardano (1501-1576) sobre jogos de azar. Cerca de cem anos depois, Blaise Pascal deu novo impulso ao desenvolvimento da teoria da probabilidade, por meio das cartas que trocou com Pierre de Fermat (1601-1665), em que discutiam problemas ligados a jogos. Em sua obra sobre o triângulo aritmético, datada de 1654, há também alguns tópicos sobre probabilidade.

Retrato de Girolamo Cardano entalhado em cobre no século XVI. Colorido posteriormente. Autoria desconhecida.

Ilustração de Jacques Bernoulli feita a partir de uma gravura histórica. Data e autoria desconhecidas.

No entanto, o primeiro artigo completo sobre o assunto só foi escrito em 1713, por Jacques Bernoulli, na obra *Ars Conjectandi* (*Arte de conjecturar*), que continha, inclusive, uma detalhada exposição sobre permutações e combinações. A partir de então, outros matemáticos dariam valiosas contribuições para o desenvolvimento da teoria das probabilidades, cujas aplicações em áreas como Biologia, Economia, Saúde, tábuas atuariais etc. não tardariam a ser reconhecidas.

**Fonte de pesquisa:** BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

# Espaço amostral e evento

## Espaço amostral

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado **espaço amostral** e é indicado pela letra grega $\Omega$ (lê-se “ômega”).

- No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{K, C\}$, em que **K** representa a face cara e **C** representa a face coroa. Observe que $n(\Omega) = 2$, isto é, o número de elementos do conjunto $\Omega$ é igual a 2.
- No lançamento de um dado, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Suponha que um dado seja lançado duas vezes, sucessivamente, e seja observada a sequência de números obtidos nas faces voltadas para cima.

  Usando o princípio fundamental da contagem (PFC), o número de resultados possíveis de ocorrer nesse experimento é $6 \cdot 6 = 36$. Veja, a seguir, uma forma de representar os 36 pares ordenados:

lançamentos →

| 1º \ 2º | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| **2** | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| **3** | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| **4** | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| **5** | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| **6** | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

Assim, $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (2, 1), ..., (3, 1), ..., (4, 1), ..., (5, 1), ..., (6, 1), ..., (6, 6)\}$; $n(\Omega) = 36$.

- Voltemos ao experimento “sorteio das dezenas da Mega-Sena”. Escrever, um a um, todos os possíveis resultados do sorteio é inviável: teríamos que representar todos os possíveis subconjuntos de seis elementos que podem ser formados a partir de {1, 2, ..., 60}. Nesse caso, será necessário usar técnicas de contagem que estudamos no capítulo de Análise Combinatória: trata-se de escolher, sem importar a ordem, seis entre os sessenta números disponíveis. Temos:

$$\binom{60}{6} = C_{60,\,6} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6!} = 50\,063\,860$$

Assim, o número de resultados possíveis deste experimento aleatório é $n(\Omega) = 50\,063\,860$.

Observe que no sorteio da Mega-Sena não importa a ordem dos números sorteados.

## Evento

Uma caixa contém 20 bolas, de mesma massa e tamanho, numeradas de 1 a 20. Uma pessoa, com os olhos vendados, retira uma bola dessa caixa. Trata-se de um experimento aleatório cujo espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, ..., 20\}$.

Vamos construir alguns subconjuntos de $\Omega$:

- **A**: “a bola sorteada contém um múltiplo de 4”; A = {4, 8, 12, 16, 20}.
- **B**: “a bola sorteada contém um número formado por dois algarismos”; B = {10, 11, 12, ..., 20}.
- **C**: “a bola sorteada contém um número primo”; C = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}.
- **D**: “a bola sorteada contém um número natural não nulo menor ou igual a 20”; D = {1, 2, 3, 4, ..., 20}.
- **E**: “a bola sorteada contém um número formado por três algarismos”; $E = \varnothing$.

Cada um desses subconjuntos de $\Omega$ recebe o nome de **evento**.

**OBSERVAÇÕES**

- Quando o evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado **evento certo**. É o caso do evento **D**.
- Quando o evento é o conjunto vazio, ele é chamado **evento impossível**. É o caso do evento **E.**

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral ($\Omega$) de um experimento aleatório.

**EXEMPLO 1**

Vamos considerar o experimento “lançamento de um dado duas vezes, sucessivamente”. O espaço amostral é $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$, como vimos no quadro da página anterior. Qual é o evento $\mathbf{E_1}$: “a soma dos pontos obtidos é maior que 8”?

Devemos analisar esse quadro e assinalar os pares de números cuja soma é 9, 10, 11 ou 12. Temos:

$E_1 = \{(3, 6); (4, 5); (4, 6); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)\}$

Já o evento $\mathbf{E_2}$ “o produto dos números obtidos é igual a 12” é:

$$E_2 = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$$

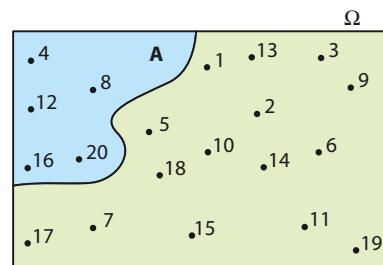
**PENSE NISTO:**

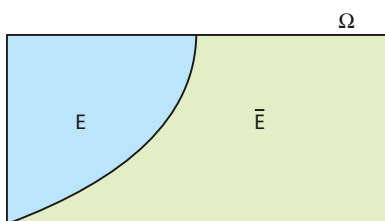
Com base no experimento descrito neste exemplo, crie em seu caderno um evento certo, um evento impossível e um evento formado por um único elemento.

Possível resposta:
Evento certo: a soma dos pontos obtidos é menor que 40.
Evento impossível: o produto dos números obtidos é 7.
Evento com um único elemento: o produto dos números obtidos é 36.

## Evento complementar

Considere, novamente, o experimento que consiste em retirar ao acaso uma bola entre as 20 que estão numa caixa e observar o número mostrado na bola.

Vamos representar ao lado o evento **A**: "ocorre um número múltiplo de 4".

Os elementos de Ω que não pertencem a **A** correspondem aos números que não são múltiplos de 4. Eles formam o conjunto complementar de **A** (em relação a Ω), que pode ser representado por $\overline{A}$ ou $\complement_{\Omega}^{A}$.

Seja **E** um evento de um espaço amostral Ω. Chamamos **evento complementar de E**, em relação a Ω (indica-se por $\overline{E}$ ou $\complement_{\Omega}^{E}$), o evento que ocorre quando **E** não ocorre.

Note que: $\begin{cases} E \cup \overline{E} = \Omega \\ E \cap \overline{E} = \varnothing \end{cases}$

## EXERCÍCIOS

**1** Um dado é lançado e o número da face voltada para cima é anotado.

**a)** Descreva Ω.

**b)** Qual é o evento $\mathbf{E_1}$ "o número obtido é múltiplo de 3"?

**c)** Qual é o evento $\mathbf{E_2}$ "o número obtido não é primo"?

**2** Suponha que, todo ano, a Confederação Brasileira de Futebol (CBF) realize um sorteio para decidir em qual região do país será disputado um torneio internacional. Determine o espaço amostral do experimento a ser realizado em um determinado ano.

**3** Uma moeda honesta é lançada duas vezes sucessivamente e observa-se a sequência de faces obtidas. Determine:

**a)** Ω;

**b)** o evento **E** "sair ao menos uma cara".

**4** Um número natural de 1 a 100 é escolhido ao acaso. Seja o evento **E** "sair um número que é uma potência de base 2".

**a)** Determine **E**.

**b)** Qual é o número de elementos de $\overline{E}$?

**5** Um dado não viciado é lançado duas vezes sucessivamente e é anotada a sequência de faces obtidas. Determine:

**a)** n(Ω);

**b)** $n(E_1)$, sendo $\mathbf{E_1}$ o evento "o primeiro número obtido nesses lançamentos é 3";

**c)** $n(E_2)$, sendo $\mathbf{E_2}$ o evento "o produto dos números obtidos é ímpar";

**d)** $n(E_3)$, sendo $\mathbf{E_3}$ o evento "a soma dos pontos obtidos é menor que 7".

**6** Um dado não viciado é lançado duas vezes, sucessivamente. Seja o evento **E** "a soma dos pontos obtidos é menor ou igual a 9". Determine $\overline{E}$.

**7** Um dado não viciado é lançado três vezes sucessivamente. Seja o evento **E** "pelo menos um dos números obtidos é diferente dos outros". Determine $\overline{E}$.

O enunciado a seguir é válido para as questões 8 e 9.
Uma classe tem 17 rapazes e 15 moças. Pretende-se formar comissões de **n** alunos, escolhidos ao acaso, para representar a classe perante a diretoria do colégio.

**8** Determine o número de elementos do espaço amostral correspondente se:

**a)** n = 1

**b)** n = 2

**c)** n = 3

**9** Se a comissão for composta por dois alunos, considere o evento **E** "há um rapaz e uma moça na comissão" e determine n(E).

**10** Um experimento aleatório é composto de duas etapas: primeiro, uma moeda não viciada é lançada e, em seguida, um dado não viciado é lançado. Construa o espaço amostral desse experimento, utilizando a representação **K** (cara) e **C** (coroa).

**11** Uma caixa contém 4 bolas vermelhas (**V**), 2 pretas (**P**) e 1 branca (**B**), todas do mesmo tamanho e com mesma massa. Uma pessoa retira, ao acaso, uma bola dessa caixa (sem olhar a sua cor), registra em seguida sua cor e, *sem* repor a bola retirada, extrai, também ao acaso, uma segunda bola dessa caixa e anota a sua cor, obtendo assim uma sequência de duas cores.
Quais são os possíveis resultados (sequências) desse experimento?

**12** Com relação à questão anterior, determine o espaço amostral do experimento, considerando que a 2ª extração é feita com reposição da primeira bola retirada.

## Frequência relativa e probabilidade

Foram feitos 80 lançamentos sucessivos de uma moeda honesta, dos quais 37 resultaram em cara (**K**) e 43 resultaram em coroa (**C**).

A razão $\frac{\text{número de caras}}{\text{número total de lançamentos}} = \frac{37}{80} = 0{,}4625$ representa a **frequência relativa** correspondente ao evento {K}; a razão $\frac{43}{80} = 0{,}5375$ representa a frequência relativa correspondente ao evento {C}.

Imagine que tenham sido feitos mais 120 lançamentos dessa moeda, gerando o seguinte resultado acumulado para os 200 lançamentos: 96 caras (**K**) e 104 coroas (**C**). Desse modo, a frequência relativa correspondente ao evento {K} passou a ser $\frac{96}{200} = 0{,}48$ e a frequência relativa correspondente ao evento {C} passou a ser $\frac{104}{200} = 0{,}52$.

À medida que se aumenta o número de lançamentos, verifica-se, experimentalmente, que as frequências relativas correspondentes às ocorrências de cara e coroa ficam cada vez mais próximas entre si, tendendo à igualdade, dada pelo valor 0,50. Quando isso ocorre, dizemos que o espaço amostral relativo ao lançamento da moeda é **equiprovável**.

O Conde de Buffon (1707-1788) — matemático com algumas incursões na teoria de probabilidades, no contexto de jogos — teria lançado uma moeda 4 048 vezes, obtendo a face "cara" 2 048 vezes, de modo que a frequência relativa do evento {K} é $\frac{2\,048}{4\,048} \simeq 0{,}5059$. Naturalmente, a frequência relativa do evento {C} é $\frac{2\,000}{4\,048} \simeq 0{,}4941$ — observe a proximidade dos valores.

## Definição de probabilidade

Seja $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ o espaço amostral finito de um experimento aleatório.

Para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, consideremos o evento elementar ou unitário $\{a_i\}$. Vamos associar a cada um desses eventos um número real, indicado por $\mathbf{p(\{a_i\})}$ ou simplesmente $\mathbf{p_i}$, chamado **probabilidade** de ocorrência do evento $\{a_i\}$, tal que:

- $0 \leq p_i \leq 1, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$
- $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$

Essa associação é feita de modo que $\mathbf{p_i}$ $(i = 1, 2, ..., k)$ seja suficientemente próximo da frequência relativa do evento $\{a_i\}$, quando o experimento é repetido um grande número de vezes.

**EXEMPLO 2**

No lançamento de uma moeda honesta, dizemos que a probabilidade (ou chance) de ocorrer cara é $\frac{1}{2}$, assim como a probabilidade de ocorrer coroa também é $\frac{1}{2}$, pois, como vimos, lançando-se a moeda um grande número de vezes, espera-se que a frequência relativa do evento $\{K\}$ seja muito próxima de $\frac{1}{2}$, assim como a frequência relativa do evento $\{C\}$.

**EXEMPLO 3**

De forma análoga à do exemplo anterior, se considerarmos o experimento que consiste em lançar um dado não viciado, é razoável supor que cada face tenha probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrer, pois $\frac{1}{6}$ é o valor para o qual se aproxima a frequência relativa de cada um dos eventos: $\{1\}, \{2\}, ..., \{6\}$, à medida que o experimento é repetido um grande número de vezes.

Observe que o espaço amostral correspondente ao experimento "lançamento de um dado" também é **equiprovável**: todos os eventos unitários $\{1\}, \{2\}, ..., \{6\}$ têm a mesma chance de ocorrer.

**OBSERVAÇÃO**

Em jogos de azar, deve-se considerar, eventualmente, a existência de algum fator que influencie o resultado — por exemplo, os chamados dados viciados: em vez de serem cubos perfeitos, podem ter pesos dentro, de modo que a frequência de ocorrência de uma face seja maior que a das outras. Outros truques podem ser feitos também em moedas, roletas etc.

Quando, no problema, não for feita qualquer menção, subentende-se que estamos diante de um jogo não viciado (ou honesto).

Veja um exemplo em que uma moeda é viciada:

Imagine que uma moeda foi lançada um número muito grande de vezes e observou-se que a frequência da face cara (**K**) é o dobro da frequência da face coroa (**C**).

Nesse caso, podemos supor a seguinte distribuição de probabilidades para $\Omega = \{K, C\}$:

$$p(\{K\}) = \frac{2}{3} \text{ e } p(\{C\}) = \frac{1}{3}\text{; note, no entanto, que } p(\{K\}) + p(\{C\}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Nesse caso, diz-se que o espaço amostral relativo ao lançamento dessa moeda é **não equiprovável**.

# Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis

Seja $\Omega$ um espaço amostral finito:

$$\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$$

Já vimos que, quando o espaço é equiprovável, $p(\{a_1\}) = p(\{a_2\}) = ... = p(\{a_k\})$, ou, ainda, $p_1 = p_2 = ... = p_k$.

Como $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$, para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$, tem-se: $p_i = \frac{1}{k}$.

Consideremos **E** um evento de $\Omega$, formado por **r** elementos ($r \leqslant k$), isto é, $E = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$. Temos:

$$p(E) = p_1 + p_2 + ... + p_r = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + ... + \frac{1}{k}}_{\textbf{r}\text{ parcelas}} = \frac{r}{k}$$

Assim:

$$p(E) = \frac{r}{k} = \frac{\text{número de elementos de } \mathbf{E}}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Informalmente, podemos interpretar a razão acima como: "a probabilidade de ocorrer um determinado evento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis (casos que nos interessam) e o número de casos possíveis (total de casos)".

## Propriedades

Seja $\Omega$ um espaço amostral finito e equiprovável, correspondente a um experimento aleatório.

Valem as seguintes propriedades:

1ª) A probabilidade do evento certo é igual a 1.
Basta notar que, quando $E = \Omega$, $n(E) = n(\Omega)$ e, portanto, $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = 1$.

2ª) A probabilidade do evento impossível é igual a 0.
Se **E** é um evento impossível, $E = \varnothing$, $n(E) = 0$ e, portanto, $p(E) = 0$.

3ª) Se **E** é um evento de $\Omega$, distinto do evento impossível e também do evento certo, então $0 < p(E) < 1$.
Como $0 < n(E) < n(\Omega)$, dividimos todos os termos dessa desigualdade por $n(\Omega) > 0$:

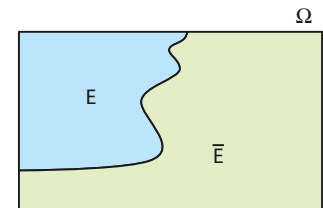
$$\frac{0}{n(\Omega)} < \frac{n(E)}{n(\Omega)} < \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)},$$

do que podemos concluir que $0 < p(E) < 1$.

4ª) Se **E** é um evento de $\Omega$, então $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$.
Como $E \cup \overline{E} = \Omega$ e $E \cap \overline{E} = \varnothing$, podemos escrever:

$$n(E) + n(\overline{E}) = n(\Omega)$$

Dividindo os dois membros dessa igualdade por $n(\Omega) \neq 0$, temos:

$$\frac{n(E)}{n(\Omega)} + \frac{n(\overline{E})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow p(E) + p(\overline{E}) = 1$$

**OBSERVAÇÃO**

As propriedades citadas também são válidas para um espaço amostral finito não equiprovável.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1** Uma urna contém 15 bolas de mesmo tamanho e mesma massa numeradas de 1 a 15. Uma bola é extraída ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com número maior ou igual a 11?

**Solução:**

Temos:

- $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 15\}$; observe que esse espaço amostral é equiprovável.
- Seja o evento **E** "o número da bola sorteada é maior ou igual a 11". Temos: $E = \{11, 12, 13, 14, 15\}$.

Assim:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \simeq 33{,}3\%$$

**2** Um dado não viciado é lançado duas vezes sucessivamente. Qual é a probabilidade de:

**a)** ocorrer 5 no primeiro lançamento e um número par no segundo?

**b)** o produto dos pontos obtidos ser maior que 12?

**Solução:**

Como vimos, o conjunto dos resultados possíveis é formado por $6 \cdot 6 = 36$ pares ordenados, todos com a mesma probabilidade de ocorrer.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$$

**a)** O evento que nos interessa é $E = \{(5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$.

Assim, $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

**b)** O evento que nos interessa é $E = \{(3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$.

Então, $p(E) = \frac{13}{36}$.

**3** De um baralho comum, com 52 cartas, extraímos, ao acaso, uma carta. Qual é a probabilidade de não sair um ás?

**Solução:**

Podemos calcular, inicialmente, a probabilidade de o evento **E** "sair um ás", pois:

E = {A♠, A♣, A♦, A♥}

SETUP

Temos $p(E) = \frac{4}{52}$ e, portanto, a probabilidade de não ocorrer um ás, evento complementar de **E**, é:

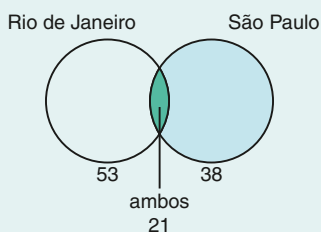
$$p(\overline{E}) = 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

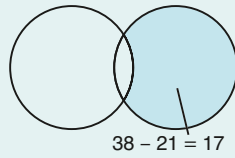
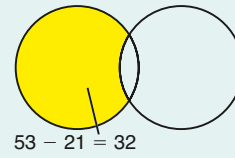
**4** Em um grupo de 80 pessoas, todas de Minas Gerais, 53 conhecem o Rio de Janeiro, 38 conhecem São Paulo e 21 já estiveram nas duas cidades. Uma pessoa do grupo é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela tenha visitado apenas uma dessas cidades?

**Solução:**

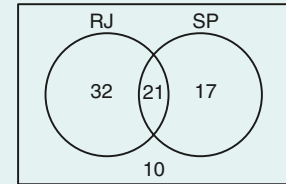
Para facilitar o entendimento, acompanhe os cálculos observando os diagramas de Venn:

- Há 21 pessoas na interseção de São Paulo e Rio de Janeiro.

LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

O Rio de Janeiro é uma das cidades turísticas mais famosas do mundo. Rio de Janeiro (RJ), 2015.

- O número de pessoas que conhecem exclusivamente São Paulo é 38 − 21 = 17.

- O número de pessoas que conhecem exclusivamente o Rio de Janeiro é 53 − 21 = 32.

Note que 21 + 17 + 32 = 70. Assim, há 80 − 70 = 10 pessoas que não conhecem qualquer uma das duas cidades.

Temos:

- $n(\Omega) = 80$
- Considerando **E** o evento "a pessoa conhece apenas uma das duas cidades", temos $n(E) = 32 + 17 = 49$.
- A probabilidade pedida é $\frac{49}{80} = 0{,}6125 = 61{,}25\%$.

## EXERCÍCIOS

**13** Uma urna contém 100 bolas de mesma massa e mesmo tamanho numeradas de 1 a 100. Uma delas é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de o número sorteado ser:

**a)** 18?

**b)** 57?

**c)** maior que 63?

**d)** formado por dois algarismos?

**e)** um quadrado perfeito?

**14** Uma caixa contém 10 tiras de cartolina, todas do mesmo tamanho e textura. Em cada tira está escrita uma única letra do conjunto cujos elementos são as vogais e as cinco primeiras consoantes do alfabeto. Não existem tiras com a mesma letra. Uma tira é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de que a letra escrita na tira sorteada seja:

**a)** **E**?

**b)** **C**?

**c)** **J**?

**d)** consoante?

**15** Ao lançarmos um dado duas vezes sucessivamente, qual é a probabilidade de que:

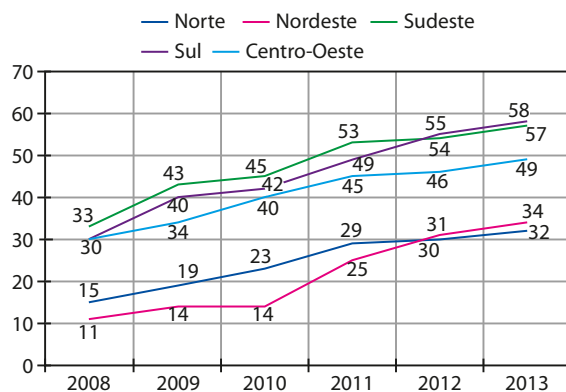
**a)** o número 1 ocorra em ao menos um lançamento?

**b)** a soma dos pontos obtidos seja 7?

**c)** os números obtidos sejam diferentes entre si?

**d)** o módulo da diferença entre os pontos obtidos seja maior que 2?

**16** O gráfico seguinte mostra a evolução do uso do computador nas regiões do Brasil.

**Proporção de domicílios com computador segundo as regiões do Brasil – Percentual sobre o total de domicílios**

**Fonte:** CETIC. *TIC Domicílios e Usuários 2014*. Disponível em: <data.cetic.br/cetic/explore?idPesquisa=TIC_DOM>. Acesso em: 30 mar. 2016.

Escolhida ao acaso uma das regiões mencionadas no gráfico, qual é a probabilidade de que, em 2013, menos da metade de seus domicílios possuíam computador?

**17** De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de que a carta sorteada:

**a)** seja o sete de copas?

**b)** seja de ouros?

**c)** não seja o valete de espadas?

**d)** não seja de ouros nem de copas?

**18** Na tabela seguinte aparece o resultado parcial do levantamento sobre hábitos alimentares realizado em uma comunidade de 200 pessoas:

| | Nunca comem carne | Às vezes comem carne | Frequentemente comem carne | Total |
|---|---|---|---|---|
| **Homens** | 17 | a | 55 | 94 |
| **Mulheres** | b | 49 | 26 | c |
| **Total** | d | e | 81 | 200 |

**a)** Determine os valores de **a**, **b**, **c**, **d** e **e**.

**b)** Escolhendo ao acaso um indivíduo da comunidade, qual é a probabilidade de que seja mulher e não consuma carne?

**c)** Escolhendo ao acaso um indivíduo da comunidade, qual é a probabilidade de que ele consuma carne frequentemente?

**19** Uma pesquisa realizada com um grupo de fregueses de um supermercado revelou que 63% consomem a marca **A** de óleo, 55% consomem a marca **B**, e 32% consomem ambas as marcas. Uma pessoa do grupo é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela não consuma qualquer uma dessas marcas?

**20** Vinte esfirras fechadas, todas com a mesma forma e tamanho, são colocadas em uma travessa; são sete de queijo, nove de carne e quatro de escarola. Alguém retira uma esfirra da travessa ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja retirada uma esfirra de carne?

FERNANDO FAVORETTO/ CRIAR IMAGEM

**21** Uma moeda é lançada três vezes sucessivamente. Qual é a probabilidade de sair cara mais de uma vez?

**22** Em seu cadeado, Rita pretende colocar uma senha de três algarismos que contenha, obrigatoriamente, em alguma posição, seu número favorito, que é o 78. Dentre todas as senhas possíveis que Rita pode formar, qual é a probabilidade de ela escolher a senha 178?

**23** Numa prova com três questões (**A**, **B** e **C**), verificou-se que:

- 5 alunos acertaram as três questões;
- 15 alunos acertaram as questões **A** e **C**;
- 17 alunos acertaram as questões **A** e **B**;
- 12 alunos acertaram as questões **B** e **C**;
- 55 alunos acertaram a questão **A**;
- 55 alunos acertaram a questão **B**;
- 64 alunos acertaram a questão **C**;
- 13 alunos erraram as três questões.

Um aluno é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele ter acertado:

**a)** pelo menos duas questões?

**b)** exatamente uma questão?

**24** Feito um levantamento com os funcionários de uma empresa sobre seus respectivos tempos de serviço na empresa, verificou-se que 40% lá trabalham há mais de 5 anos e, entre eles, 60% são homens. Sorteando-se ao acaso um funcionário dessa empresa, qual é a probabilidade de ele ser do sexo feminino e trabalhar na empresa há mais de 5 anos?

**25** Após um número suficientemente grande de lançamentos de uma moeda viciada, constatou-se que a frequência relativa do evento coroa {C} era o quádruplo da frequência relativa do evento cara {K}. Lançando-se a moeda uma única vez, qual é a probabilidade de sair coroa {C}?

**26** Depois de um número suficientemente grande de lançamentos de um dado, constatou-se que, para cada dois resultados com faces ímpares, ocorriam três resultados com faces pares. Se todas as faces pares do dado ocorrem com a mesma frequência, o que acontece também com todas as faces ímpares, determine a probabilidade de em um único lançamento obter:

**a)** face 1;

**b)** face 6.

**27** O termo independente **c** da equação $x^2 - 3x + c = 0$ é escolhido aleatoriamente entre os elementos de $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Qual é a probabilidade de essa equação vir a ter raízes reais?

**28** Considere a equação linear, na incógnita **x**:

$$(a - 2) \cdot x = 4$$

Se **a** for escolhido ao acaso entre os elementos de $\{0, 1, ..., 9\}$, qual é a probabilidade de que essa equação venha a ter:

**a)** uma única solução?

**b)** nenhuma solução?

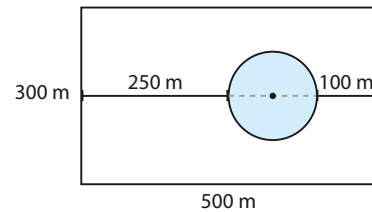
**c)** uma solução inteira?

**29** Considere a expressão $\log_3 m$, em que **m** é um número inteiro, positivo e menor ou igual a 100.

Se **m** for escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de que o valor da expressão resulte em um número inteiro?

**30** Uma caixa contém **x** bolas brancas, 3x bolas pretas e 3 bolas vermelhas, todas com o mesmo tamanho e mesma massa. Uma bola é extraída ao acaso dessa caixa. Determine o menor valor possível de **x**, a fim de que a probabilidade de a bola sorteada ser preta seja maior que 70%.

**31** Conta uma lenda que um tesouro foi escondido em algum lugar de um terreno, abaixo da superfície da terra.

A figura seguinte mostra a vista superior do terreno, em que o círculo mostrado é a projeção ortogonal, sobre o plano do solo, de um reservatório de água vazio com formato cilíndrico. Observe as dimensões indicadas.

Qual é a probabilidade de que o tesouro não tenha sido escondido abaixo da região limitada pelo reservatório? Use $\pi \simeq 3$.

Nos exercícios resolvidos e propostos a seguir, vamos usar as técnicas de contagem estudadas em Análise Combinatória a fim de determinar $n(\Omega)$ e $n(E)$.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**5** Em um estado brasileiro, todas as placas de automóveis são formadas por três letras (entre as 26 do alfabeto) e quatro algarismos e começam pela letra **M**.

GRAPHORAMA

Uma placa será confeccionada completamente ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela seja formada por letras distintas e algarismos também distintos?

**Solução:**

O número de maneiras de composição da placa pode ser calculado pelo PFC:

$$\text{M}\ \underbrace{\square\ \square}_{\text{letras}}\ \underbrace{\square\ \square\ \square\ \square}_{\text{algarismos}}: 26\ 26\ 10\ 10\ 10\ 10 \Rightarrow n(\Omega) = 26^2 \cdot 10^4$$

Vamos determinar, usando o PFC, o número de elementos do evento **E** "a placa tem letras e algarismos distintos". Temos:

$$\text{M}\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square: 25\ 24\ 10\ 9\ 8\ 7 \Rightarrow n(E) = 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

A probabilidade pedida é, portanto:

$$p = \frac{25 \cdot 24 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{26 \cdot 26 \cdot \cancel{10} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} \simeq 0{,}447 = 44{,}7\%$$

**6** Um ônibus de excursão com vinte brasileiros e seis estrangeiros é parado pela Polícia Rodoviária para vistoria de documentos. O funcionário escolhe, ao acaso, três passageiros para terem os documentos conferidos. Qual é a probabilidade de que todos sejam brasileiros?

CHRISTIAN RIZZI/FOLHAPRESS

**Solução:**

O espaço amostral é formado por todos os grupos de três passageiros quaisquer que podemos formar com os 26 turistas. Temos, então:

$$n(\Omega) = C_{26,\,3} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3!} = 2\,600$$

O evento **E** que nos interessa é formado pelos grupos de três turistas brasileiros que podemos formar. Temos:

$$n(E) = C_{20,\,3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1\,140$$

Por fim, $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1\,140}{2\,600} \simeq 0{,}438 = 43{,}8\%$.

**7** Oito pessoas, entre elas um casal e seu filho, são colocadas aleatoriamente em fila. Qual é a probabilidade de que a família fique junta?

**Solução:**

O número de resultados possíveis de ocorrer no experimento é $P_8 = 8! = 40\,320$, que corresponde ao total de filas que podem ser formadas com as oito pessoas, sem restrição de lugar.

O evento **E** que nos interessa corresponde ao número de filas em que a família aparece junta. Devemos permutar o bloco "família" com cada uma das outras cinco pessoas, num total de maneiras igual a $P_6 = 6! = 720$. Porém, dentro do bloco, os três membros da família podem trocar de lugar entre si de 6 maneiras distintas ($P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$). Logo, $n(E) = 6! \cdot 6 = 4\,320$.

Daí, $p(E) = \frac{4\,320}{40\,320} \simeq 0{,}107 = 10{,}7\%$.

## EXERCÍCIOS

**32** Um dos anagramas da palavra AMOR é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que no anagrama apareça a palavra ROMA?

**33** Um anagrama formado a partir de CARDUME é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele começar e terminar por vogal?

**34** Um número de três algarismos é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele ser formado por algarismos distintos?

**35** Palíndromos são números inteiros que não se alteram quando lidos da esquerda para a direita e vice-versa. Por exemplo, 7 227, 535, 10 301 etc.

**a)** Com 0, 1, ..., 9 formam-se números de quatro algarismos. Um deles é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele seja um palíndromo?

**b)** Qual seria a resposta se o número fosse de cinco algarismos?

**36** Uma caixa contém 60 bolas de mesma massa e mesmo tamanho, numeradas de 1 a 60.

**a)** Escolhendo aleatoriamente uma bola da caixa, qual é a probabilidade de que o número obtido seja múltiplo de 5?

**b)** Escolhendo simultaneamente e ao acaso duas bolas da caixa, qual é a probabilidade de que, em ambas, apareça um múltiplo de 5?

**37** Pretende-se organizar dois eventos no ano; três cidades do Sudeste, duas do Sul e cinco do Nordeste candidataram-se a sede desses eventos. Sabendo que uma mesma cidade não pode sediar os dois eventos e que as sedes devem ser sorteadas, ao acaso, entre as cidades candidatas, determine a probabilidade de que:

**a)** os eventos sejam feitos apenas em cidades do Nordeste;

**b)** nenhum evento ocorra no Sudeste.

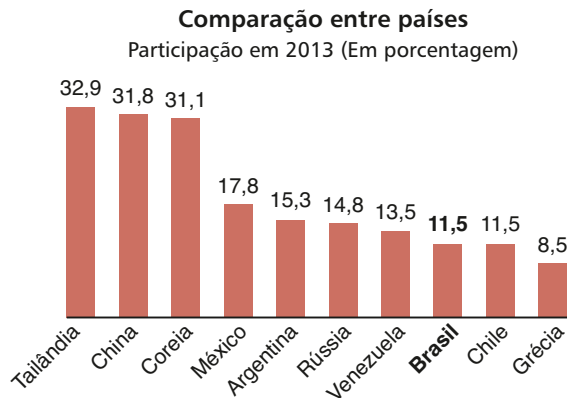
**38** Um banco enviou a seus clientes uma senha qualquer de acesso à internet formada por 5 algarismos seguidos de 3 letras. Sabendo que foram usadas apenas as dez primeiras letras do alfabeto, determine:

**a)** o número de senhas distintas que podem ser formadas;

**b)** a probabilidade de um cliente receber a senha 12345ACE;

**c)** a probabilidade de um cliente receber uma senha formada pelos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em qualquer ordem, seguidos pelas letras **A**, **B** e **C** em qualquer ordem;

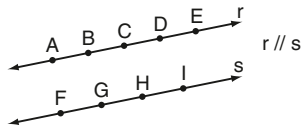
**d)** a probabilidade de um cliente receber uma senha formada por algarismos distintos e por letras também distintas.

**39** O gráfico abaixo compara a participação da indústria de transformação no PIB de alguns países.

*O Estado de S. Paulo*, 2 maio 2015.

Sorteando-se ao acaso dois países dessa relação, qual é a probabilidade de que:

**a)** ambos tenham percentual de participação no PIB menor que 15%?

**b)** ao menos um dos países selecionados tenha participação percentual maior que 20%?

A figura a seguir refere-se aos exercícios 40 e 41.

**40** Escolhem-se, ao acaso, dois quaisquer dos nove pontos acima. Qual a probabilidade de escolhermos:

**a)** dois pontos de **r**?

**b)** dois pontos de **s**?

**c)** um ponto de **r** e um ponto de **s**?

**41** Escolhem-se, ao acaso, três pontos quaisquer entre os nove pontos dados. Unindo-se os pontos escolhidos, qual é a probabilidade de esses pontos serem vértices de um triângulo?

**42** Três cartas de um baralho são sorteadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de que:

**a)** apareçam o dez de ouros, o sete de copas e o ás de paus?

**b)** apareça o dez de ouros?

**c)** todas as cartas sejam de espadas?

**43** Três casais de amigos foram ao cinema e ocuparam as seis cadeiras vagas, uma ao lado da outra, em uma certa fileira. Como chegaram um pouco atrasados, eles se distribuíram de maneira completamente aleatória. Qual é a probabilidade de que:

**a)** os homens tenham sentado lado a lado e que o mesmo ocorra com as mulheres?

**b)** cada homem tenha sentado ao lado de sua mulher?

**44** Um dado não viciado é lançado sucessivamente três vezes.

**a)** Qual é a probabilidade de ocorrerem, em qualquer ordem, 2 faces iguais a 3 e 1 face igual a 6?

**b)** Qual é a probabilidade de ocorrerem as faces 1, 2 e 3, em qualquer ordem?

**45** Unindo-se, aleatoriamente, dois vértices quaisquer de um pentágono convexo, qual é a probabilidade de que o segmento determinado corresponda a uma diagonal?

**46** Os números reais **x** e **y** da matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix}$ serão escolhidos ao acaso, sorteando-se, sucessivamente e com reposição, dois elementos do conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

**a)** Qual é a probabilidade de que a matriz **M** obtida seja simétrica, isto é, $M = M^t$?

**b)** Qual é a probabilidade de que o determinante de **M** seja não nulo?

**47** Um paralelepípedo retorretângulo tem dimensões 3 cm, 4 cm e 7 cm. Duas de suas arestas são selecionadas ao acaso. Qual é a probabilidade de que ambas tenham o mesmo comprimento?

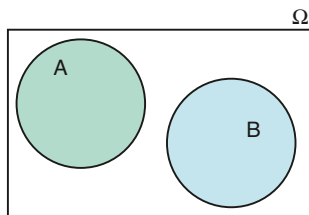
**48** Em um programa de prêmios de um canal de televisão, o participante deve escolher, simultaneamente e ao acaso, três dentre seis cartões disponíveis para abrir. Sabendo que há prêmios em apenas dois cartões, qual é a probabilidade de o participante não receber prêmio algum?

**49** Para divulgar seus pacotes de TV, uma empresa decide oferecer gratuitamente um ano de assinatura a 2 apartamentos sorteados em um condomínio residencial. O condomínio possui 3 blocos, cada qual com 15 andares e 4 apartamentos por andar. Se o sorteio é aleatório, qual é a probabilidade de que dois apartamentos de um mesmo bloco e do mesmo andar recebam os prêmios-cortesia?

## Probabilidade da união de dois eventos

Sejam **A** e **B** eventos de um mesmo espaço amostral Ω finito, não vazio e equiprovável. Vamos encontrar uma expressão para a probabilidade de ocorrer o evento **A** ou o evento **B**, isto é, a probabilidade da ocorrência da união dos eventos **A** e **B**, ou seja, $p(A \cup B)$.

Consideremos dois casos:

- $A \cap B = \varnothing$

Temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Como $n(\Omega) \neq 0$, podemos escrever:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

Logo:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Nesse caso, **A** e **B** são chamados **eventos mutuamente exclusivos**.

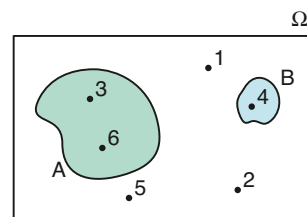
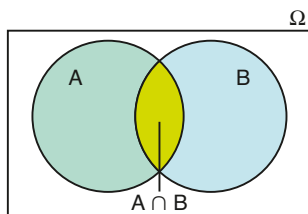
**EXEMPLO 4**

Considerando o experimento aleatório "lançamento de um dado honesto", como podemos calcular a probabilidade de que o número obtido na face superior seja múltiplo de 3 ou de 4?

Sejam os eventos:

- **A**: "obter um número múltiplo de 3" $\Rightarrow A = \{3, 6\}$
- **B**: "obter um número múltiplo de 4" $\Rightarrow B = \{4\}$

Queremos calcular $p(A \cup B)$.

Como $A \cap B = \varnothing$, então $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

- $A \cap B \neq \varnothing$

Das noções sobre conjuntos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo membro a membro por $n(\Omega) \neq 0$, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

Daí:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

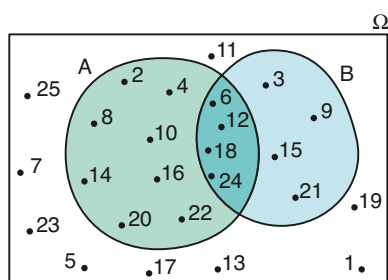
O evento $A \cap B$ representa a ocorrência **simultânea** dos eventos **A** e **B**.

**EXEMPLO 5**

Vamos imaginar que uma urna contenha 25 bolas de mesmo tamanho e mesma massa, numeradas de 1 a 25, e que uma delas seja extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de o número da bola sorteada ser múltiplo de 2 ou de 3?

Consideremos:

- $\Omega = \{1, 2, ..., 25\}$
- **A**: "o número é múltiplo de 2"; $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$.
- **B**: "o número é múltiplo de 3"; $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$.

Queremos determinar $p(A \cup B)$.

Observe que os números 6, 12, 18 e 24 são elementos comuns ao evento **A** e ao evento **B**. Assim, $A \cap B = \{6, 12, 18, 24\}$ é o evento formado pelos múltiplos simultâneos de 2 e de 3, isto é, seus elementos são os múltiplos de 6.

Temos:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} - \frac{4}{25} = \frac{16}{25} = 0{,}64 = 64\%$$

## EXERCÍCIOS

**50** No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de que o número obtido na face superior seja múltiplo de 2 ou de 3?

**51** De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de sair um valete ou uma carta de ouros?

**52** Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Sejam os eventos:

**A**: "a soma dos pontos obtidos é 10";

**B**: "os números obtidos são distintos".

Calcule $p(A \cup B)$.

**53** Para apresentar um trabalho, um professor sorteará ao acaso um aluno, entre os 30 da turma. O sorteio será feito de acordo com o número da chamada. Qual é a probabilidade de o número do aluno sorteado ser:

**a)** primo ou maior que 10?

**b)** múltiplo de 7 ou de 5?

**c)** quadrado perfeito ou divisor de 36?

**54** Sejam **A** e **B** eventos de um mesmo espaço amostral, com $p(A \cup B) = 0{,}75$. Em cada caso, calcule $p(B)$, admitindo que:

**a)** $p(A) = 0{,}35$ e **A** e **B** são mutuamente exclusivos.

**b)** $p(A) = 0{,}29$ e $p(A \cap B) = 0{,}09$.

**55** Para preencher as vagas de trabalho em uma indústria, um certo número de pessoas participou do processo seletivo. O quadro abaixo mostra a distribuição dos candidatos por gênero e escolaridade:

| | Homens | Mulheres |
|---|---|---|
| Ensino Médio completo | 18 | 27 |
| Ensino Superior completo | 22 | 53 |

Um candidato do grupo é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja:

**a)** mulher ou tenha Ensino Superior completo?

**b)** homem e tenha somente o Ensino Médio completo?

**56** A análise da série histórica de pluviometria dos últimos 20 anos, em uma praia do litoral cearense, mostrou que a probabilidade de chover 5 ou mais dias no mês de outubro é de 33% e a probabilidade de chover 5 ou menos dias nesse mesmo mês é de 81%. Qual é a probabilidade de chover exatamente 5 dias, nessa praia, no próximo mês de outubro?

# Probabilidade condicional

Um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino a Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o voo, cada turista respondeu a duas perguntas:

- Já voou antes?
- Já esteve em Natal?

Os dados obtidos a partir das respostas dos passageiros encontram-se organizados no quadro seguinte:

| | Voando pela primeira vez | Já havia voado | Total |
|---|---|---|---|
| **Não conhecia Natal** | 83 | 22 | 105 |
| **Já conhecia Natal** | 23 | 12 | 35 |
| **Total** | 106 | 34 | 140 |

ADROVANDO CLARO/FOTOARENA

Praia de Ponta Negra, Natal (RN), 2014.

Um passageiro é selecionado ao acaso e verifica-se que ele nunca tinha viajado de avião. Qual é a probabilidade de que ele já conhecesse Natal?

Nesse caso, já temos um conhecimento parcial do resultado do experimento: "o passageiro estava voando pela primeira vez". Com isso, o número de casos possíveis se reduz a 106. Nesse novo universo, que é o espaço amostral reduzido, o número de passageiros que já conheciam Natal é 23.

Assim, a probabilidade pedida é $p = \frac{23}{106}$.

Esse número expressa a probabilidade de a pessoa escolhida conhecer Natal, sabendo que era a primeira vez que viajava de avião. Vamos denominar tal número de **probabilidade condicional** e indicá-lo por:

$$p(\text{já conhecer Natal} \mid \text{primeira vez de avião})$$

↑ (lê-se: "dado que" ou "sabendo que")

Do valor encontrado em $p = \frac{23}{106}$, podemos notar que:

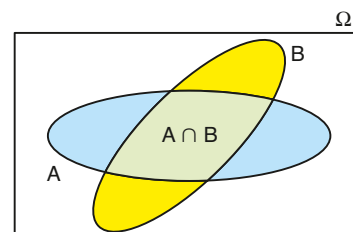
- 23 corresponde ao número de passageiros que já estiveram em Natal e estavam voando pela primeira vez.
- 106 corresponde ao número de passageiros que voavam pela primeira vez.

Temos, então:

$$p(\text{já conhecer Natal} \mid \text{primeira vez de avião}) = \frac{\text{número de passageiros que já conheciam Natal e voavam pela primeira vez}}{\text{número de passageiros que voavam pela primeira vez}}$$

A probabilidade condicional pode ser definida do seguinte modo:

Sejam **A** e **B** eventos de **Ω** finito e não vazio. A probabilidade condicional do evento **A**, sabendo que ocorreu o evento **B**, é indicada por p(A | B) e é dada por:

$$p(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \quad (1)$$

Podemos encontrar uma expressão equivalente a (1), dividindo o numerador e o denominador do 2º membro de (1) por $n(\Omega) \neq 0$:

$$p(A \mid B) = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}} \Rightarrow p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad (2)$$

**OBSERVAÇÃO**

Para resolver problemas de probabilidade condicional, em geral é mais prático seguir o raciocínio desenvolvido no problema dos turistas do voo fretado: reduz-se o espaço amostral e se calculam as probabilidades nesse novo espaço. A fórmula (2), obtida para o cálculo da probabilidade condicional, tem importância mais teórica do que prática. Por meio dela, introduziremos, no próximo item, conceitos importantes em probabilidade, como o de eventos independentes e o teorema da multiplicação.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**8** Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Sabendo-se que a soma dos pontos obtidos é menor que 6, qual é a probabilidade de que em ao menos um lançamento ocorra a face 2?

**Solução:**

Vamos reduzir o espaço amostral.

Com a informação dada, o número de casos possíveis passa a ser 10:

$$\Omega^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

Dos elementos de $\Omega^*$, é preciso selecionar os pares em que pelo menos um dos resultados é 2.

Há 5 casos favoráveis: (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3) e (3, 2).

Assim, a probabilidade pedida é: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\%$.

## EXERCÍCIOS

**57** Uma das letras do alfabeto é escolhida ao acaso. Sabendo que ela é uma das dez primeiras letras, qual é a probabilidade de que seja uma vogal?

**58** Se um dado honesto é lançado duas vezes sucessivamente e os números obtidos são:

**a)** iguais, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos seja um número par?

**b)** distintos, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos seja 8?

**59** Um dado honesto é lançado e sabe-se que a face superior tem um número par.

**a)** Qual é a probabilidade de que o número obtido seja primo?

**b)** Qual é a probabilidade de que o número obtido seja um divisor de 5?

**60** De um baralho comum, uma carta é retirada ao acaso. Se a carta escolhida:

**a)** não é valete nem dama, qual é a probabilidade de ser o rei de ouros?

**b)** não é de ouros, qual é a probabilidade de não ser de copas?

**c)** é de copas, qual é a probabilidade de ser o rei?

**d)** não é de copas, qual é a probabilidade de ser o valete de espadas ou o valete de ouros?

**e)** não é de copas, qual é a probabilidade de ser de ouros ou ser um rei?

**61** Um casal e quatro pessoas são colocados em fila indiana. Sabendo que o casal não ficou junto, qual é a probabilidade de que as extremidades da fila tenham sido ocupadas pelas pessoas que formam o casal?

**62** No cadastro de um cursinho pré-vestibular estão registrados 600 alunos assim distribuídos:

- 380 rapazes;
- 105 moças que já concluíram o Ensino Médio;
- 200 rapazes que estão cursando o Ensino Médio.

Um nome do cadastro é selecionado ao acaso. Qual é a probabilidade de o nome escolhido ser de:

**a)** um rapaz, sabendo-se que já concluiu o Ensino Médio?

**b)** alguém que esteja cursando o Ensino Médio, sabendo-se que é uma moça?

**63** Em um *buffet* infantil, os clientes escolhem 4 entre as 6 opções de petiscos para servir na festa: coxinha, empadinha, rissole, cachorro-quente, pastel e tortinha.

**a)** Para uma festa, qual é a probabilidade de um cliente incluir coxinha entre os petiscos selecionados?

**b)** Sabendo que um cliente incluiu coxinha e empadinha, qual é a probabilidade de ele ter incluído também pastel?

**c)** Sabendo que um cliente não incluiu coxinha entre os petiscos, qual é a probabilidade de ele também não ter incluído empadinha em seu pedido?

# Probabilidade da interseção de dois eventos

## Teorema da multiplicação

Seja $\Omega$ um espaço amostral finito e não vazio. **A** e **B** são eventos de $\Omega$. Quando estudamos probabilidade condicional, vimos que, na expressão $p(A \mid B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$:

- $p(A \mid B)$ representa a probabilidade de ocorrer **A** dado que ocorreu o evento **B**.
- $p(A \cap B)$ representa a probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos **A** e **B** (ou a probabilidade da interseção de **A** com **B**).
- $p(B)$ representa a probabilidade de ocorrer **B**.

De $p(A \mid B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ segue, imediatamente, a relação:

$$p(A \cap B) = p(A \mid B) \cdot p(B)$$

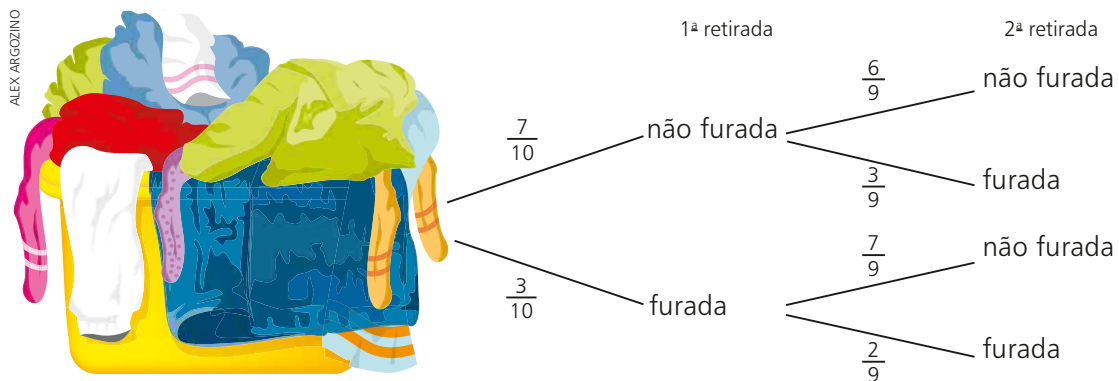
Isso significa que, para se calcular a probabilidade de ocorrer a interseção dos eventos **A** e **B** (ocorrência simultânea de **A** e **B**), que é $p(A \cap B)$, é preciso multiplicar a probabilidade de ocorrer um deles ($p(B)$) pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu ($p(A \mid B)$).

No exemplo a seguir, ficará mais claro o uso dessa relação.

EXEMPLO **6**

Em um cesto de roupas há dez camisetas, das quais três estão furadas. Duas camisetas são retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição do cesto. Qual é a probabilidade de que as duas camisetas retiradas não estejam furadas?

Podemos construir um diagrama de árvore para representar os resultados possíveis desse experimento, associando probabilidades a cada "galho".

Observe que as probabilidades referentes à segunda retirada estão condicionadas ao resultado da primeira.

Estamos interessados em calcular:

$$p\left(\text{não furada} \cap \text{não furada}\right) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \text{ (observe o 1º galho)}$$

probabilidade de a 1ª camiseta não estar furada

probabilidade de a 2ª camiseta não estar furada, sabendo que a 1ª também não estava

Logo, a resposta é $p = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**9** Em uma caixa há vinte selos distintos, de mesmo tamanho e textura, sendo 12 nacionais e 8 importados. Retira-se ao acaso um selo da caixa e registra-se sua origem (procedência). A seguir, retira-se outro selo da caixa, sem que o primeiro seja reposto, e anota-se a origem. Qual é a probabilidade de saírem selos de origens diferentes?

**Solução:**

Vamos representar por **N** um selo nacional e **I** um selo importado.

Podem ocorrer dois casos:

- O primeiro selo é nacional e o segundo é importado.

$$p(N \cap I) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{24}{95}$$

probabilidade de o 1º selo ser **N**; probabilidade de o 2º selo ser **I**, dado que o 1º selo é **N**

ou

- O primeiro selo é importado e o segundo é nacional:

$$p(I \cap N) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{24}{95}$$

probabilidade de o 1º selo ser **I**; probabilidade de o 2º selo ser **N**, dado que o 1º é **I**

Assim, usando a adição de probabilidades, temos:

$$p = \frac{24}{95} + \frac{24}{95} = 2 \cdot \frac{24}{95} = \frac{48}{95}$$

Professor, se achar pertinente, peça à classe que proponha outra forma de resolver o problema. Uma provável resposta é:
Como as retiradas são feitas sem reposição, garante-se que os selos retirados sejam distintos.
Daí, $n(\Omega) = C_{20,\,2} = 190$ e a probabilidade pedida é:
$\frac{12 \cdot 8}{190} = \frac{48}{95}$

## Eventos independentes

Vamos considerar o seguinte problema:

12 CDs de MPB e 8 de música sertaneja (**S**), todos distintos entre si e sem identificação, estão guardados em uma caixa. Um estudante retira, ao acaso, sucessivamente e com reposição, dois desses CDs. Qual é a probabilidade de que os dois CDs retirados sejam de música sertaneja?

Observe o diagrama de árvore:

Estamos interessados em calcular $p(S \cap S)$. Utilizando o teorema da multiplicação, temos:

$p(S \cap S) = p(\textbf{S}$ na 1ª retirada$) \cdot p(\textbf{S}$ na 2ª retirada $|$ $\textbf{S}$ na 1ª$)$; veja *

Nesse caso, porém, como o CD extraído na 1ª retirada é reposto, no momento da 2ª retirada a caixa contém exatamente os CDs de antes da 1ª retirada.

Desse modo, o fato de ter sido retirado um CD de música sertaneja na 1ª vez não muda a probabilidade de extrair um CD de música sertaneja na 2ª retirada.

Dizemos que ocorre **independência entre os eventos**.

A probabilidade pedida é, portanto:

$$p = p(S \cap S) = \frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20} = 0{,}16 = 16\%$$

De modo geral, se p(A | B) = p(A), ou seja, se o fato de ter ocorrido o evento **B** não altera a probabilidade de ocorrer o evento **A**, dizemos que **A** e **B** são **eventos independentes** e vale a relação:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Em geral, sendo $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ..., $\mathbf{A_n}$ eventos independentes, temos:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot ... \cdot p(A_n)$$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**10** Um dado não viciado é lançado e é registrado o número obtido na face superior. Em seguida uma moeda honesta é lançada e é registrada sua face. Qual é a probabilidade de obtermos número 5 e coroa?

**Solução:**

Os eventos "sair número 5" e "sair coroa" são independentes, pois o fato de sair número 5 no lançamento do dado não muda a probabilidade de sair coroa no lançamento da moeda.

Desse modo, a probabilidade pedida é:

$$p = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{sair nº 5}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{sair coroa}} = \frac{1}{12}$$

**11** A probabilidade de um atirador **X** acertar um alvo é de 80%, e a probabilidade de um atirador **Y** acertar o mesmo alvo é de 90%.

Se os dois atirarem uma única vez, simultaneamente, qual é a probabilidade de que:

**a)** ambos atinjam o alvo?

**b)** pelo menos um atinja o alvo?

A probabilidade de que ambos os atiradores *não* atinjam o alvo é: (1 – 0,80) · (1 – 0,90) = 0,20 · 0,10
Assim, a probabilidade de que pelo menos um atinja o alvo é 1 – 0,20 · 0,10 = 0,98, pois são eventos complementares.

**Solução:**

Nesse problema é natural admitir independência entre os eventos.

**a)** $p(X \cap Y) = p(X) \cdot p(Y) = 0,80 \cdot 0,90 = 0,72 = 72\%$

**b)** *1º modo:*

Sabemos que $p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cap Y)$

Como há independência entre os eventos, podemos escrever:

$p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X) \cdot p(Y) = 0,80 + 0,90 - 0,72 = 0,98 = 98\%$

*2º modo:*

Podem ocorrer três casos:

$$(\underbrace{\textbf{X}\text{ acerta e }\textbf{Y}\text{ erra}}_{0,80 \cdot 0,10 = 0,08}) \text{ ou } (\underbrace{\textbf{X}\text{ erra e }\textbf{Y}\text{ acerta}}_{0,20 \cdot 0,90 = 0,18}) \text{ ou } (\underbrace{\textbf{X}\text{ acerta e }\textbf{Y}\text{ acerta}}_{0,80 \cdot 0,90 = 0,72})$$

Assim, a probabilidade pedida é 0,08 + 0,18 + 0,72 = 0,98.

**PENSE NISTO:**

Um estudante apresentou, para o item *b*, a seguinte solução:

$1 - 0,20 \cdot 0,10 = 1 - 0,02 = 0,98$

Explique o raciocínio desenvolvido pelo estudante!

Aplicações

# Matemática, futebol e loteria

MARCELO CORTES/FOTOARENA

Placar do jogo durante partida entre Vasco da Gama e Joinville, 2015.

Uma das loterias mais populares entre os brasileiros é a Loteca (antiga loteria esportiva).

A Loteca lista 14 partidas de futebol. O apostador arrisca um palpite para o resultado de cada partida: vitória de um dos times (coluna 1 ou coluna 2) ou empate (coluna do meio).

Há várias possibilidades de aposta. A aposta mínima é um duplo, isto é, em um único jogo assinalam-se duas opções: coluna 1 e coluna 2, coluna 1 e coluna do meio ou coluna 2 e coluna do meio. Nos demais 13 jogos assinala-se um único palpite para cada jogo. Há também apostas em um triplo, isto é, em um único jogo assinalam-se as três opções, garantindo, obviamente, o acerto do resultado daquele jogo.

Entre muitas opções de aposta, podemos citar: 2 duplos; 1 triplo e 1 duplo; 6 triplos; 3 triplos e 5 duplos (aposta máxima).

Ganha quem acertar os resultados de 13 ou 14 partidas.

Mas, afinal, quais são as chances de se ganhar nessa loteria com a aposta mínima?

A teoria de probabilidades nos ajuda a calcular tais chances, a partir da hipótese de que o espaço amostral é equiprovável, isto é, em cada uma das 14 partidas, cada possível resultado (coluna 1, coluna do meio e coluna 2) tem probabilidade $\frac{1}{3}$ de ocorrer.

Observe, também, que o resultado de um jogo não interfere no resultado dos demais jogos, garantindo, desse modo, independência entre os eventos (cada jogo está associado a um evento).

Imagine que você irá preencher um volante dos 14 jogos, concorrendo com a aposta mínima, isto é, você assinala um duplo em um jogo, digamos o primeiro, e nos demais jogos (2º ao 14º) um palpite simples (uma coluna por jogo).

A probabilidade de acertar os 14 jogos pode ser expressa por:

p(acertar o 1º jogo e acertar o 2º e acertar o 3º e ... e acertar o 14º jogo)

Usando o teorema da multiplicação e lembrando a independência dos eventos, temos:

$$p = p(\underbrace{\text{acertar o 1º jogo}}_{\text{duplo}}) \cdot p(\underbrace{\text{acertar o 2º jogo}}_{\text{simples}}) \cdot \ldots \cdot p(\underbrace{\text{acertar o 14º jogo}}_{\text{simples}})$$

$$p = \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3}}_{13 \text{ fatores}} = \frac{2}{3^{14}} \simeq 0{,}000042\%$$

Achou muito pequena a chance de ganhar?

Lembre-se, contudo, de que esse é um modelo teórico em que são feitas previsões. Na prática, em vários jogos, o apostador tem conhecimento prévio sobre os times e acompanha o desempenho das equipes no campeonato. Isso pode aumentar a chance de acerto do resultado de um jogo.

Mas no futebol são 11 contra 11 e tudo pode acontecer...

## EXERCÍCIOS

**64** Duas cartas, de um baralho de 52, são extraídas sucessivamente e ao acaso. Qual é a probabilidade de saírem duas cartas de copas, se a extração é feita:

**a)** sem reposição?

**b)** com reposição?

**65** Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de ocorrer coroa e um número primo?

**66** Em uma festa infantil, foram misturados, em uma caixa, 12 brindes para meninos e 15 para meninas, todos empacotados da mesma maneira. Dois brindes são retirados ao acaso, sucessivamente e sem reposição, da caixa. Qual é a probabilidade de que:

**a)** ambos sejam para meninos?

**b)** um seja para meninos e outro para meninas?

**67** Refaça o exercício anterior, admitindo que a extração seja feita com reposição.

**68** Em uma bandeja há dez pastéis, sendo três de palmito, quatro de carne e três de queijo, todos com o mesmo formato e aparência. Se Dudu retirar três deles ao acaso, sucessivamente e sem reposição, qual é a probabilidade de que:

CÍCERO VIÉGAS/ISUZU IMAGENS

**a)** todos sejam de carne?

**b)** exatamente dois deles sejam de palmito?

**c)** seja retirado um de cada sabor?

**69** A probabilidade de um nadador **A** queimar a largada em uma competição é de 18%; para o nadador **B** essa probabilidade é de 12%. Se os dois nadadores estão disputando uma prova, qual é a probabilidade de que:

**a)** ambos queimem a largada?

**b)** nenhum deles queime a largada?

**c)** ao menos um queime a largada?

**70** Dois estojos idênticos estão sobre uma mesa. Um deles tem 3 canetas pretas, 2 vermelhas e 3 azuis; o outro tem 2 canetas pretas, 4 azuis e 1 vermelha. Fabrício escolhe ao acaso um estojo e dele extrai, aleatoriamente, uma caneta. Qual é a probabilidade de Fabrício tirar uma caneta azul?

ALEX ARGOZINO

**71** Sobre uma mesa há duas moedas: uma tem duas caras e a outra tem uma cara e uma coroa. Uma delas é escolhida ao acaso e lançada. Qual é a probabilidade de obter cara?

**72** Um casal de matemáticos foi passar um fim de semana de verão na praia. Jorge havia lido as previsões meteorológicas na internet e disse à sua mulher: "A probabilidade de não chover no fim de semana é $\frac{17}{25}$ e a probabilidade de chover no domingo é $\frac{1}{5}$". A partir daí, perguntou a ela: "Qual é, então, a probabilidade de chover nos dois dias de viagem?"

**73** De um baralho comum (52 cartas) extraímos, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. Qual é a probabilidade de saírem cartas de naipes diferentes?

**74** De cada 15 camisas que um varejista coloca à venda, 10 são fabricadas pela confecção $\mathbf{C_1}$ e 5 são fabricadas pela confecção $\mathbf{C_2}$. Os percentuais de camisas com defeito produzidas nas confecções $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ são, respectivamente, 4% e 1%.

Uma camisa que está à venda no varejista é selecionada ao acaso.

**a)** Qual é a probabilidade de que ela não apresente defeitos e tenha sido produzida em $\mathbf{C_1}$?

**b)** Qual é a probabilidade de a camisa apresentar defeito?

## TROQUE IDEIAS

### As chances na Mega-Sena

ANDRÉ HORTA/FOTOARENA

Apenas pessoas maiores de 18 anos podem apostar, conforme o artigo 81, inciso IV, da Lei nº 8.069/90.

Vamos voltar à introdução do capítulo, na qual citamos a Mega-Sena.

O volante da Mega-Sena, formulário em que os números da aposta são anotados, contém 60 números, de 1 a 60. Para concorrer, pode-se apostar em seis números (aposta mínima), sete, oito, ..., até 15 números (aposta máxima). A cada rodada, são sorteados seis números entre os 60. Há prêmios em dinheiro para quem acertar quatro números (quadra), cinco números (quina) e os seis números (sena).

Mas, afinal, se alguém fizer a aposta mínima, que chance tem de ganhar? Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

**a)** Qual é a probabilidade de acertar a sena com a aposta mínima?

**b)** Qual é a probabilidade de se fazer uma quadra (isto é, acertar exatamente 4 números) com a aposta mínima?

**c)** Qual é a probabilidade de se fazer a quina (isto é, acertar exatamente 5 números) com a aposta mínima?

**d)** Qual é a probabilidade de não se acertar qualquer número fazendo a aposta mínima?

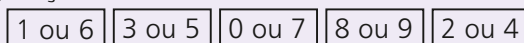
**e)** Em janeiro de 2016, a aposta mínima custava R$ 3,50; já a aposta em 8 números custava R$ 98,00.
i) Quem aposta em 8 números está concorrendo com quantas senas?
ii) Há proporcionalidade entre os valores dessas apostas e as chances de acertar a sena?
iii) Apresente um cálculo que justifique a resposta anterior.

**f)** A aposta máxima consiste na escolha de 15 dezenas. Ao se optar pela aposta máxima, em quantas vezes aumenta-se a chance de acertar a sena?

**g)** Em janeiro de 2016, Aurélio possuía R$ 24,50 para apostar na Mega-Sena. Como ele sabia que a chance de acertar a sena é muito pequena, pensou em maximizar as chances de acertar a *quina*. Ele ficou em dúvida se valia a pena fazer 7 apostas mínimas (7 · R$ 3,50 = R$ 24,50) ou uma única aposta em 7 números, que também custava R$ 24,50.
Para acertar a *quina*, qual era a melhor opção para Aurélio?

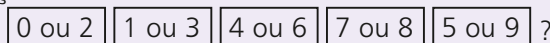
## DESAFIO

Alguns bancos usam o seguinte sistema complementar de segurança para digitação de senhas na internet: Na hora de digitar a senha, o usuário encontra, na tela do computador, cinco "botões", cada qual contendo um par de algarismos, colocados em ordem crescente. A composição dos "botões" é gerada aleatoriamente pelo sistema e não há repetição de algarismos. Veja a figura seguinte, que mostra uma possível configuração visualizada na tela:

| 1 ou 6 | 3 ou 5 | 0 ou 7 | 8 ou 9 | 2 ou 4 |
|---|---|---|---|---|

Se a senha do usuário for 350161, ele deve pressionar, sucessivamente: 2º, 2º, 3º, 1º, 1º e 1º "botões".

**a)** Ao acessar uma conta desse banco pela internet, qual é a probabilidade de que o usuário encontre a configuração

| 0 ou 2 | 1 ou 3 | 4 ou 6 | 7 ou 8 | 5 ou 9 |
|---|---|---|---|---|

?

Admita que o sistema possa gerar, ao acaso, qualquer configuração.

**b)** Qual é a probabilidade de alguém que não conhece a senha de 6 dígitos de uma conta ter acesso a ela, nesse sistema, "chutando" todos os "botões" nos quais se encontra cada algarismo da senha?

# TABELA TRIGONOMÉTRICA

| Ângulo (graus) | Seno | Cosseno | Tangente |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,01745 | 0,99985 | 0,01746 |
| 2 | 0,03490 | 0,99939 | 0,03492 |
| 3 | 0,05234 | 0,99863 | 0,05241 |
| 4 | 0,06976 | 0,99756 | 0,06993 |
| 5 | 0,08716 | 0,99619 | 0,08749 |
| 6 | 0,10453 | 0,99452 | 0,10510 |
| 7 | 0,12187 | 0,99255 | 0,12278 |
| 8 | 0,13917 | 0,99027 | 0,14054 |
| 9 | 0,15643 | 0,98769 | 0,15838 |
| 10 | 0,17365 | 0,98481 | 0,17633 |
| 11 | 0,19087 | 0,98163 | 0,19438 |
| 12 | 0,20791 | 0,97815 | 0,21256 |
| 13 | 0,22495 | 0,97437 | 0,23087 |
| 14 | 0,24192 | 0,97030 | 0,24933 |
| 15 | 0,25882 | 0,96593 | 0,26795 |
| 16 | 0,27564 | 0,96126 | 0,28675 |
| 17 | 0,29237 | 0,95630 | 0,30573 |
| 18 | 0,30902 | 0,95106 | 0,32492 |
| 19 | 0,32557 | 0,94552 | 0,34433 |
| 20 | 0,34202 | 0,93969 | 0,36397 |
| 21 | 0,35837 | 0,93358 | 0,38386 |
| 22 | 0,37461 | 0,92718 | 0,40403 |
| 23 | 0,39073 | 0,92050 | 0,42447 |
| 24 | 0,40674 | 0,91355 | 0,44523 |
| 25 | 0,42262 | 0,90631 | 0,46631 |
| 26 | 0,43837 | 0,89879 | 0,48773 |
| 27 | 0,45399 | 0,89101 | 0,50953 |
| 28 | 0,46947 | 0,88295 | 0,53171 |
| 29 | 0,48481 | 0,87462 | 0,55431 |
| 30 | 0,50000 | 0,86603 | 0,57735 |
| 31 | 0,51504 | 0,85717 | 0,60086 |
| 32 | 0,52992 | 0,84805 | 0,62487 |
| 33 | 0,54464 | 0,83867 | 0,64941 |
| 34 | 0,55919 | 0,82904 | 0,67451 |
| 35 | 0,57358 | 0,81915 | 0,70021 |
| 36 | 0,58779 | 0,80903 | 0,72654 |
| 37 | 0,60182 | 0,79864 | 0,75355 |
| 38 | 0,61566 | 0,78801 | 0,78129 |
| 39 | 0,62932 | 0,77715 | 0,80978 |
| 40 | 0,64279 | 0,76604 | 0,83910 |
| 41 | 0,65606 | 0,75471 | 0,86929 |
| 42 | 0,66913 | 0,74314 | 0,90040 |
| 43 | 0,68200 | 0,73135 | 0,93252 |
| 44 | 0,69466 | 0,71934 | 0,96569 |
| 45 | 0,70711 | 0,70711 | 1,00000 |

| Ângulo (graus) | Seno | Cosseno | Tangente |
|---|---|---|---|
| 46 | 0,71934 | 0,69466 | 1,03553 |
| 47 | 0,73135 | 0,68200 | 1,07237 |
| 48 | 0,74314 | 0,66913 | 1,11061 |
| 49 | 0,75471 | 0,65606 | 1,15037 |
| 50 | 0,76604 | 0,64279 | 1,19175 |
| 51 | 0,77715 | 0,62932 | 1,23499 |
| 52 | 0,78801 | 0,61566 | 1,27994 |
| 53 | 0,79864 | 0,60182 | 1,32704 |
| 54 | 0,80903 | 0,58779 | 1,37638 |
| 55 | 0,81915 | 0,57358 | 1,42815 |
| 56 | 0,82904 | 0,55919 | 1,48256 |
| 57 | 0,83867 | 0,54464 | 1,53986 |
| 58 | 0,84805 | 0,52992 | 1,60033 |
| 59 | 0,85717 | 0,51504 | 1,66428 |
| 60 | 0,86603 | 0,50000 | 1,73205 |
| 61 | 0,87462 | 0,48481 | 1,80405 |
| 62 | 0,88295 | 0,46947 | 1,88073 |
| 63 | 0,89101 | 0,45399 | 1,96261 |
| 64 | 0,89879 | 0,43837 | 2,05030 |
| 65 | 0,90631 | 0,42262 | 2,14451 |
| 66 | 0,91355 | 0,40674 | 2,24604 |
| 67 | 0,92050 | 0,39073 | 2,35585 |
| 68 | 0,92718 | 0,37461 | 2,47509 |
| 69 | 0,93358 | 0,35837 | 2,60509 |
| 70 | 0,93969 | 0,34202 | 2,74748 |
| 71 | 0,94552 | 0,32557 | 2,90421 |
| 72 | 0,95106 | 0,30902 | 3,07768 |
| 73 | 0,95630 | 0,29237 | 3,27085 |
| 74 | 0,96126 | 0,27564 | 3,48741 |
| 75 | 0,96593 | 0,25882 | 3,73205 |
| 76 | 0,97030 | 0,24192 | 4,01078 |
| 77 | 0,97437 | 0,22495 | 4,33148 |
| 78 | 0,97815 | 0,20791 | 4,70463 |
| 79 | 0,98163 | 0,19087 | 5,14455 |
| 80 | 0,98481 | 0,17365 | 5,67128 |
| 81 | 0,98769 | 0,15643 | 6,31375 |
| 82 | 0,99027 | 0,13917 | 7,11537 |
| 83 | 0,99255 | 0,12187 | 8,14435 |
| 84 | 0,99452 | 0,10453 | 9,51436 |
| 85 | 0,99619 | 0,08716 | 11,43010 |
| 86 | 0,99756 | 0,06976 | 14,30070 |
| 87 | 0,99863 | 0,05234 | 19,08110 |
| 88 | 0,99939 | 0,03490 | 28,63630 |
| 89 | 0,99985 | 0,01745 | 57,29000 |

Esta tabela contém valores aproximados. Os arredondamentos utilizados são de cinco casas decimais.

# RESPOSTAS

CAPÍTULO 1

## A circunferência trigonométrica

### Exercícios

**1.** **a)** $\frac{\pi}{6}$ rad **d)** $\frac{7\pi}{6}$ rad **g)** $\frac{\pi}{9}$ rad
**b)** $\frac{\pi}{12}$ rad **e)** $\frac{3\pi}{2}$ rad **h)** $\frac{5\pi}{6}$ rad
**c)** $\frac{2\pi}{3}$ rad **f)** $\frac{5\pi}{3}$ rad **i)** $\frac{7\pi}{4}$ rad

**2.** **a)** 60°
**b)** 90°
**c)** 45°
**d)** 36°
**e)** Aproximadamente 28,66°.
**f)** 135°
**g)** 40°
**h)** 330°
**i)** Aproximadamente 172°.

**3.** 60 m

**4.** $\frac{16\pi}{3}$ cm (aproximadamente 16,75 cm)

**5.** Ambos têm o mesmo comprimento.

**6.** **a)** $med(\widehat{AB}) = med(\widehat{CD}) = \frac{\pi}{3}$
**b)** $\frac{2}{3}$

**7.** 3,925 cm **8.** 30

**9.** **a)** Aproximadamente 17,19 cm.
**b)** 18 cm

**10.** **a)** $\frac{\pi}{3}$ rad **b)** $2\pi$ cm

**11.** 125 m

**12.** **a)** 90° **c)** 157° 30′ **e)** 77° 30′
**b)** 75° **d)** 70°

**13.** 24,8 cm

**14.** $10 \cdot (4 + \pi)$ cm

**15.**

**16.** 1º Q: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4}{3}$.
2º Q: $\frac{2\pi}{3}, 2, \frac{3\pi}{5}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{12}, \sqrt{7}$.
3º Q: $\frac{4\pi}{3}, \frac{15\pi}{11}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}$.
4º Q: $\frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{8}, 5$.

**17.** P: $\frac{\pi}{4}$; Q: $\frac{7\pi}{6}$; R: $\frac{5\pi}{4}$.

**18.** A: $x = 0$; B: $x = \frac{\pi}{2}$; C: $x = \pi$; D: $x = \frac{3\pi}{2}$.

**19.** A: $x = \frac{\pi}{2}$; B: $x = \frac{7\pi}{6}$; C: $x = \frac{11\pi}{6}$.

**20.**

Simetria em relação ao eixo vertical.

**21.** **a)**

Não há simetria.

**b)**

Simetria em relação ao eixo horizontal.

**c)**

Simetria em relação ao centro da circunferência.

**d)**

Simetria em relação ao eixo horizontal (ou em relação ao centro da circunferência).

**22.** **a)** 3º quadrante.
**b)** Q: $\frac{9\pi}{10}$; S: $\frac{\pi}{10}$; R: $\frac{19\pi}{10}$.

**23.** **a)** A: 0; B: $\frac{\pi}{3}$; C: $\frac{2\pi}{3}$; D: $\pi$; E: $\frac{4\pi}{3}$; F: $\frac{5\pi}{3}$.
**b)** Perímetro: 6 u.c.
Área: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.a.

**24.** $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

### Desafio

5 cm

CAPÍTULO 2

## Razões trigonométricas na circunferência

### Exercícios

**1.** 2

**2.** **a)** $-1$ **d)** $\frac{1}{2}$ **g)** 0
**b)** 0 **e)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **h)** $-\frac{1}{2}$
**c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**3.**

$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \text{sen } \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } \frac{4\pi}{3} = \text{sen } \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**4.** $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

**5.** **a)** sen 75° < sen 85°
**b)** sen 100° > sen 170°
**c)** sen 250° > sen 260°
**d)** sen 300° > sen 290°

**6.** **a)** 0,76604 **d)** 0,58779
**b)** $-0{,}76604$ **e)** 0,95106
**c)** $-0{,}64279$

**7.** **a)** Positivo. **d)** Positivo.
**b)** Positivo. **e)** Negativo.
**c)** Negativo.

**8.** **a)** $a > 0$ **b)** $-a$

**9.** **a)** $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
**b)** $S = \{0, \pi\}$
**c)** $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$
**d)** $S = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
**e)** $S = \varnothing$
**f)** $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

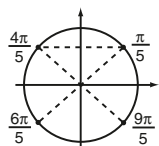
**10.** A calculadora estava configurada em RAD, e não em DEG (o modo DEG fornece o valor do seno de um ângulo medido em graus).

**11.** **a)** $y = 2$ **b)** $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**12.**

$\cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**13.** 


$\cos\frac{\pi}{5}$ e $\cos\frac{9\pi}{5}$: positivos.

$\cos\frac{4\pi}{5}$ e $\cos\frac{6\pi}{5}$: negativos.

**14.** **a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $-1$ **g)** $\frac{1}{2}$
**b)** 0 **e)** 0 **h)** 1
**c)** $-\frac{1}{2}$ **f)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**15.** **a)** $\cos 65° > \cos 85°$
**b)** $\cos 91° < \cos 89°$
**c)** $\cos 50° < \cos 340°$
**d)** $\cos 190° = \cos 170°$

**16.** 0

**17.** **a)** $m > 0$ **b)** $-m$

**18.** **a)** F; $\cos 90° - \cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 60° = \frac{1}{2}$
**b)** V
**c)** V
**d)** F; $|\text{sen } 100°| > |\cos 100°|$
**e)** F; o número real 6 tem imagem no 4º Q.
**f)** F; o maior valor possível é 1.

**19.** Perímetro: $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ u.c.
Área: $\frac{\sqrt{3}}{8}$ u.a.

**20.** $\frac{\text{sen }\alpha \cdot \cos\alpha}{8}$

**21.** **a)** $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$
**b)** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
**c)** $S = \{0\}$
**d)** $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$
**e)** $S = \varnothing$
**f)** $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

**22.** Uma possível saída é calcular inicialmente $\cos\frac{\pi}{5}$, pois $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$.

**23.** **a)** $\text{sen}^2\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ e
$\cos^2\frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$
**b)** $\text{sen}^2\frac{\pi}{4} = \cos^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$;
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
**c)** $\text{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

**24.** $-\frac{4}{5}$

**25.** Não.

**26.** $-\frac{5}{13}$

**27.** **a)** $\frac{7}{25}$ **d)** $-\frac{24}{25}$
**b)** $\frac{7}{25}$ **e)** $-\frac{24}{25}$
**c)** $\frac{24}{25}$

**28.** $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

**29.** $m = 0$ ou $m = \frac{8}{5}$.

**30.** Sim, pois $\text{sen } 70° = \cos 20°$.

**31.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$

**32.** **a)** $-\sqrt{3}$ **d)** $\nexists$
**b)** 0 **e)** $\sqrt{3}$
**c)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**33.** **a)** $\nexists$ **d)** $-1$
**b)** 0 **e)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
**c)** $-\sqrt{3}$

**34.** $y = 4 - 2\sqrt{3}$

**35.** **a)** Positivo. **d)** Negativo.
**b)** Negativo. **e)** Positivo.
**c)** Positivo.

**36.** **a)** V **c)** V **e)** V
**b)** F **d)** F **f)** F

**37.** Demonstração.

**38.** **a)** $-0{,}4$ **c)** $-0{,}4$
**b)** $0{,}4$

**39.** $\text{tg }\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

**40.** $-2\sqrt{6}$

**41.** **a)** $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ **b)** $-\frac{\sqrt{17}}{17}$

**42.** **a)** $\frac{8\sqrt{89}}{89}$ **c)** $-\frac{8}{5}$
**b)** $\frac{5\sqrt{89}}{89}$ **d)** $-\frac{8}{5}$

### Desafio

**a)** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

**b)** $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

## CAPÍTULO 3 Trigonometria em triângulos quaisquer

### Exercícios

**1.** $4\sqrt{6}$ cm

**2.** $AB \simeq 6{,}57$ cm; $BC \simeq 4{,}03$ cm.

**3.** $x = 3\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$ cm; $y = 6\sqrt{2}$ cm.

**4.** Aproximadamente 407 metros.

**5.** 105° **6.** 15 cm

**7.** **a)** Aproximadamente 1 811 m.
**b)** Aproximadamente 1 171 m.

**8.** **a)** 12 m
**b)** Aproximadamente 23,6 m.

**9.** **a)** Aproximadamente 743 m.
**b)** Aproximadamente 887 m.
**c)** 498 m

**10.** **a)** 70 km **b)** 42 km

**11.** $\frac{\sqrt{15}}{8}$

**12.** **a)** 14 m **b)** 5 cm **c)** $\sqrt{13}$ cm

**13.** $\left(\sqrt{2} + 3 + \sqrt{5}\right)$ cm

**14.** 8 cm **15.** 2,8 km

**16.** Aproximadamente 191,6 m.

**17.** **a)** $\frac{4}{5}$ **b)** 3 cm **c)** 15 cm²

**18.** $x = 1$ e $y = 60°$; $\triangle ABC$ é retângulo em **C**.

**19.** 36 minutos.

**20.** $6 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ cm

**21.** $-\frac{24}{7}$

**22.** **a)** 1,5 cm² **c)** 17,5 cm²
**b)** $4\sqrt{2}$ cm² **d)** $5\sqrt{3}$ cm²

**23.** **a)** $\frac{7}{8}$ **b)** $\frac{\sqrt{15}}{8}$ **c)** $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ cm²

**24.** Área: 21,6 m²
Terceiro lado: 7,6 m

**25.** **a)** $\frac{25}{4}$ cm² **b)** 90°

**26.** **a)** $\sqrt{7}$ cm e $\sqrt{67}$ cm.
**b)** $5\sqrt{3}$ cm²

**27.** **a)** $\sqrt{3}$ cm²
**b)** $\left(4\sqrt{3} - 2\pi\right)$ cm²

**28.** $\left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$ cm²

### Desafio

$16 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)$ cm

## CAPÍTULO 4 Funções trigonométricas

### Exercícios

**1.** 1º Q: $\frac{17\pi}{4}$; $\frac{41\pi}{5}$; $-\frac{11\pi}{3}$.
2º Q: $-\frac{5\pi}{4}$; $\frac{26\pi}{3}$; $-\frac{19\pi}{6}$.
3º Q: $-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{22\pi}{3}$; $-\frac{49\pi}{10}$; 10.
4º Q: $-0{,}5$; $\frac{15\pi}{4}$.

**2.** A: $40\pi$, $-14\pi$ e $800\pi$.
B: $\frac{17\pi}{2}$ e $-\frac{11\pi}{2}$.

C: $13\pi$, $-21\pi$ e $-7\pi$.

D: $-\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ e $-\frac{25\pi}{2}$.

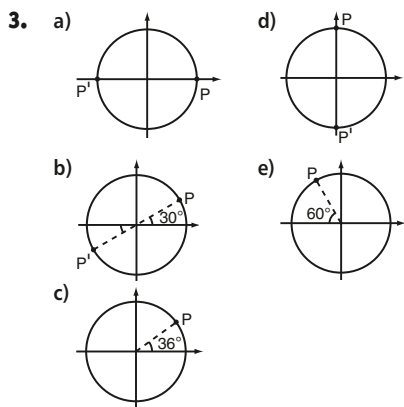
**3.** a)

d)

b)

e)

c)

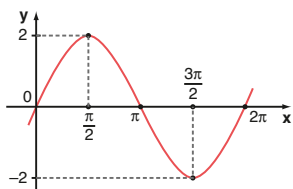
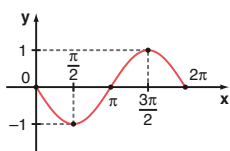
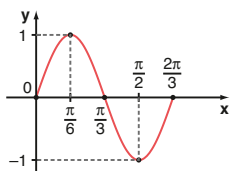
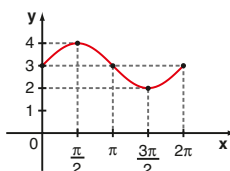
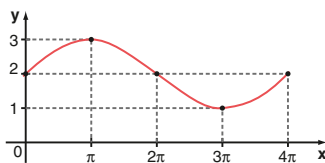
P 36°

**4.** a) Hexágono.

b) Perímetro: 6 u.c.; Área: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.a.

**5.** a) Negativo. d) Positivo.
b) Positivo. e) Negativo.
c) Negativo. f) Positivo.

**6.** a) 0 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) 1 d) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**7.** a) V c) F e) F
b) V d) V

**8.** a) $p = 2\pi$; Im $= [-2, 2]$.

b) $p = 2\pi$; Im $= [-1, 1]$.

c) $p = \frac{2\pi}{3}$; Im $= [-1, 1]$.

d) $p = 2\pi$; Im $= [2, 4]$.

e) $p = 4\pi$; Im $= [1, 3]$.

**9.** $\{t \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant t \leqslant 1\}$

**10.** $\left\{m \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{3}{2} \leqslant m \leqslant 2\right\}$

**11.** a) $\frac{\pi}{2}$ b) 5

**12.** a) 6 m d) 24 s
b) 8,8 m e) 11 voltas.
c) 2 m

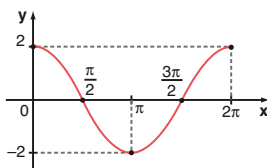
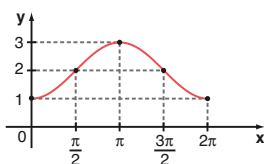
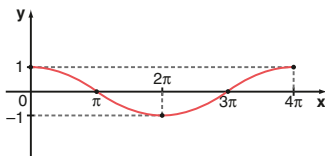
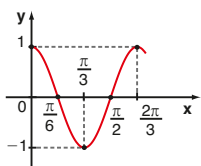
**13.** a) $-1$ c) 0 e) $-\frac{1}{2}$
b) 1 d) 0 f) $-1$

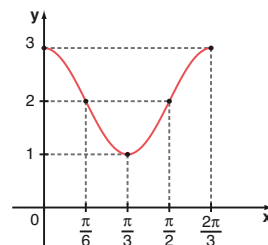
**14.** a) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 0
c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**15.** $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

**16.** $\left\{m \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant 0\right\}$

**17.** 0

**18.** a) $p = 2\pi$; Im $= [-2, 2]$.

b) $p = 2\pi$; Im $= [1, 3]$.

c) $p = 4\pi$; Im $= [-1, 1]$.

d) $p = \frac{2\pi}{3}$; Im $= [-1, 1]$.

e) $p = \frac{2\pi}{3}$; Im $= [1, 3]$.

**19.** a) F; $\cos\left(\frac{\pi}{6} + k2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) V

c) F; o valor mínimo é $-2$.

d) F; **f** é uma função afim.

e) V

f) V

**20.** a) 2020: 418 milhões (US\$);
2025: 409 milhões (US\$);
2030: 391 milhões (US\$).

b) 3 vezes; 382 milhões (US\$).

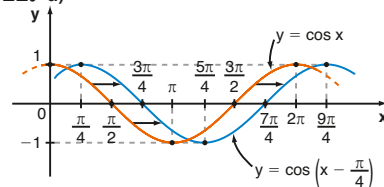
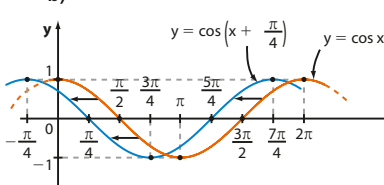
**21.** a) $D = \mathbb{R}$; Im $= [-1, 1]$; $p = \frac{2\pi}{3}$.

b) $D = \mathbb{R}$; Im $= [-3, 3]$; $p = 2\pi$.

c) $D = \mathbb{R}$; Im $= [-3, 1]$; $p = 4\pi$.

d) $D = \mathbb{R}$; Im $= \mathbb{R}$; **f** não é periódica.

e) $D = \mathbb{R}$; Im $= [-4, 4]$; $p = \frac{\pi}{3}$.

**22.** a)

b)

**23.** Alternativa **b**.

## Desafio

1

CAPÍTULO 5

# Matrizes

## Exercícios

**1.** a) $3 \times 2$ c) $2 \times 2$ e) $3 \times 1$
b) $1 \times 4$ d) $3 \times 3$ f) $3 \times 4$

**2.** a) 4 b) ∄ c) 1 d) 1

**3.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

**4.** $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

**5.** 0

**6.** **a)** $A^t = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

**b)** $B^t = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

**c)** $C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$

**d)** $D^t = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

**e)** $E^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0,5 & 3 \\ -2 & 11 & 7 & 4,1 \end{pmatrix}$

**f)** $F^t = [5\ 7\ 1\ 0\ 3]$

**g)** $G^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

**7.** $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

**8.** 3

**9.** Principal: 1, 4 e 9.
Secundária: 3, 4 e 3.

**10.** **a)** 1 485
**b)** 190
**c)** R$ 27 135,00

**11.** **a)** **X** e **Y**: 15 km
**Z** e **X**: 27 km
**Y** e **Z**: 46 km
**b)** $D^t = D$

**12.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**13.** **a)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

**b)** $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

**14.** **a)** Canadá 0 × 1 México
**b)** Argentina; 3 pontos.

**15.** **a)** m = 3 e n = 4.
**b)** $q_{23} = 875$; em 100 g de queijo mozarela há 875 mg de cálcio.
$q_{31} = 35,6$; em 100 g de queijo parmesão há 35,6 g de proteínas.
**c)** 9 360 mg
**d)** Mais que a metade.

**16.** **a)** Traço de A = −6
Traço de B = 9
Traço de C = 36
**b)** $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

**17.** a = 2, b = 1, c = 6 e d = 4.

**18.** x = 4, y = 3 e z = 2.

**19.** **a)** Não existe m ∈ ℝ.
**b)** m = −3

**20.** p = q = 3

**21.** a = −3, b = −2, c = −1, d = 0, e = 5 e f = 0.

**22.** **a)** **A** e **C**.
**b)** 3

**23.** **a)** $\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

**c)** $(-5\ \ -1\ \ -8\ \ -3)$

**d)** $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

**24.** **a)** 21; 27
**b)** $c_{ij} = 3i$

**25.** **a)** $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

**b)** $X = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 18 \\ -5 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

**c)** $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$

**26.** **a)** $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 5 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

**b)** **C**, **C** e **A**.

**27.** **a)** Sim; não.
**b)** Não existe m ∈ ℝ que satisfaz a condição.

**28.** $X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

**29.** **a)** $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -12 & 20 & -4 \end{pmatrix}$

**b)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

**c)** $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 6 & -10 & 2 \end{pmatrix}$

**30.** **a)** $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 2 & 21 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}$

**b)** $\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -13 \\ -27 & -17 \end{pmatrix}$

**c)** $\begin{pmatrix} 13 & -1 & 27 \\ 2 & 28 & 38 \end{pmatrix}$

**31.** $\begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

**32.** $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

**33.** $X = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

**34.** **a)** $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 7 \\ -10 & 9 & 6 & -19 \end{bmatrix}$

**c)** Não existe.

**d)** $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$

**e)** $\begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 0 & 17 \\ 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

**f)** $\begin{pmatrix} 12 & -4 & 16 \\ 18 & -6 & 24 \\ 30 & -10 & 40 \end{pmatrix}$

**g)** Não existe.

**h)** $\begin{pmatrix} 10 & -4 & 3 \\ 13 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

**35.** **a)** $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

**b)** Não existe.

**c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

**d)** $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

**e)** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

**36.** **a)** 3 **b)** 17 **c)** Não existe.

**37.** 22

**38.** x = 2 e y = −4.

**39.** **a)** $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

**b)** $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 2 \\ 20 & 33 & 12 \\ 5 & 18 & 34 \end{pmatrix}$

**40.** **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**e)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**41.** m = 3

**42.** $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 \\ 91 \\ 147 \end{bmatrix}$

A = 99 B = 91 C = 147

**43.** $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -64 & 19 \end{pmatrix}$

**44.** **a)** 24

**b)** $\begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 36 & 22 \\ 24 & 28 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4,50 \\ 6,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 207 \\ 294 \\ 276 \end{bmatrix}$

**45.** $x = \frac{15}{2}$ e $y = \frac{2}{5}$.

**46.** $x = \frac{3}{2}$ e $y = -\frac{3}{4}$.

**47.** Resposta pessoal; qualquer matriz da forma $\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x \end{pmatrix}$, com x ∈ ℝ e y ∈ ℝ, serve como exemplo.

**48.** **a)** Bicarbonato: 23,8 kg;
carbonato: 5 kg; ácido: 21,2 kg.

**b)** $\begin{pmatrix} 2,3 & 2,5 \\ 0,5 & 0,5 \\ 2,2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix}$

**c)** 9 500 envelopes na versão **T** e 5 500 envelopes na versão **E**.

**49.** **a)** $X = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

**b)** $X = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 13 & 25 \end{pmatrix}$

**50.** 1ª semana: R$ 31,28
2ª semana: R$ 29,85

**51.** a) $\begin{bmatrix} 346 & 297 & 553 \\ 130 & 197 & 167 \end{bmatrix}$

b) $c_{12} = 297$; 297 mg é a quantidade total de cálcio encontrada na receita II.

c) $c_{23} = 167$; 167 mg é a quantidade total de magnésio encontrada na receita III.

**52.** Sim.

**53.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**54.** Não existe.

**55.** $x = 1$

**56.** a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{11}{3} & \frac{7}{3} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$

**57.** $x = 7$ e $y = 1$.

**58.** $x = 1$

**59.** a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -5 & -16 \\ 12 & 28 \end{pmatrix}$

**60.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

**61.** $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$

## Desafio

a) $\left(x = 0,\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } z = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $\left(x = 0,\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } z = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Resposta pessoal; demonstração.

# CAPÍTULO 6 Sistemas lineares

## Exercícios

**1.** *a*, *c*, *f*, *h*.

**2.** a) Sim. c) Sim.
b) Não.

**3.** a) Sim. c) Não.
b) Não. d) Sim.

**4.** $-8$

**5.** a) $80x + 120y = 25\,200$
b) Sim; não.
c) Não; sim.

**6.** $m = -\frac{15}{19}$

**7.** Entre outras, são soluções:

a) $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ ou $(-2, 1)$.

b) $(0, 1, 1)$ ou $(1, 1, 2)$.

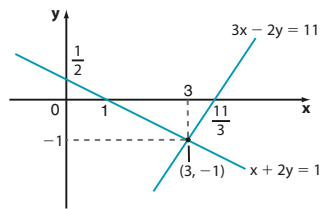
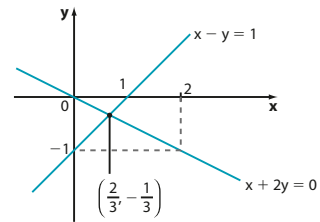
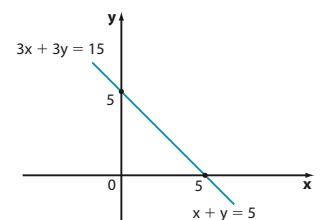
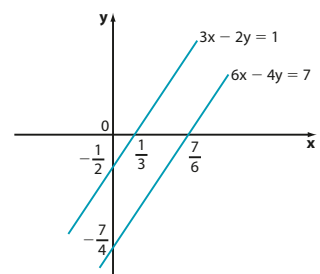
c) $(0, 2)$ ou $(1, 1)$.

d) $\left(0, 0, \frac{16}{5}\right)$ ou $(2, 2, 2)$.

**8.** 8

**9.** a) 18 b) 10

**10.** a) $-4x + 3y = -1$, por exemplo.
b) Resposta pessoal.

**11.** a) $S = \{(3, -1)\}$; S.P.D.

b) $S = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$; S.P.D.

c) $S = \{(x, 5 - x);\ x \in \mathbb{R}\}$ ou
$S = \{(5 - y, y);\ y \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

d) $S = \varnothing$; S.I.

**12.** 30 unidades.

**13.** R$ 28,40

**14.** R$ 360,00

**15.** a) 51 pontos.
b) 11 erros.
c) Não é possível.

**16.** $m \neq \frac{5}{2}$

**17.** 11

**18.** $m = -4$ e $n = 2$.

**19.** a) $(3, -2)$ é solução e $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ não é solução.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**20.** *b*

**21.** a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -7 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -13 \\ -1 & 1 & 10 & 4 \end{bmatrix}$.

**22.** a) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 7y - 2z = 11 \\ x - y + 3z = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 4y + 3z = 11 \\ -3x - 3y - 3z = 10 \end{cases}$

**23.** a) $m = 1$ c) $m = 3$
b) $m = 3$

**24.** a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Verificação.
c) Verificação.
d) $-25$

**25.** *a* e *c* estão escalonados.

**26.** a) $S = \{(-3, 7)\}$; S.P.D.
b) $S = \{(3, 3, -4)\}$; S.P.D.
c) $S = \{(7 + \alpha, 2 + 3\alpha, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.
d) $S = \{(6, 0, 3, 2)\}$; S.P.D.
e) $S = \varnothing$; S.I.

**27.** $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = -6$.

**28.** a) $x - y = 8$
b) Resposta pessoal.
c) $S = \{(8 + \alpha, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

**29.** $S = \{(1 + \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

**30.** a) $S = \{(1, 3, 2)\}$; S.P.D.
b) $S = \{(-11, -6, -3)\}$; S.P.D.
c) $S = \varnothing$; S.I.
d) $S = \left\{\left(\frac{-1 + \alpha}{2}, \frac{5 - 3\alpha}{2}, \alpha\right);\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; S.P.I.

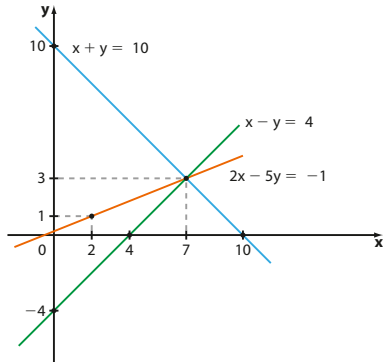
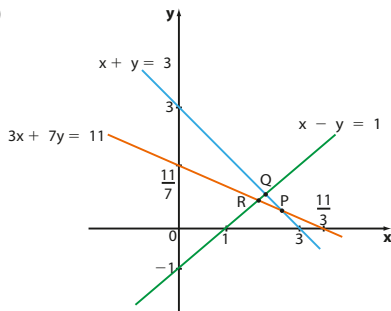
**31.** a) $S = \left\{\left(\frac{-7\alpha + 13}{11}, \frac{8 + 5\alpha}{11}, \alpha\right);\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$
b) $S = \{(5, -2, -1)\}$
c) $S = \varnothing$
d) $S = \{(1, 1, 1)\}$

**32.** Quibe: R$ 4,50; esfirra: R$ 2,20; suco: R$ 6,00.

**33.** R$ 88,00

**34.** 14 questões erradas.

**35.** **a)** $S = \{(7, 3)\}$
**b)** $S = \{(5 - \alpha, 2, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$
**c)** $S = \varnothing$
**d)** $S = \varnothing$
**e)** $S = \{(1, 5)\}$
**f)** $S = \{(-1, 2, 3, 1)\}$

**36.** **a)**

**c)**

**37.** Ana: R$ 160,00; Bia: R$ 75,00; Carol: R$ 105,00

**38.** **a)** R$ 4,00
**b)** Não é possível determinar.
**c)** R$ 32,60
**d)** Não é possível determinar.

**39.** Arquibancada: R$ 80,00
Numerada descoberta: R$ 120,00
Numerada coberta: R$ 200,00

**40.** 145

**41.** **a)** $-2$ **b)** $-13$ **c)** 4 **d)** 6 **e)** 1 **f)** $-2a^2$ **g)** $-1$ **h)** 1

**42.** **a)** $-11$ **b)** 3 **c)** $-15$ **d)** $-1$ **e)** $-13$ **f)** $-33$ **g)** $-12$

**43.** 12

**44.** **a)** 22 **b)** 2 **c)** $-1$ **d)** $-15$

**45.** **a)** 8 **b)** 8

**46.** $\det A = 1$; $\det B = -4$;
$\det (A + B) = 0$; $\det (A \cdot B) = -4$.

**47.** **a)** $S = \{1, -2\}$
**b)** $S = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
**c)** $S = \{1\}$

**48.** **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -4\}$
**b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

**49.** **a)** $m \neq 2$
**b)** $\nexists\ m \in \mathbb{R}$
**c)** $m = 2$

**50.** $a = -3$ e $b = 1$.

**51.** **a)** $\begin{bmatrix} 2 - k & 0 \\ -3 & 5 - k \end{bmatrix}$
**b)** $k = 2$ e $k = 5$.

**52.** $k \neq 1$ e $k \neq -2$.

**53.** **a)** $S = \{(0, 0)\}$; S.P.D.
**b)** $S = \{(2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.
**c)** $S = \{(0, 0, 0)\}$; S.P.D.
**d)** $S = \{(-\alpha, \alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

**54.** **a)** $m = 2$
**b)** $S = \{(-11\alpha, 9\alpha, 5\alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

**55.** $m \neq -1$

**56.** **a)** $m = -8$
**b)** Resposta pessoal; todo par ordenado da forma $(-2\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, satisfaz.

## Desafio

$-3$

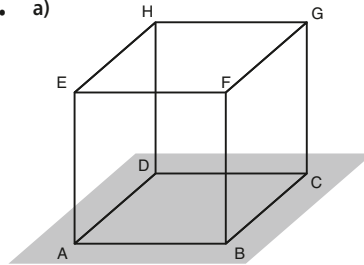
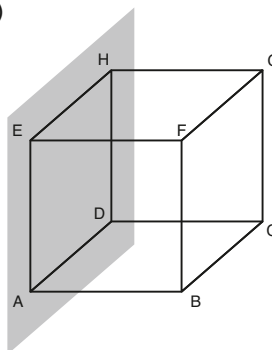
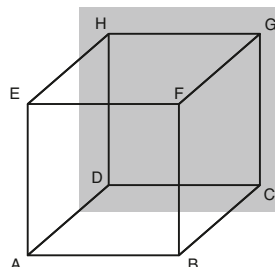
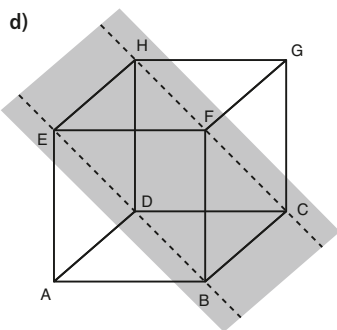
# CAPÍTULO 7 Geometria Espacial de Posição

## Exercícios

**1.** **a)**

**b)**

**c)**

d)

**2.** Um único plano ou três planos.

**3.** Nenhum, um único plano ou quatro planos.

**4.** Um único plano.

**5.** Três pontos (pés das mesas) não colineares determinam um único plano (o plano do chão), mas quatro pontos podem determinar mais de um plano.

**6.** **a)** V **b)** V **c)** V **d)** V **e)** F

**7.** **a)** $\alpha$ e $\beta$; $\alpha$ e $\gamma$; $\alpha$ e $\delta$.
**b)** $\beta$ e $\gamma$ (paralelos coincidentes).
$\beta$ e $\delta$; $\gamma$ e $\delta$ (paralelos distintos).

**8.** **a)** F **b)** V **c)** V **d)** F **e)** V

**9.** **a)** Paralelos.
**b)** Secantes.
**c)** Secantes.
**d)** Secantes.
**e)** Paralelos coincidentes.

**10.** Possíveis respostas:
**a)** Plano do assento (CDE) e o plano do solo.
**b)** Plano (ABC) e plano (CDE) (ou plano de encosto e assento); interseção: $\overleftrightarrow{CD}$.
**c)** $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{FJ}$.
**d)** $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; plano do encosto.
$\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{CF}$; plano do assento.
**e)** $\overleftrightarrow{AD}$ e plano (CDE); traço: ponto **D**.
**f)** $\overleftrightarrow{AB}$ e plano (CDE); $\overleftrightarrow{ED}$ e plano (GHI).

**11.** **a)** V **b)** V **c)** V **d)** F **e)** F

**12.** **a)** V **b)** V **c)** F **d)** V **e)** F **f)** V **g)** V **h)** V

**13.** **a)** Concorrentes. **b)** Reversas. **c)** Paralelas distintas. **d)** Secantes. **e)** Paralelas. **f)** Reversas.

**14.** **a)** V **b)** V **c)** F **d)** V **e)** F **f)** V **g)** V

**15.** **a)** V **b)** F **c)** V **d)** F **e)** F

**16.** **a)** F
**b)** V
**c)** V
**d)** F
**e)** V

**17.** Resposta pessoal;
**a)** $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ são coplanares e concorrentes, por exemplo.
**b)** $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{HG}$ são coplanares e paralelas, por exemplo.
**c)** $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{FG}$, por exemplo.
**d)** As retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são paralelas ao plano (BCG), porém $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são concorrentes.

**18.** **a)** V
**b)** V
**c)** F
**d)** V
**e)** F
**f)** V

**19.** **a)** $\overleftrightarrow{AM}$ é perpendicular aos planos (ABC) e (MNP).
**b)** $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{BN}$, $\overleftrightarrow{CP}$, $\overleftrightarrow{DQ}$, $\overleftrightarrow{ER}$ e $\overleftrightarrow{FS}$.
**c)** Plano (AMS).
**d)** Planos: (MNP), (ABC), (ABM), (CDQ), (EDQ) e (AMS).

**20.** **a)** r **b)** s **c)** t **d)** 90°

**21.** **a)** Sim; ponto **F**; planos (BFG) e (EFG).
**b)** Sim; reta $\overleftrightarrow{CD}$.
**c)** Sim; o plano (BDF) contém a reta $\overleftrightarrow{DH}$, que é perpendicular ao plano (ABC). Pela definição, os planos (BDF) e (ABC) são perpendiculares.
O traço é a reta $\overleftrightarrow{BD}$.

**22.** **a)** F **b)** V **c)** F **d)** F **e)** F **f)** F **g)** V

**23.** **a)** Planos possíveis: (ABC), (EFG), (CDI) e (EFK).
**b)** Sim; reta $\overleftrightarrow{EF}$; oblíquos.
**c)** Secantes.

**24.** **a)** V **b)** F **c)** F **d)** V **e)** F **f)** V **g)** F

**25.** **a)** F **b)** V **c)** V **d)** F **e)** V

**26.** **a)** 3 cm **b)** 7 cm **c)** 2 cm **d)** 7 cm **e)** 3 cm **f)** 3 cm **g)** 7 cm

## Desafio

Alternativa *b*.

# CAPÍTULO 8 Poliedros

## Exercícios

**1.** **a)** $d = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm; $A_t = 37{,}5$ cm²;
$V = 15{,}625$ cm³.
**b)** $d = \frac{\sqrt{57}}{2}$ cm; $A_t = 28$ cm²; $V = 10$ cm³.
**c)** $d = \frac{\sqrt{61}}{2}$ cm; $A_t = 27$ cm²; $V = 9$ cm³.

**2.** 140 dm³

**3.** $d = 4\sqrt{3}$ cm; $A_t = 96$ cm²; $V = 64$ cm³.

**4.** $A_t = 4{,}32$ m²; $V = 0{,}432\sqrt{2}$ m³.

**5.** **a)** $x = 7$ cm
**b)** 128 cm³
**c)** 14 cm

**6.** 208 cm²

**7.** **a)** $x = 30$ cm
**b)** $30\sqrt{3}$ cm
**c)** $\frac{19}{18}$

**8.** **a)** Quadruplica; octuplica.
**b)** Reduz-se a $\frac{1}{9}$ da área total do cubo original; reduz-se a $\frac{1}{27}$ do volume do cubo original.
**c)** Reduz-se a $\frac{1}{4}$ da área total do cubo original; reduz-se a $\frac{1}{8}$ do volume do cubo original.
**d)** Multiplica-se por $k^2$; multiplica-se por $k^3$.

**9.** 15

**10.** 12 m e 8 m.

**11.** **a)** 550 m² **b)** 1 462,5%

**12.** **a)** $15\sqrt{2}$ cm **b)** 1 620 cm³

**13.** R$ 596,00

**14.** Alternativa *a*.

**15.** **a)** 2,585 L; **b)** 583 cm³

**16.** **a)** $A_\ell = 42$ cm²; $A_t = 54$ cm²; $V = 21$ cm³.
**b)** $A_\ell = 15$ cm²; $A_t = 3\left(5 + \sqrt{3}\right)$ cm²;
$V = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm³.
**c)** $A_\ell = 30\sqrt{3}$ cm²; $A_t = 6\left(3 + 5\sqrt{3}\right)$ cm²;
$V = \frac{45\sqrt{3}}{2}$ cm³.

**17.** $A_t = 56\sqrt{3}$ dm²; $V = 48$ dm³.

**18.** **a)** 384 cm³ **b)** $\frac{8 - 2\sqrt{5}}{33}$

**19.** $A_t = 264$ cm²; $V = 288$ cm³.

**20.** $A_t = 144\left(10 + 3\sqrt{3}\right)$ dm²;
$V = 4\,320\sqrt{3}$ dm³.

**21.** R$ 12,60

**22.** $\ell = 4$ m e $H = 8$ m.

**23.** **a)** $68\sqrt{3}$ dm² **b)** 60 dm³

**24.** $A_\ell = 864\sqrt{3}$ cm²; $V = 5184\sqrt{3}$ cm³.

**25.** 936 m³

**26.** **a)** Pirâmide quadrangular.
**b)** Pirâmide eneagonal.
**c)** Pirâmide triangular.
**d)** Pirâmide octogonal.

**27.** 12 vértices, 22 arestas e 12 faces.

**28.** **a)** Pirâmide hexagonal.
**b)** Pirâmide pentadecagonal.

**29.** 4 vértices, 6 arestas e 4 faces.

**30.** **a)** 72 cm³
**b)** 36 cm³

**31.** 8 cm³

**32.** 120 m³

**33.** **a)** $16\sqrt{3}$ cm²
**b)** $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm
**c)** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm³

**34.** $A_\ell = 48\sqrt{6}$ cm²; $A_t = 24\sqrt{3}\,(1+2\sqrt{2})$ cm² e $V = 48\sqrt{7}$ cm³.

**35.** $64\sqrt{3}$ m³

**36.** 192 cm³

**37.** $24\sqrt{3}$ cm³

**38.** 65,52 g

**39.** Alternativa *b*.

**40.** 288 cm³

**41.** 60%

**42.** $A_t = 108\sqrt{3}$ dm²; $H = 6\sqrt{2}$ dm e $V = 54\sqrt{6}$ dm³.

**43.** $\frac{8\sqrt{3}}{375}$ m³

**44.** 6 m³

**45.** **a)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
**b)** $V = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ e $A_t = 9\,(1+\sqrt{3})$.

**46.** **a)** 108 m² **c)** 60°
**b)** $36\sqrt{3}$ m³

**47.** x = 1 cm e y = 2,4 cm.

**48.** Não.

**49.** 472 dm²

**50.** h = 10 cm e $\ell$ = 6 cm.

**51.** $10\sqrt{3}$ cm³

**52.** **a)** $6\sqrt{3}$ dm² **b)** $8\sqrt{3}$ dm³

**53.** **a)** 20 cm **b)** 9

**54.** **a)** 14 cm² **b)** $3(5\sqrt{3}+8)$ cm²

**55.** 9,072 L

**56.** **a)** $(52\sqrt{3}+180)$ cm² **b)** 6 cm

**57.** **a)** 0,042 m³ **b)** R$ 103,60

**58.** 200 dm² **59.** 336 dm³

**60.** **a)** Convexos: I, II, IV e VI.
**b)**

| | V | A | F |
|---|---|---|---|
| I | 8 | 12 | 6 |
| II | 10 | 15 | 7 |
| III | 16 | 24 | 10 |
| IV | 7 | 15 | 10 |
| V | 16 | 24 | 10 |
| VI | 12 | 30 | 20 |

**c)** Todos.

**61.** A = 30 e V = 20.

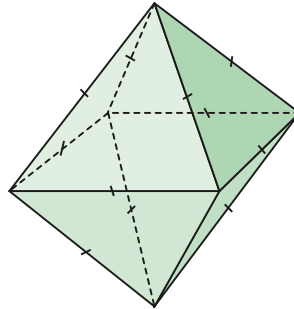
**62.** A = 90 e V = 60.

**63.** 13

**64.** 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.

**65.** **a)** Sim; V − A + F = 4 − 6 + 4 = 2.
**b)** Sim; todas as faces são triangulares, em cada vértice concorrem 3 arestas e é euleriano.
**c)** Não; a base é um triângulo retângulo.

**66.** **a)** Sim; V − A + F = 7 − 12 + 7 = 2.
**b)** Não; uma face é hexagonal e as demais triangulares. Outro motivo: no vértice da pirâmide concorrem 6 arestas e em cada vértice da base concorrem 3 arestas.
**c)** Não; não é poliedro de Platão.

**67.** **a)** Octaedro regular: 8 faces triangulares (triângulos equiláteros), 12 arestas e 6 vértices.

**b)** Sim.

## Desafio

**a)** 14 **b)** $x = \frac{a}{2}$

# Corpos redondos

## Exercícios

**1.** **a)** $A_\ell = 4\pi$ cm²; $A_t = 6\pi$ cm²; $V = 2\pi$ cm³.
**b)** $A_\ell = 5\pi$ cm²; $A_t = 7\pi$ cm²; $V = 2{,}5\pi$ cm³.
**c)** $A_\ell = 120(\pi + 2)$ mm²;
$A_t = 8(23\pi + 30)$ mm²; $V = 480\pi$ mm³.

**2.** Sim; observe que o volume interno da lata é $352 \cdot \pi$ cm³ > 1 000 cm³.

**3.** $1\,250\pi$ cm³

**4.** 4 dias.

**5.** $72\pi$ cm³ ou $96\pi$ cm³.

**6.** **a)** 75 cm **b)** 1507,2 L

**7.** 21,352 kg

**8.** **a)** 5 m
**b)** $48\pi$ m²

**9.** $150\pi$ cm²

**10.** (58,32 cm² e 30,96 cm³) ou (53,80 cm² e 23,20 cm³).

**11.** 63,36 m³

**12.** **a)** $\frac{4}{\pi}$
**b)** Cubo: 1 000 cm³; cilindro: $250\pi$ cm³.

**13.** **a)** Não; o volume total consumido seria $480\pi$ cm³ e, na garrafa, só há $450\pi$ cm³ de café.
**b)** R$ 128,45

**14.** **a)** 2 993,6 cm³
**b)** Aproximadamente 2,784 kg

**15.** 157 L

**16.** **a)** A construção de $\mathbf{C}_2$.
**b)** A construção de $\mathbf{C}_1$.

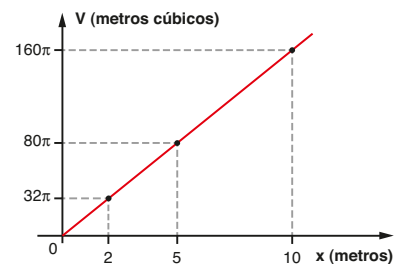
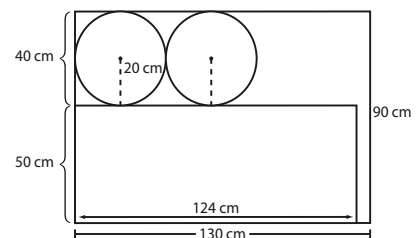
**17.** 100 m

**18.** O copo grande.

**19.** 8 cm

**20.** 5 cm

**21.** $80\pi$ unidades de medida de volume.

**22.** **a)** Sim; pois a razão $\frac{V(x)}{x}$ é constante para todo x ∈ ]0,10] e igual a $16\pi$.
**b)**

**23.** **a)** Sim, veja a figura abaixo:

**b)** 3 020 cm²

**24.** **a)** 5,625 m
**b)** 5 cm
**c)** 162 000 L

**25.** $\frac{80\pi}{3}$ cm³

**26.** $64\pi$ cm²

**27.** $A_t = 600\pi$ dm²; $V = 1\,500\pi$ dm³.

**28.** 65,1 kg

**29.** **a)** $242\pi$ cm²; $363\pi$ cm²; $\frac{1\,331\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³.

**b)** $50\pi\sqrt{53}$ cm²; $50\pi\left(\sqrt{53} + 2\right)$cm²; $\frac{3\,500\pi}{3}$ cm³.

**c)** $\left(\frac{24 + 15\pi}{2}\right)$ cm²; $12(\pi + 1)$ cm²; $6\pi$ cm³.

**30.** 334

**31.** $28{,}8\pi$ cm³

**32.** $128\pi$ cm³

**33.** 60°

**34.** **a)** $432\pi$ dm³ **b)** $324\pi$ dm³

**35.** $\frac{250\pi \cdot \sqrt{2}}{81}$ cm³

**36.** $65\pi$ cm²

**37.** **a)** $14\sqrt{3}$ cm **b)** 4,704 m²

**38.** 17,6 L

**39.** $5\pi$ m²

**40.** 5

**41.** **a)** 4 **b)** 8

**42.** $\frac{520\pi}{3}$ cm³

**43.** $3\sqrt{6}$ m

**44.** **a)** 3 m **b)** R$ 107 880,00

**45.** $432\pi$ cm³

**46.** $\frac{2}{\pi}$

**47.** $V = \frac{7\pi}{2}$ cm³

$A_t = \pi \cdot \left(5 + \frac{3\sqrt{13}}{2}\right)$ cm²

**48.** $9\,100\pi$ cm³

**49.** $\frac{\pi \cdot \left(4 + 3\sqrt{5}\right)}{25}$ m²

**50.** 4 vasos.

**51.** **a)** $225\pi$ cm² **c)** 2,5

**b)** $48\pi$ cm³ e $750\pi$ cm³.

**52.** R$ 10 270,00

**53.** 12 dm

**54.** 4,8 m

**55.** Área: $144\pi$ cm²; volume: $288\pi$ cm³.

**56.** $2\,304\pi$ cm³

**57.** $\sqrt{15}$ cm

**58.** **a)** $8\pi$ cm² **c)** $64\pi$ cm²

**b)** $16\pi$ cm²

**59.** $972\pi$ cm³

**60.** 18 vasos.

**61.** **a)** $12\pi$ cm² **b)** $4\pi\sqrt{3}$ cm

**62.** 2 cm

**63.** 8 cm

**64.** **a)** 136,4 m²

**b)** $115,\overline{73}$ m³

**65.** **a)** 4 **b)** R$ 54 040,00

**66.** 112 cm³

**67.** **a)** Área: 4A; volume: 8V.

**b)** Área: $\frac{A}{9}$; volume: $\frac{V}{27}$.

**68.** **a)** 310 cm³ **b)** 2 751,25 cm³

**69.** **a)** 5,13 m² **b)** 972 L

**70.** 2,52 cm

**71.** Alternativa *c*.

**72.** 12,56 cm³

**73.** $196\pi$ cm²

**74.** **a)** 100 cm²

**b)** 1 000 cm³

**75.** **a)** $\frac{25\pi}{3}$ cm²

**b)** Área da cunha: $48\pi$ cm²; volume da cunha: $24\pi$ cm³.

**76.** $50\pi$ cm²

**77.** 60°

**78.** 1 540 m²

**79.** **a)** $\frac{\pi R^2}{3}$ cm² **b)** $\frac{4\pi R^2}{3}$ cm²

## Desafio

Alternativa *b*.

# CAPÍTULO 10 Análise Combinatória

## Exercícios

**1.** 15

**2.** 24

**3.** 531 441

**4.** 60

**5.** **a)** 90 000 **c)** 28 734

**b)** 45 000 **d)** 3 024

**6.** **a)** 4 096 **b)** 2 048

**c)** Aproximadamente 41,01%.

**7.** **a)** 4; sendo **K**: cara e **C**: coroa, temos: (K, K), (K, C), (C, K) e (C, C).

**b)** 16; 32; 1 024.

**c)** n = 38

**8.** **a)** 840

**b)** 360

**c)** 1 680

**9.** **a)** 88 583 040 **d)** 37 515 625

**b)** 78 624 000 **e)** 87 880

**c)** 15 000

**10.** **a)** 6 **c)** 48

**b)** 60 **d)** 180

**11.** **a)** 168

**b)** 105

**c)** 220

**12.** **a)** 160 **b)** 736

**13.** Alternativa *b*.

**14.** **a)** 24 **b)** 6

**15.** 243

**16.** **s**: número de saias; **p**: número de pares de sapato

| s | p |
|---|---|
| 2 | 21 |
| 3 | 14 |
| 6 | 7 |
| 7 | 6 |
| 14 | 3 |
| 21 | 2 |

**17.** Alternativa *d*.

**18.** **a)** 40 **b)** 8

**19.** 13

**20.** **a)** 81 **b)** 117 **c)** 6 **d)** 9

**21.** **a)** 8 **b)** 16

**22.** **a) F**; o número mínimo de cores é 3.

**b) V**

**c) F**; 48 possibilidades.

**d) V**

**e) V**

**23.** 86

**24.** **a)** 16 **b)** 48 **c)** 1764

**25.** **a)** n = 6 **b)** 570

**26.** **a)** 120 **b)** 320 **c)** 60

**27.** 605 horas e 20 minutos.

**28.** **a)** 720 **c)** 2 **e)** 4 920

**b)** 24 **d)** 4 **f)** 30

**29.** **a)** 56 **c)** $\frac{9}{20}$ **e)** 190

**b)** $\frac{1}{10}$ **d)** 21 **f)** $\frac{8}{7}$

**30.** **a)** $\frac{111}{10}$ **c)** $\frac{39}{1\,640}$

**b)** 0 **d)** $\frac{3\,570}{43}$

**31.** **a) F** **c) F** **e) F**

**b) F** **d) V**

**32.** **a)** n + 2 **c)** n + 2

**b)** $\frac{1}{n - 2}$ **d)** $\frac{(n - 1)^2}{n}$

**33.** **a)** S = {1} **d)** S = {4}

**b)** S = {5} **e)** S = {5, 6}

**c)** S = {7} **f)** S = {5}

**34.** Alternativa *b*.

**35.** **a)** 6 **d)** 362 880

**b)** 24 **e)** 120

**c)** 720 **f)** 3 628 800

**36.** 24

**37.** **a)** 362 880 **d)** 5 040

**b)** 161 280 **e)** 181 440

**c)** 100 800 **f)** 1 728

**38.** **a)** 120 **b)** 24

**39.** **a)** 8 640 **b)** 201 600

**40.** **a)** 7 **c)** 144

**b)** 5 040 **d)** 144

**41.** 576

**42.** **a)** S = {4} **b)** S = {23}

**43.** **a)** 361ª **b)** 293ª **c)** SATORP

**44.** **a)** 120 **b)** 24 **c)** 216

**45.** 256

**46.** 90

**47.** **a)** 32 292 000 **b)** 1 723 680

**48.** **a)** 720 **b)** 72 **c)** 504

**49.** 212 **50.** 84 **51.** 252

**52.** a) 336 b) 60 c) 126 d) 180

**53.** 448

**54.** a) 120 b) 30

**55.** a) 110 b) 6 c) 50

**56.** a) 10 140 000 b) 24 c) 288

**57.** 126

**58.** a) 10 b) 6

**59.** Igual; a quantidade de duplas é menor que a de trios.

**60.** a) 120 b) 252 c) 35

**61.** 3 150

**62.** 231

**63.** a) 270 725 b) 715 c) 1

**64.** a) 16 b) 78 c) 169 d) 6 e) 1 014

**65.** a) 22 308 b) 249 900 c) 103 776 d) 4 560

**66.** a) 84 b) 28 c) 42

**67.** 2 160

**68.** a) 70 b) 60

**69.** n = 10

**70.** a) 1 225 b) $\frac{n^2 - n}{2} = C_{n,\,2}$ c) 39

**71.** Alternativa *d*.

**72.** 720 720

**73.** 28 peças.

**74.** a) 8 145 060 b) 105 c) 12 285

**75.** $10^{10} \cdot \binom{15}{10}$

**76.** 14 502

**77.** a) 2 520 b) 60 c) 12 d) 120 e) 6 720 f) 151 200 g) 30 240 h) 75 600 i) 389 188 800

**78.** a) 1 b) 4 c) 12

**79.** 12 600

**80.** a) 15 120 b) 5 040 c) 8 400 d) 4 200

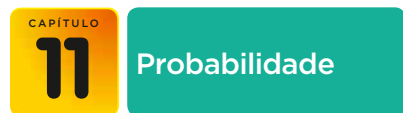
**81.** n = 5

**82.** a) 35 b) 35

**83.** 43 758

### Desafio

36

## Probabilidade

### Exercícios

**1.** a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ b) $E_1 = \{3, 6\}$ c) $E_2 = \{1, 4, 6\}$

**2.** Ω = {Sul, Sudeste, Centro-Oeste, Norte, Nordeste}

**3.** Para **K**: cara e **C**: coroa.
a) Ω = {(K, K); (K, C); (C, K); (C, C)}
b) E = {(K, K); (K, C); (C, K)}

**4.** a) E = {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64}
b) 93

**5.** a) 36 b) 6 c) 9 d) 15

**6.** $\bar{E}$ = {(4, 6); (5, 5); (5, 6); (6, 4); (6, 5); (6, 6)}

**7.** $\bar{E}$ = {(1, 1, 1); (2, 2, 2); (3, 3, 3); (4, 4, 4); (5, 5, 5); (6, 6, 6)}

**8.** a) 32 b) 496 c) 4 960

**9.** 255

**10.** Ω = {(K, 1); (K, 2); (K, 3); (K, 4); (K, 5); (K, 6); (C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6)}

**11.** (V, V), (V, P), (V, B), (P, V), (P, P), (P, B), (B, V) e (B, P).

**12.** Ω = {(V, V), (V, P), (V, B), (P, V), (P, P), (P, B), (B, V),(B, P), (B, B)}

**13.** a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{1}{100}$ c) $\frac{37}{100}$ d) $\frac{9}{10}$ e) $\frac{1}{10}$

**14.** a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{10}$ c) 0 d) $\frac{1}{2}$

**15.** a) $\frac{11}{36}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{1}{3}$

**16.** $\frac{3}{5} = 60\%$

**17.** a) $\frac{1}{52}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{51}{52}$ d) $\frac{1}{2}$

**18.** a) a = 22; b = 31; c = 106; d = 48; e = 71.
b) $\frac{31}{200}$ c) $\frac{81}{200}$

**19.** 14% **20.** 0,45 **21.** 50% **22.** 5%

**23.** a) $\frac{17}{74}$ b) $\frac{101}{148}$

**24.** 16% **25.** 80%

**26.** a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{1}{5}$

**27.** 80%

**28.** a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{2}$

**29.** 5% **30.** 11

**31.** $\frac{71}{80}$ **32.** $\frac{1}{24}$ **33.** $\frac{1}{7}$ **34.** $\frac{18}{25}$

**35.** a) 1% b) 1%

**36.** a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{11}{295}$

**37.** a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{7}{15}$

**38.** a) $10^8$
b) $\frac{1}{10^8} = 0{,}000001\%$
c) 0,00072%
d) Aproximadamente 21,78%.

**39.** a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{8}{15}$

**40.** a) $\frac{5}{18}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{9}$

**41.** $\frac{5}{6}$ (Aproximadamente 83,3%.)

**42.** a) $\frac{1}{22\,100}$ b) $\frac{3}{52}$ c) $\frac{11}{850}$

**43.** a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{15}$

**44.** a) $\frac{1}{72}$ b) $\frac{1}{36}$

**45.** 50%

**46.** a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{45}{49}$

**47.** $\frac{3}{11}$ **48.** $\frac{1}{5}$

**49.** Aproximadamente 1,67%.

**50.** $\frac{2}{3}$ **51.** $\frac{4}{13}$ **52.** $\frac{31}{36}$

**53.** a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$

**54.** a) 0,40 b) 0,55

**55.** a) $\frac{17}{20}$ b) $\frac{3}{20}$

**56.** 14%

**57.** 30%

**58.** a) 100%
b) $13{,}\overline{3}\%$

**59.** a) $\frac{1}{3}$ b) 0

**60.** a) $\frac{1}{44}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{13}$ d) $\frac{2}{39}$ e) $\frac{5}{13}$

**61.** 10%

**62.** a) $\frac{12}{19}$ b) $\frac{23}{44}$

**63.** a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{5}$

**64.** a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{1}{16}$

**65.** $\frac{1}{4}$

**66.** a) $\frac{22}{117} \simeq 0{,}188$ b) $\frac{20}{39} \simeq 0{,}5128$

**67.** a) $\frac{16}{81} \simeq 0{,}1975$ b) $\frac{40}{81} \simeq 0{,}4938$

**68.** a) $\frac{1}{30}$ b) $\frac{7}{40}$ c) $\frac{3}{10}$

**69.** a) 2,16% b) 72,16% c) 27,84%

**70.** $\frac{53}{112}$ **71.** $\frac{3}{4}$ **72.** 3% **73.** $\frac{13}{17}$

**74.** a) 64% b) 3%

### Desafio

a) $\frac{1}{113\,400}$
b) 0,0064%

# ÍNDICE REMISSIVO

## SUGESTÕES PARA OS ESTUDANTES

- ***20 000 léguas matemáticas*: um passeio pelo misterioso mundo dos números**
  **A. K. Dewdney. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2000.**
  Nesse livro de aventura, somos levados a uma viagem fictícia pelo mundo à procura de solução para um grande mistério: porque o cosmo (desde o átomo até a própria forma do Universo) é tão miraculosamente regido por leis matemáticas?
- ***A Matemática das coisas*: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas**
  **Nuno Crato (adaptação de Ruth Ribas Itacarambi). 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.**
  O livro está dividido em cinco temáticas: Coisas do dia a dia, A Terra é redonda, Coisas secretas, Arte e Geometria e Coisas matemáticas. Para cada uma dessas temáticas, o autor apresenta curtas e interessantes resenhas que ilustram a presença da Matemática em nossas vidas, sem fórmulas muito específicas ou cálculos complicados.
- ***Alex no país dos números*: uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática**
  **Alex Bellos. 1. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.**
  Viajando entre diferentes línguas e culturas, o autor investiga as propriedades do Sudoku com seus inventores; conversas com um pesquisador especializado em raciocínio quantitativo de tribos indígenas na Amazônia; aventura-se em um cassino de Las Vegas para tentar prever os acasos da fortuna e outras aventuras.
- ***Aprendendo Matemática com o GeoGebra***
  **Luís Cláudio Lopes de Araújo e Jorge Cássio Costa Nóbriga. 1. ed. São Paulo: Exato, 2010.**
  Segundo os próprios autores, a ideia foi escrever um livro autoinstrutivo voltado para o estudante, um material com o qual ele possa desenvolver, de maneira independente, as construções com o *software* educativo GeoGebra. No livro são abordadas construções em Geometria Plana (ângulos, triângulos, quadriláteros, Tales, pontos notáveis do triângulo), funções afim e quadrática e Trigonometria.
- ***Contando a história da Matemática*: dando corda na Trigonometria**
  **Oscar Guelli. v.6. 9. ed. São Paulo: Ática, 2000.**
  Usando uma vara e suas sombras, Tales de Mileto determinou a medida da altura de uma pirâmide no Egito. De ideias simples como essa, surgiu a Trigonometria, cuja história é contada nesse livro.
- ***Desafios e Enigmas*: Uma forma descontraída de colocar à prova seu raciocínio**
  **Juliano Niederauer e Marla Fernanda C. de Aguiar, 1. ed. São Paulo: Novaera, 2007.**
  O livro apresenta problemas interessantes, desafios, enigmas, charadas e testes de lógica, categorizados em muito fáceis, médios, difíceis e muito difíceis.
- ***Enigmas, desafios, paradoxos e outros divertimentos lógicos e matemáticos***
  **Dimas Monteiro de Barros. 1. ed. Araçatuba: Novas Conquistas, 2003.**
  O livro traz uma série de problemas de lógica e raciocínio quantitativo, com nível de dificuldade adequado à faixa etária. Os problemas estão acompanhados de resoluções comentadas.
- ***O bibliotecário que mediu a Terra***
  **Kathryn Lasky, 1. ed. São Paulo: Salamandra, 2001.**
  A maneira engenhosa de estimar a medida do raio da Terra, proposta por Eratóstenes, há mais de dois mil anos, é o eixo central desse livro – um verdadeiro tributo às mentes curiosas e investigadoras.
- **Os poliedros de Platão e os dedos da mão**
  **Nilson José Machado. 8. ed. São Paulo: Scipione, 2000.**
  O livro estuda os poliedros de Platão (incluindo os poliedros regulares) e discute, para cada um dos cinco tipos (cinco são os dedos de uma mão...), quais polígonos são usados em sua construção. Há também uma interessante reflexão sobre a impossibilidade de construir poliedros regulares com polígonos que tenham seis ou mais lados.

Os vídeos seguintes pertencem à série: *Matemática na Escola* e estão disponíveis em <www.m3.ime.unicamp.br>. Acesso em: 28 abr. 2016.

- ***A cartomante***
  Assunto: Análise combinatória
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 10 – Análise Combinatória
- ***A loira do banheiro***
  Assunto: Matrizes e criptografia
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 5 – Matrizes
- ***A maldição da pirâmide***
  Assunto: Volume de pirâmide e de tronco de pirâmide
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 8 – Poliedros
- ***Abelhas matemáticas***
  Assunto: Prismas
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 8 – Poliedros
- ***Alice e a lei dos cossenos***
  Assunto: Lei dos cossenos
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 3 – Trigonometria em triângulos quaisquer
- ***As aventuras do geodetetive 2: latitude e longitude***
  Assunto: Esfera
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 9 – Corpos redondos
- ***Bombons a granel***
  Assunto: Multiplicação de matrizes
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 5 – Matrizes
- ***Coisa de passarinho***
  Assunto: Introdução à probabilidade e frequência relativa
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 11 – Probabilidade
- ***Fórmula mágica***
  Assunto: Cubagem da madeira; volume do cubo e cone
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 9 – Corpos redondos
- ***Noite de forró***
  Assunto: Teorema da multiplicação e eventos independentes
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 11 – Probabilidade

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R. C.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à Geometria espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática)

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Geometria Espacial*. v. 10. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar)

HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática elementar*: combinatória e probabilidade. v. 5. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, E. L. *Áreas e volumes*. Rio de Janeiro: SBM, 1979. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar)

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. O. *A matemática do Ensino Médio*. v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 1998. (Coleção do Professor de Matemática)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

# Orientações Didáticas

# APRESENTAÇÃO

O livro de Matemática é um importante material de apoio às atividades do estudante, tanto em sala de aula quanto em casa, servindo como fonte de informações teóricas, roteiro de exercícios e problemas, estimulador de reflexões e pesquisas, entre outros objetivos. Entretanto, o livro não substitui o professor, o principal mediador das atividades que conduzem à aprendizagem.

Nesse sentido, nossa intenção foi propor algo que realmente auxilie e complemente o trabalho do professor. Assim, para esclarecer os principais pontos do nosso livro, elaboramos as Orientações Didáticas que acompanham cada volume desta coleção.

As Orientações Didáticas são compostas de duas partes.

A primeira parte é geral, isto é, comum aos três volumes, e subdividida em tópicos. Em um primeiro momento, apresentamos os eixos de trabalho, os objetivos que buscamos atingir e a estrutura detalhada do livro.

Sugerimos a leitura de parte de dois documentos; um deles trata da escolha dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula e o outro, das três grandes competências a serem desenvolvidas no Ensino Médio:

- representação e comunicação;
- investigação e compreensão;
- contextualização sociocultural.

A seguir, abordamos a avaliação, o que avaliamos e os instrumentos de avaliação. Para auxiliar o professor, procuramos mostrar exemplos de várias situações apresentadas no texto, além de propor um momento de estudo, com a leitura de fragmentos de dois textos sobre avaliação, de autores de referência no assunto.

O último tópico da parte geral das Orientações Didáticas traz uma ampla e atualizada lista com sugestões de leitura e consulta para o professor.

A segunda parte das Orientações Didáticas é específica para cada volume.

Em um primeiro momento, descrevemos os conteúdos e conceitos que serão apresentados, listando seus objetivos específicos.

Há também sugestões de abordagem para os conteúdos, com algumas possibilidades de avaliação. Procuramos destacar os assuntos mais importantes em cada volume.

Em seguida, para a seção *Troque ideias* é apresentado um comentário geral, com encaminhamentos, objetivos, competências relacionadas e sugestões para o professor mediar a atividade. Há também a solução de todos os exercícios propostos.

Por fim, há sugestões de atividades em grupo, devidamente detalhadas em seus objetivos, desenvolvimento, material e resolução comentada. Muitas dessas atividades podem servir como fontes de avaliação.

Como todos os livros desta coleção apresentam variadas listas de exercícios, problemas e desafios, inevitavelmente, os estudantes consultarão o professor. Assim, na última parte, encontra-se a resolução de todas as questões e atividades propostas.

Esperamos que estas Orientações Didáticas permitam uma melhor compreensão da nossa obra e possam otimizar o trabalho cotidiano do professor.

***Os autores***

# SUMÁRIO

# COMENTÁRIOS GERAIS

## Conheça esta coleção

Ao elaborarmos esta coleção para o Ensino Médio, procuramos proporcionar ao estudante conhecimentos significativos de teoria e prática da Matemática, visando à preparação para o trabalho, ao desenvolvimento de habilidades e competências, ao exercício da cidadania e à continuação de seus estudos em outros cursos.

Tivemos também o objetivo de contribuir com o trabalho do professor, pautando-nos em nossa prática pedagógica. Vale salientar que acreditamos na autonomia do educador, cuja prática docente não deve ser limitada pelo livro didático, o qual tem o papel de indicar caminhos, respeitando a proposta pedagógica da escola e do professor. No entanto, para que o livro didático seja um auxiliar confiável, é necessário que os conceitos sejam apresentados com precisão, a linguagem e o rigor sejam compatíveis com essa etapa da escolaridade, as propriedades sejam justificadas e aplicadas a exercícios e situações-problema, os conteúdos estejam integrados e os conhecimentos matemáticos possam ser aplicados em situações cotidianas ou usados em outras áreas do saber, construindo, dessa maneira, aprendizagens significativas.

## Principais eixos

O programa desenvolvido nos três volumes pode ser pensado em grandes tópicos, a saber:

- Números;
- Funções;
- Geometria;
- Estatística, contagem e probabilidade;
- Álgebra.

Os conteúdos e os conceitos construídos em cada volume têm sua escolha com base nos seguintes critérios:

- favorecer a autonomia intelectual dos estudantes, solidificando e aprofundando conhecimentos já adquiridos;
- possibilitar a integração entre diversos tópicos do programa de Matemática;
- possibilitar a aplicação dos conhecimentos matemáticos a outras áreas do conhecimento;
- favorecer a aquisição de habilidades e competências;
- atender às sugestões da Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação (SEB/MEC) por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (2002), PCN+ (2002), e também pelo documento *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Conhecimentos de Matemática* (2006);
- atender às sugestões preconizadas na matriz curricular do Enem;
- levar em conta a prática pedagógica dos professores-autores desta proposta;
- respeitar as diferentes propostas pedagógicas presentes nas escolas brasileiras.

Antes de iniciarmos a explanação sobre os eixos de trabalho, vale destacar que logo no início do volume 1 há um capítulo sobre noções de conjuntos, em que são abordados, de maneira simplificada, os conceitos básicos, a linguagem simbólica e as operações com conjuntos. A apresentação desse tópico tem por objetivo familiarizar os estudantes com a linguagem matemática, auxiliando-os na construção dos conceitos que serão apresentados ao longo da coleção.

### Números

Embora esse eixo seja trabalhado de maneira geral nos três volumes da coleção, dá-se maior ênfase a ele nos volumes 1 e 3. No primeiro deles, é feita uma revisão de conceitos já apresentados no Ensino Fundamental relacionados aos números naturais, números inteiros e números racionais nas formas decimal e fracionária. A seguir, são abordados os números irracionais e os números reais — campo fértil para a exploração dos intervalos reais. No volume 3 são apresentados os números complexos nas formas algébrica e polar e suas operações na forma algébrica.

### Funções

Esse eixo é desenvolvido nos três volumes, com ênfase maior nos volumes 1 e 2. No volume 1 são estudados o conceito geral de função, a leitura e a construção de gráficos, a função afim, a função quadrática, a função definida por várias sentenças, incluindo-se aí a função modular, a função exponencial, a função logarítmica e as sequências. As progressões aritmética e geométrica são apresentadas como funções com domínio no conjunto dos naturais. No volume 2 abordam-se as funções trigonométricas, enfatizando-se o conceito de período de uma função e revisando-se outros conceitos como paridade, conjunto imagem etc. Todo esse estudo é precedido pela apresentação da circunferência trigonométrica. Nos textos de aplicações da Geometria Métrica Espacial revisamos a função afim, o conceito de proporcionalidade e a função quadrática. No volume 3 são introduzidas as funções polinomiais de grau maior ou igual a 2, ainda que, em seu estudo, sejam abordados vários aspectos algébricos.

Nos três volumes, há representações gráficas das funções construídas com o auxílio de *softwares* livres de Matemática como o GeoGebra e o Graphmática.

Com o estudo da Matemática Financeira, nesse último volume, são retomados conceitos ligados a função afim e progressões aritméticas; a função exponencial e progressões geométricas; à função logarítmica, com o uso de logaritmos e suas propriedades na resolução de equações exponenciais provenientes dos problemas de juros compostos.

### Geometria

Esse eixo é trabalhado nos três volumes. No volume 1 é feita uma revisão de segmentos proporcionais e do teorema de Tales; de semelhança (em particular a semelhança de triângulos) e de relações nos triângulos retângulos, incluindo-se, naturalmente, o teorema de Pitágoras. A seguir são introduzidas as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Ainda nesse volume é feito um estudo completo sobre áreas de superfícies planas, consolidando-se conceitos construídos no Ensino

Fundamental. Alguns elementos da Geometria Analítica são abordados, especialmente no estudo da função afim e quadrática (plano cartesiano, determinação da equação de uma reta, interseção de retas, parábola etc.). No volume 2, a resolução de triângulos é estendida aos triângulos acutângulo e obtusângulo com o estudo da lei dos senos e da lei dos cossenos e cálculo da área de um triângulo. Em seguida, é realizado um estudo predominantemente intuitivo da Geometria Espacial de Posição, finalizando com a Geometria Métrica dos Sólidos, abordando de forma abrangente áreas e volumes dos principais poliedros e corpos redondos. No volume 3 é feito o estudo completo da Geometria Analítica: ponto, reta, circunferência e cônicas.

### Estatística, contagem e probabilidade

Esse eixo é trabalhado nos três volumes.

No volume 1 iniciamos o estudo da Estatística, enfatizando sua importância social e as etapas de planejamento de uma pesquisa. Em seguida, destacamos a construção e interpretação de tabelas de frequência e representações gráficas.

No volume 2, em Análise Combinatória, destacam-se o princípio multiplicativo (ou princípio fundamental da contagem) e outros métodos de contagem com base nele. Em seguida, é feito o estudo completo de probabilidades.

No volume 3 complementamos o estudo da Estatística: revisamos tabelas de frequência e gráficos, e fazemos um estudo abrangente das medidas de centralidade (ou posição) e dispersão (ou variabilidade) para resumir e caracterizar um conjunto de dados.

### Álgebra

Esse eixo é tratado nos três volumes. No volume 1, a Álgebra está disseminada no estudo de funções, uma vez que equações e inequações são partes integrantes do texto. No volume 2, é feito o estudo das matrizes e sistemas lineares, incluindo-se uma rápida "passagem" pelos determinantes. No volume 3, a Álgebra se faz presente no estudo dos polinômios e equações algébricas.

## Objetivos gerais da coleção

- Consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental.
- Contribuir para a integração do estudante na sociedade em que vive, proporcionando-lhe conhecimentos significativos de teoria e prática da Matemática, indispensáveis ao exercício da cidadania.
- Proporcionar o desenvolvimento de competências e habilidades que lhe possibilitem competir no mercado de trabalho.
- Possibilitar ao estudante o reconhecimento das inter-relações entre os vários campos da Matemática, e desta com as outras áreas do conhecimento.
- Proporcionar ao estudante conhecimentos básicos que lhe permitam continuar seus estudos em cursos de tecnologia ou universitários, além de adquirir uma formação científica geral.

## Nesta coleção

Ao elaborarmos esta coleção para o Ensino Médio – etapa final da educação básica –, procuramos atender às necessidades dos estudantes de hoje, com base em nossa experiência em sala de aula e nas orientações dos documentos oficiais do MEC, acompanhando as significativas mudanças desse ciclo nas escolas brasileiras, em particular no que diz respeito à Matemática.

Há importantes avanços da Educação Matemática nos processos de ensino e aprendizagem nesta área do conhecimento, objetivando que o "fazer Matemática com compreensão" seja estendido a todos os estudantes, de modo que eles reconheçam a Matemática como uma ciência de grande relevância social, que se organiza segundo características próprias e desenvolve importantes habilidades, favorecendo a autonomia intelectual.

A consecução dos objetivos da coleção listados anteriormente pressupõe um trabalho pedagógico planejado, articulado e organizado por parte do corpo discente do colégio. Acreditamos que nossa proposta nesta coleção possa viabilizar, orientar e facilitar esse desafiador trabalho do professor.

Dois grandes pilares norteiam e caracterizam a coleção:

- o caráter prático e utilitário da Matemática, presente nas necessidades cotidianas do cidadão e nas variadas atividades humanas, exibido na coleção em contextualizações relacionadas às práticas sociais, a outras áreas do conhecimento ou à própria História da Matemática;
- o desenvolvimento de habilidades e competências cognitivas específicas da Matemática, possibilitando ao estudante reconhecer e compreender as características particulares dessa ciência, que utiliza métodos próprios para a construção dos conhecimentos e validação das propriedades.

Com relação às escolhas metodológicas da coleção, destacamos que, de maneira geral, os conteúdos e conceitos são introduzidos por meio de um exemplo ou de uma situação-problema ou, ainda, de uma situação "motivadora", que é retomada no desenvolvimento do capítulo. Na sequência, ocorre a formalização e a sistematização teórica, em que optamos por manter, como características da coleção, a linguagem e o rigor matemático necessário (adequados à faixa etária), a clareza e a precisão nas definições e na construção dos conceitos, bem como as justificativas lógicas nas demonstrações. Atividades diversas como exemplos, exercícios resolvidos e problemas variados complementam tal organização.

Nessa estrutura de apresentação e desenvolvimento teórico, encontram-se, intencionalmente intercaladas às definições, exemplos, propriedades e exercícios, os boxes *Pense nisto* e a seção *Troque ideias*, que têm por objetivos convidar o estudante a participar mais ativamente das discussões que podem ser levantadas a partir do desenvolvimento teórico e colocá-lo em um papel mais ativo no processo de construção dos conhecimentos de Matemática.

A seguir, apresentamos alguns textos e detalhamentos sobre como entendemos alguns temas trabalhados nesta coleção.

### Resolução de problemas

*Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de um problema qualquer. O problema pode ser modesto, mas se ele*

*desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.*

*Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas, se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.*

POLYA, G. *A arte de resolver problemas.* (Prefácio.) Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

Na introdução de vários capítulos desta coleção são apresentadas situações-problema que têm por objetivo motivar o estudante para a construção dos conceitos que serão trabalhados e que poderão auxiliá-lo na busca de caminhos para resolver os problemas propostos. Frequentemente, esses problemas são retomados ao longo do capítulo, sendo apresentada uma solução.

A resolução de problemas aparece em muitas das séries de exercícios, incluindo os *Desafios* (dos quais falaremos adiante).

A seguir, apresentamos como exemplo para o leitor a resolução de um problema seguindo as quatro etapas de resolução sugeridas por Polya.

*Problema*: Uma escada de 25 dm de comprimento encontra-se apoiada em um muro, do qual seu pé dista 7 dm. Se o pé da escada se afastar mais 8 dm do muro, qual será o deslocamento vertical verificado pela extremidade superior da escada? Admita que o muro seja perpendicular ao solo.

**1ª etapa**: Compreender o problema.

É preciso identificar a incógnita, os dados e a condicionante, traçando, quando for pertinente, uma figura usando notação adequada.

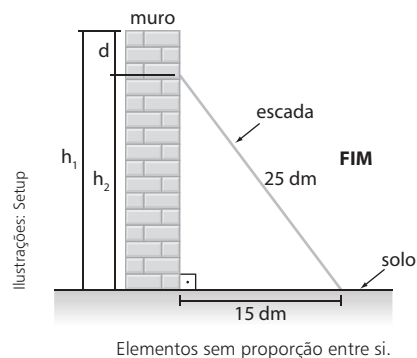
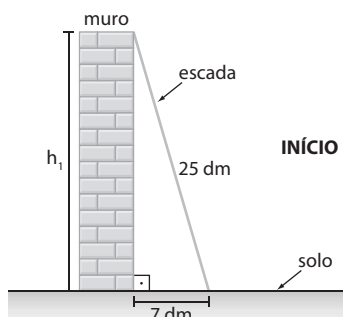
*Qual é a incógnita?*

O deslocamento vertical registrado pelo extremo superior da escada, isto é, a diferença entre os pontos mais altos atingidos pela escada; indicaremos pela letra **d**.

*Quais são os dados?*

- Comprimento da escada: 25 dm.
- Distância inicial do muro ao pé de apoio da escada: 7 dm.
- Distância final do muro ao pé de apoio da escada: 15 dm (7 dm + 8 dm = 15 dm).

*Traçado da figura*

Elementos sem proporção entre si.

**2ª etapa**: Estabelecer um plano.

Segundo Polya: *Consideramos que temos um plano quando, ao menos em linhas gerais, sabemos quais são os cálculos, construções etc. que devemos efetuar para encontrar a solução do problema considerado.*

Necessitamos encontrar uma conexão entre as informações fornecidas no enunciado e a incógnita (**d**) do problema.

O plano é determinar a altura do ponto mais alto que a escada atinge no muro ($\mathbf{h_1}$) e, em seguida, determinar a altura ($\mathbf{h_2}$) do ponto mais alto que a escada atinge depois de seu pé ter se afastado. É importante perceber que a hipotenusa dos dois triângulos retângulos é a mesma, pois sua medida corresponde ao comprimento da escada, que não se altera.

Basta fazer, em seguida, a diferença entre $\mathbf{h_1}$ e $\mathbf{h_2}$ para obter o deslocamento vertical (**d**).

**3ª etapa**: Executar o plano.

Usando o teorema de Pitágoras para a situação inicial e a final, temos:

Situação inicial:

$h_1^2 + 7^2 = 25^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1^2 = 625 - 49 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = \sqrt{576} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = 24$ dm

Situação final:

$h_2^2 + 15^2 = 25^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2^2 + 225 = 625 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = \sqrt{400} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = 20$ dm

Deslocamento vertical (**d**):

$d = h_1 - h_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 24 \text{ dm} - 20 \text{ dm} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 4$ dm

**4ª etapa**: Fazer uma retrospectiva da resolução, revendo-a e analisando-a.

É importante mostrar aos estudantes que, ao chegar à solução do problema, não se deve acreditar que a atividade está finalizada e passar ao problema seguinte ou a outro assunto. É fundamental rever todas as etapas envolvidas na resolução, verificar o resultado obtido, a coerência da resposta encontrada, verificar o argumento usado na resolução (no caso, o argumento que torna a resolução possível é o teorema de Pitágoras), além de considerar outras possíveis formas de resolver o problema.

Acreditamos que a descrição acima, sem a pretensão de ser uma "receita mágica", possa ajudar o professor na construção conjunta com os estudantes de uma rotina nas atividades de resolução de problemas, favorecendo gradativamente sua autonomia intelectual. Por fim, é preciso sempre lembrar que a resolução de problemas demanda tempo, e o professor deve ficar atento para não suprimir etapas.

## História da Matemática

Em vários capítulos dos três volumes desta coleção são apresentados textos ou pequenas referências à História da Matemática, os quais têm por objetivo colocar o leitor em contato com a história da criação do conhecimento em Matemática ou simplesmente situá-lo na linha do tempo. Essa criação, em geral, está ligada às necessidades da humanidade ao longo da história. Por exemplo, as referências históricas no livro sobre a criação dos logaritmos revelam a necessidade histórica de um instrumento de cálculo capaz de auxiliar o desenvolvimento da astronomia, do comércio e da navegação nos séculos XVI e XVII. Com o desenvolvimento tecnológico do século XX (computadores, calculadoras etc.), tal finalidade perdeu sua importância.

É importante que o estudante perceba o caráter acumulativo da Matemática e o fato de que suas fronteiras estão em contínua expansão, como mostra o infográfico sobre geometria fractal, na seção *Aplicações* no volume 2. Nele, as referências históricas, bem mais recentes (século XX), revelam o surgimento desse ramo da Matemática associado à necessidade de compreender formas geométricas que a geometria euclidiana não explicava.

## Integração de conteúdos

Muitas vezes são estabelecidas no livro-texto conexões entre o assunto em desenvolvimento e outros tópicos de Matemática já estudados em outros capítulos ou mesmo em volumes anteriores, favorecendo a não fragmentação dos conteúdos. Um currículo mais integrado tende a motivar os estudantes para a aprendizagem em Matemática. A seguir, vamos exemplificar alguns casos onde isso ocorre nesta coleção.

No volume 1, ao definirmos as progressões como um caso particular de função com domínio no conjunto dos números naturais, relacionamos a função afim à progressão aritmética e a função exponencial à progressão geométrica; o conceito de semelhança é usado na apresentação e definição das razões trigonométricas de um ângulo agudo no triângulo retângulo; o sinal de uma função é usado para resolver inequações do 1º e do 2º grau etc.

No volume 2, é possível notar a integração da Trigonometria com a Geometria por meio da resolução de triângulos quaisquer com o uso da lei dos senos e da lei dos cossenos (nesse ponto, são usadas as relações entre as razões trigonométricas de um ângulo e de seu suplementar) e de outras relações trigonométricas na resolução de problemas geométricos.

Além disso, o estudo da Geometria Métrica Espacial é ligado, nos textos de aplicações e nas atividades da seção *Troque ideias*, às funções polinomiais do 1º e 2º graus.

No volume 3, o estudo da equação da reta é associado à função afim; o estudo da parábola relaciona-se à função quadrática; e o estudo da hipérbole é associado, num caso particular, à função recíproca. Na apresentação dos polinômios, recorremos à Geometria para expressar a área de figuras planas e da superfície de figuras espaciais e o volume de alguns poliedros.

Na parte específica das Orientações Didáticas de cada volume, há outras propostas de atividades que promovem essa integração. No volume 1, citamos a atividade 9 do item *Sugestões de atividades em grupo,* que relaciona semelhança de triângulos e gráficos estatísticos; no volume 2, destacamos a atividade 4 que integra Álgebra e Geometria, na relação entre produtos notáveis e o volume do paralelepípedo, e a atividade 7 sobre fractais geométricos, que relacionam conceitos de sequências numéricas, área e perímetro.

No volume 3, a atividade 5, de Matemática Financeira, relaciona juros compostos às progressões geométricas e a atividade 3 integra matrizes, Geometria Analítica e semelhança.

## Contextualização e aplicação a outras áreas do conhecimento

*[...]*

*Contextualizar o conteúdo que quer ser aprendido significa em primeiro lugar assumir que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto. Na escola básica, o conhecimento é quase sempre reproduzido das situações originais nas quais acontece sua produção. Por esta razão quase sempre o conhecimento escolar se vale de uma transposição didática na qual a linguagem exerce papel decisivo.*

*O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. A contextualização evoca áreas, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural, e mobiliza competências cognitivas já adquiridas. As dimensões da vida ou os contextos valorizados explicitamente pela LDB são o trabalho e a cidadania. As competências estão indicadas quando a lei prevê um ensino que facilite a ponte entre a teoria e a prática.*

*[...] é possível generalizar a contextualização como recurso para tornar a aprendizagem significativa ao associá-la com experiências da vida cotidiana ou conhecimentos adquiridos espontaneamente. É preciso, no entanto, cuidar para que essa generalização não induza à banalização, com o risco de perder o essencial da aprendizagem escolar que é seu caráter sistemático, consciente e deliberado. Em outras palavras: contextualizar os conteúdos escolares não é liberá-los do plano abstrato da transposição didática para aprisioná-los no espontaneísmo e na cotidianeidade. [...]*

Trechos do parecer nº 15/98 da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional da Educação.

No início de vários capítulos desta coleção são propostos problemas ou situações presentes no contexto cotidiano, como forma de motivar o leitor na construção dos conceitos apresentados no capítulo. Em geral, no desenvolvimento do capítulo, tais problemas são retomados.

As séries de exercícios também contemplam uma grande variedade de problemas, nos quais se enfatiza a contextualização com situações reais e cotidianas.

Em diversos capítulos dos três volumes são apresentados textos complementares na seção *Aplicações*, alguns deles na forma de **infográficos**.

Há textos que possibilitam aplicar os conhecimentos matemáticos a outros campos, estabelecendo, por exemplo, um elo entre a Matemática e a Física (taxa de variação de função e velocidade média, a intensidade dos sons e a escala logarítmica; elipse e gravitação); Matemática e Química (função exponencial e decaimento radioativo); Matemática e Programação linear (Geometria Analítica e problemas de maximização); Matemática e Geologia (logaritmos e escala Richter); Matemática e Arte (número de ouro; Geometria e arte fractal); Matemática e mercado de trabalho (construção de tabelas de frequência em planilhas eletrônicas; curvas de aprendizagem); Matemática e Astronomia (no infográfico que mostra o criativo método usado por Eratóstenes na estimativa para a medida do raio da Terra); Matemática e o mundo digital (matrizes e *pixels*) etc. Em alguns momentos, os textos abordam temas transversais como a Cidadania, por exemplo; nos capítulos de Estatística apresentamos textos sobre os Censos Demográficos e a interpretação de resultados de uma pesquisa eleitoral.

Em algumas atividades, como nas seções *Troque ideias*, os estudantes, trabalhando em equipe, são convidados a construir conceitos em outras áreas do conhecimento, no intuito de vivenciar aprendizagens significativas. Podemos citar atividades que relacionam a Matemática à Economia (funções custo, receita e lucro; problema de maximização de receita); Matemática e Biologia (meia-vida de medicamentos); Matemática e Química (sistemas lineares e o balanceamento de equações químicas); Matemática e Meteorologia (índices pluviométricos) etc.

Outros textos e atividades aprofundam os conceitos que estão sendo formados e auxiliam na construção de outros. Como exemplo, o texto que liga os jogos de azar à probabilidade (Matemática, futebol e loteria, no volume 2); a atividade sobre a Mega-Sena (volume 2); a atividade que ilustra o movimento de uma roda-gigante às funções trigonométricas (volume 2); os textos e as atividades sobre compras à vista ou a prazo (no capítulo de Matemática Financeira, volume 3).

Na parte específica destas Orientações Didáticas, há sugestões de atividades em grupos relacionadas a alguns desses textos e também a assuntos inéditos, para os professores que queiram ampliar e aprofundar a discussão sobre os temas envolvidos. Essas atividades também podem servir como instrumento diversificado de avaliação.

As propostas de atividades em grupo na seção *Troque ideias* visam ao fortalecimento, em sala de aula, das interações aluno-aluno, tendo o professor o papel de mediador. Nessas atividades pretende-se colocar os estudantes em situações mais investigativas.

As atividades propostas podem incluir:

- **Modelagem matemática**, por meio do uso de funções na descrição de fenômenos em outras áreas do conhecimento, como: o uso de função afim na representação dos custos, receitas e lucro de empreendimentos simples; o uso da função quadrática em problemas de maximização da receita; o uso da função exponencial na composição do conceito de meia-vida de medicamentos; ou o uso das funções trigonométricas para aproximar o movimento das marés.
- Atividades de **integração de conteúdos**, como: a que relaciona o volume de um cone e as funções; a que utiliza polinômios para representar a área de figuras planas e o volume e área de sólidos geométricos.
- **Resolução de uma situação-problema** (fazendo uso de régua e compasso), como a determinação de um ponto equidistante de três pontos dados.
- **Atividades motivadoras na introdução de um tópico**, como as que antecedem a formalização dos conceitos de P.A. e P.G.
- Atividades de **aplicação dos conceitos** que estão sendo construídos em contextos cotidianos e de interesse dos estudantes, como: as chances de ganhar na Mega-Sena; a compreensão do índice pluviométrico e a decisão entre a compra à vista ou a prazo.
- Atividades que visam **desenvolver uma habilidade ou competência específica**, como a leitura de escalas em mapas.
- Atividades que convidam o estudante a **participar de deduções de propriedades**, colocando-os à frente no processo de validação em Matemática, como: as atividades de investigação sobre números inteiros; a dedução da relação fundamental da Trigonometria (entre outras) no triângulo retângulo; a dedução da fórmula da área de um triângulo em um caso particular.

Em cada um dos três volumes, na parte específica das Orientações Didáticas, o professor encontrará um breve comentário geral para cada atividade com algumas orientações, objetivos a serem alcançados e competências mobilizadas, além da resolução de todas as questões propostas aos estudantes.

Para relacionar algumas competências a serem desenvolvidas nas atividades, usamos como referência as competências descritas no documento *PCN+, Matemática e suas Tecnologias*, MEC, SEB, 2002, cujas três grandes competências são: representação e comunicação, investigação e compreensão, e contextualização sociocultural. Veja os textos para estudo e reflexão no item *Textos complementares – Orientações Curriculares.*

Por fim, acreditamos que as atividades de interação aluno-aluno e aluno-professor, que têm como foco principal o processo de aprendizagem dos estudantes, podem ser usadas como um valioso instrumento de diversificação em sala de aula, ampliando e enriquecendo os processos de avaliações formais. Na parte específica das Orientações Didáticas, em cada volume, há outras propostas de atividades em grupo.

## Uso da calculadora e do computador

Procuramos explorar e valorizar, em alguns pontos da coleção, o uso de calculadora (comum ou científica) e do computador.

Com a calculadora comum, por exemplo, pretendemos que o estudante se aproprie do uso da tecla de porcentagem % para resolver problemas de Matemática Comercial, tão presentes no dia a dia dos profissionais ligados ao comércio. Alguns desses problemas envolvem cálculo de porcentagens, cálculo do valor final de uma mercadoria após a concessão de um desconto (ou após um aumento de preços) etc.

Com a calculadora científica, por exemplo, procuramos utilizar algumas de suas funções, geralmente não conhecidas pelos estudantes nesta etapa da escolaridade. Entre as teclas que acionam essas funções, temos:

- as teclas de potenciação $x^y$ ou ^;
- as teclas de logaritmos decimais LOG e neperianos LN;
- as teclas referentes às funções trigonométricas para obtenção de valores das razões trigonométricas, a partir de um ângulo medido em graus ou radianos (explora-se, neste momento, o ajuste de configuração usando, de forma associada, a tecla MODE: DEG ou RAD e o uso das teclas SIN, COS e TAN) e, reciprocamente, a partir de um valor conhecido referente a uma razão trigonométrica de um ângulo, como obter a medida do ângulo, explorando, desse modo, a segunda função de uma tecla (SHIFT ou 2ndF).

Com relação ao uso do computador, destacamos alguns pontos importantes presentes na coleção:

1º) O uso de *softwares* livres de Matemática:

Na coleção, são utilizados o *software* GeoGebra nos três volumes e o Graphmática no volume 3.

No estudo das funções, o uso de *softwares* possibilita ao estudante melhor visualização:

- do traçado da parábola e suas propriedades;
- dos gráficos obtidos por translação de outros gráficos. Os gráficos de $y = |x + k|$ e $y = |x| + k$, com $k \in \mathbb{R}$, por exemplo, são obtidos por translação horizontal e vertical, respectivamente, do gráfico de $y = |x|$. Ou ainda, a partir do gráfico de $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é possível construir os gráficos de $y = a^x + k$, com $k \in \mathbb{R}^*$ por translação.
- das alterações obtidas quando construímos o gráfico de funções do tipo $y = a \cdot \text{sen } x$ ou $y = a + \text{sen } x$ ou $y = \text{sen } (a \cdot x)$, com $a \in \mathbb{R}^*$, a partir dos gráficos das funções trigonométricas "básicas": $y = \text{sen } x$ ou $y = \cos x$;
- das funções polinomiais de grau maior que 2, no volume 3. O *software* é utilizado para a construção dos gráficos dessas funções, lembrando que, sem ele, a construção requer conceitos de Matemática da Educação Superior. A partir da leitura do gráfico, podemos obter informações sobre o polinômio (número de raízes reais, interseções com os eixos coordenados etc.);
- na Geometria Analítica, o uso de um *software* como o GeoGebra pode ajudar o estudante a compreender o traçado e os elementos das cônicas (circunferência, elipse, hipérbole e parábola) e relacioná-lo com suas respectivas equações.

2º) O uso de planilhas eletrônicas:

Pensando na futura inserção do jovem brasileiro no mercado de trabalho, são propostas atividades que dão suporte ao trabalho com Estatística.

No volume 1, é mostrada, passo a passo, a construção de uma tabela de frequências. Nessa atividade, o estudante terá a oportunidade de aprender a organizar um conjunto de dados em uma tabela de frequências, adicionar valores da tabela utilizando a planilha eletrônica, criar fórmulas para realização de operações utilizando a planilha eletrônica etc. Essas tarefas fazem parte da rotina de vários profissionais, nos mais variados campos de trabalho.

No volume 1, na parte específica das Orientações Didáticas, é proposta uma atividade de construção de gráficos estatísticos.

E, nas Orientações Didáticas do volume 3, o professor encontra um roteiro completo e detalhado de uma atividade de cálculo de medidas estatísticas de posição e dispersão, que serão usadas para caracterizar e resumir um conjunto de dados, por meio, novamente, do uso de planilhas eletrônicas.

## Uso de régua e compasso

As construções geométricas com régua e compasso também estão presentes na coleção. Dois momentos em que elas ocorrem são:

- na parte específica das Orientações Didáticas do volume 1, em uma atividade que permite revisar a construção da bissetriz de um ângulo, o traçado da perpendicular e a obtenção do incentro de um triângulo com o intuito de deduzir a fórmula do cálculo da área de um triângulo, em uma situação particular;
- no volume 3, na seção *Troque ideias*, em uma atividade em grupo desenvolvida a partir de um problema, os estudantes deverão construir, com régua e compasso, o circuncentro de um triângulo e conferir, por meio da Geometria Analítica, a resposta obtida.

## Estrutura da coleção

Cada volume foi organizado em capítulos nos quais a apresentação e o desenvolvimento teórico encontram-se intencionalmente intercalados às definições, exemplos, propriedades e exercícios. O início de cada capítulo recebe destaque especial e, sempre que possível, traz situações do cotidiano, que aproximam o leitor do conteúdo que será apresentado.

A seguir são descritas as principais características das seções da coleção.

### Aplicações

Na seção *Aplicações* são apresentados textos que aprofundam alguns conceitos e auxiliam na construção de outros. Eles ilustram o emprego de conhecimentos matemáticos a outros campos, estabelecendo, por exemplo, um elo entre a Matemática e a Física ou entre a Matemática e a Economia.

### Troque ideias

A seção *Troque ideias*, presente em vários capítulos dos três volumes, propõe atividades em grupo que favorecem as interações aluno-aluno e aluno-professor. Tais atividades buscam despertar a curiosidade e levar o estudante a construir novos conceitos, ou a aprofundar conteúdos já apresentados, além de favorecer a autonomia e instigar a busca pelo conhecimento.

### Um pouco de História

Nesta seção, o trabalho com a História da Matemática coloca os estudantes em contato com um processo de construção do conhecimento e com os encaminhamentos na resolução de problemas enfrentados pela humanidade no decorrer do tempo, situando também os conhecimentos ao longo do tempo.

### Exemplos, exercícios resolvidos e exercícios

Todos os capítulos da coleção apresentam séries de exercícios intercaladas ao texto. Em geral, cada série é precedida de *exemplos* e *exercícios resolvidos*. Os exercícios estão organizados em ordem crescente de dificuldade, iniciando, sempre que julgamos conveniente, por alguns de reconhecimento ou de aplicação direta de conceitos, sem, contudo, explorar caminhos artificiais ou excessivamente algébricos e tampouco limitar-se a eles. De modo geral, são exercícios que envolvem relações mais simples.

Intercaladas a esses exercícios, propomos situações-problema com contextos cotidianos, aos quais o estudante possa aplicar e relacionar os conceitos construídos para a resolução desses problemas.

Os exercícios finais da série geralmente requerem leitura e interpretação mais cuidadosas do enunciado por parte dos estudantes, na busca por soluções mais elaboradas para os problemas propostos.

### Desafios

Todos os capítulos desta coleção são encerrados com um desafio. Em geral, são problemas que podem envolver conceitos de outros capítulos, inclusive de outros volumes.

Nossa intenção, ao propor esses desafios, é proporcionar aos estudantes mais uma oportunidade de vivenciar e aperfeiçoar a resolução de problemas, colocando-os em situações de atividades investigativas e motivando-os na busca de estratégias e procedimentos diversos de resolução.

Todos os desafios encontram-se resolvidos na parte específica destas Orientações Didáticas.

### Um pouco mais sobre

Alguns conteúdos podem ser complementados ou aprofundados a partir da leitura de textos no final de determinados capítulos.

### Observações

Os boxes *Observações*, encontrados em diversos momentos nos livros, trazem informações sobre o conteúdo estudado e estão intercalados em meio ao texto para ajudar o estudante na compreensão dos conceitos.

### Pense nisto

Nos três volumes desta coleção, estão inseridas chamadas curtas ao longo do texto intituladas *Pense nisto*.

Em geral, elas podem referir-se a uma observação relacionada ao texto, a um exemplo ou a um exercício resolvido ou proposto.

Nossa intenção, ao apresentar essas chamadas, foi tornar a linguagem do texto menos impessoal, chamando o estudante para refletir sobre algum detalhe do texto, alguma propriedade ou sobre uma resolução apresentada para um problema.

Nessas chamadas, o estudante pode ser questionado do porquê de determinada passagem, sobre os conceitos que estão sendo construídos ou pode ser convidado a propor outra solução para um problema.

Muitas vezes, as chamadas do *Pense nisto* podem orientar o professor na condução das discussões em sala de aula que levem à reflexão dos estudantes, possibilitando o compartilhamento de ideias e descobertas.

Acreditamos que as discussões propostas nessas chamadas podem encaminhar os estudantes para um papel de protagonistas no processo de aprendizagem, uma vez que assumem uma postura mais ativa e reflexiva na construção dos conceitos.

## Textos complementares – Orientações Curriculares

A seguir, reproduzimos parte do documento do Ministério da Educação: *Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Conhecimentos de Matemática*. O documento enfoca três aspectos principais: a escolha dos conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular. Por se tratar de um artigo extenso, selecionamos a parte que trata da escolha dos conteúdos.

### Orientações Curriculares para o Ensino Médio

***Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias***
***Conhecimentos de Matemática***

*De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o Ensino Médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.*

*Nessa definição de propósitos, percebe-se que a escola de hoje não pode mais ficar restrita ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica. De acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, deve-se considerar um amplo espectro de competências e habilidades a serem desenvolvidas no conjunto das disciplinas. O trabalho disciplinar pode e deve contribuir para esse desenvolvimento. Conforme destacam os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.*

*Visando à contribuição ao debate sobre as orientações curriculares, este documento trata de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular.*

*Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.*

*A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.*

*Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações curriculares para o Ensino Médio. Brasília: MEC, 2006. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 9 maio 2016.

A fim de contribuir para o estudo e a reflexão do professor, reproduzimos a seguir o trecho de outro documento do Ministério da Educação, o qual aborda especificamente as três competências a serem desenvolvidas no Ensino Médio:

- representação e comunicação;
- investigação e compreensão;
- contextualização sociocultural.

### Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias — *PCN+ — As competências em Matemática*

*A área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica e complementar do ensino fundamental para todos os brasileiros:*

- *representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;*
- *investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;*
- *contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.*

*No entanto, a escola que tem como objetivo preparar o aluno para um aprendizado permanente e prepará-lo para a vida precisa refletir sobre o significado dessas competências para decidir sobre quais delas trabalhar, em que disciplinas e de que forma. Ou seja, é necessário compreender a proposta, aproximando-a das ações e das possibilidades características dos afazeres escolares. Para isso, apontamos e detalhamos o sentido dessas competências no âmbito da Matemática, explicitando o que se espera do aluno em cada uma delas, com exemplos que procuram auxiliar a compreensão de como, nessa disciplina, é possível desenvolver as competências eleitas na área.*

| Representação e comunicação | |
|---|---|
| **Na área** | **Em Matemática** |
| **Símbolos, códigos e nomenclaturas de ciência e tecnologia** | |
| Reconhecer e utilizar adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica. | • Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática; por exemplo, ao ler embalagens de produtos, manuais técnicos, textos de jornais ou outras comunicações, compreender o significado de dados apresentados por meio de porcentagens, escritas numéricas, potências de dez, variáveis em fórmulas.<br>• Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentados sob diferentes formas como decimais em frações ou potências de dez, litros em metros cúbicos, quilômetros em metros, ângulos em graus e radianos. |
| **Articulação dos símbolos e códigos de ciência e tecnologia** | |
| Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas. | • Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas.<br>• Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações.<br>• Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas; por exemplo, escolher entre uma equação, uma tabela ou um gráfico para representar uma dada variação ao longo do tempo, como a distribuição do consumo de energia elétrica em uma residência ou a classificação de equipes em um campeonato esportivo. |
| **Análise e interpretação de textos e outras comunicações de ciência e tecnologia** | |
| Consultar, analisar e interpretar textos e comunicações de ciência e tecnologia veiculadas em diferentes meios. | • Ler e interpretar diferentes tipos de textos com informações apresentadas em linguagem matemática, desde livros didáticos até artigos de conteúdo econômico, social ou cultural, manuais técnicos, contratos comerciais, folhetos com propostas de vendas ou com planta de imóveis, indicações em bulas de medicamentos, artigos de jornais e revistas.<br>• Acompanhar e analisar os noticiários e artigos relativos à ciência em diferentes meios de comunicação, como jornais, revistas e televisão, identificando o tema em questão e interpretando, com objetividade, seus significados e implicações para, dessa forma, ter independência para adquirir informações e estar a par do que se passa no mundo em que vive. |
| **Elaboração de comunicações** | |
| Elaborar comunicações orais ou escritas para relatar, analisar e sistematizar eventos, fenômenos, experimentos, questões, entrevistas, visitas, correspondências. | • Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática, elaborando textos, desenhos, gráficos, tabelas, equações, expressões e escritas numéricas – para comunicar-se via internet, jornais ou outros meios, enviando ou solicitando informações, apresentando ideias, solucionando problemas.<br>• Produzir textos analíticos para discutir, sintetizar e sistematizar formas de pensar, fazendo uso, sempre que necessário, da linguagem matemática. Redigir resumos, justificar raciocínios, propor situações-problema, sistematizar as ideias principais sobre dado tema matemático com exemplos e comentários próprios.<br>• Expressar-se da forma oral para comunicar ideias, aprendizagens e dificuldades de compreensão; por exemplo, explicando a solução dada a um problema, expondo dúvidas sobre um conteúdo ou procedimento, propondo e debatendo questões de interesse. |
| **Discussão e argumentação de temas de interesse de ciência e tecnologia** | |
| Analisar, argumentar e posicionar-se criticamente em relação a temas de ciência e tecnologia. | • Compreender e emitir juízos próprios sobre informações relativas à ciência e à tecnologia, de forma analítica e crítica, posicionando-se com argumentação clara e consistente sempre que necessário, identificar corretamente o âmbito da questão e buscar fontes onde possa obter novas informações e conhecimentos. Por exemplo, ser capaz de analisar e julgar cálculos efetuados sobre dados econômicos ou sociais, propagandas de vendas a prazo, probabilidades de receber determinado prêmio em sorteios ou loterias, ou ainda apresentadas em um dado problema ou diferentes sínteses e conclusões extraídas a partir de um mesmo texto ou conjunto de informações. |

<table>
<tr><th colspan="2">Investigação e compreensão</th></tr>
<tr><th>Na área</th><th>Em Matemática</th></tr>
<tr><th colspan="2">Estratégias para enfrentamento de situações-problema</th></tr>
<tr><td>Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la.</td><td>• Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções; por exemplo, em situações com uma diversidade de dados apresentados por meio de tabelas, gráficos, especificações técnicas, reconhecer as informações relevantes para uma dada questão que se busca resolver.<br>• Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica.<br>• Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto, para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Interações, relações e funções; invariantes e transformações</th></tr>
<tr><td>Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações, identificar regularidades, invariantes e transformações.</td><td>• Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades; por exemplo, perceber que todas as funções do segundo grau possuem o mesmo tipo de gráfico, o que implica propriedades de sinal, crescimento e decrescimento. Da mesma forma, ao identificar a regularidade de que é constante a soma dos termos equidistantes de uma progressão aritmética finita, estender essa propriedade a toda situação envolvendo progressões aritméticas e daí deduzir a soma de seus termos.<br>• Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura, a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou ainda a identidade fundamental da trigonometria.<br>• Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios. As ampliações e reduções de figuras são exemplos que devem ser entendidos como transformações de uma situação inicial em outra final.<br>• Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto, como as relações entre representações planas nos desenhos, mapas e telas de computador com os objetos que lhes deram origem.<br>• Reconhecer a conservação contida em toda igualdade, congruência ou equivalência para calcular, resolver ou provar novos fatos. Por exemplo, ao resolver uma equação ou sistema linear, compreender que as operações realizadas a cada etapa transformam a situação inicial em outra que lhe é equivalente, com as mesmas soluções.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Medidas, quantificações, grandezas e escalas</th></tr>
<tr><td>Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.</td><td>• Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos.<br>• Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de médias. Por exemplo, de acordo com uma dada situação, escolher número de algarismos apropriado ou fazer aproximações adequadas, optar pelo uso de fração, porcentagem, potências de dez; escolher melhor unidade para representar uma grandeza.<br>• Fazer previsões e estimativas de ordens de grandeza, de quantidades ou intervalos esperados para os resultados de cálculos ou medições e, com isso, saber avaliar erros ou imprecisões nos dados obtidos na solução de uma dada situação-problema.<br>• Compreender a necessidade e fazer uso apropriado de escalas; por exemplo, na construção de gráficos ou em representações de plantas e mapas.</td></tr>
</table>

| Modelos explicativos e representativos | |
|---|---|
| Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos para situações-problema, fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos. | • Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações; por exemplo, utilizar funções ou gráficos para modelar situações envolvendo cálculo de lucro máximo ou prejuízo mínimo; utilizar ferramentas de estatística e probabilidade para compreender e avaliar as intenções de votos em uma campanha eleitoral ou, ainda, optar entre modelos algébricos ou geométricos para obter determinadas medições de sólidos. |
| **Relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas** | |
| Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas do conhecimento. | • Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada.<br>• Compreender a Matemática como ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo. A forma lógica dedutiva que a Geometria utiliza para interpretar as formas geométricas e deduzir propriedades dessas formas é um exemplo de como a Matemática lê e interpreta o mundo à nossa volta.<br>• Adquirir uma compreensão do mundo da qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações.<br>• Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como Física, Química e Biologia, seja nas ciências humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, como na agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia. |

| Contextualização sociocultural | |
|---|---|
| **Na área** | **Em Matemática** |
| **Ciência e tecnologia na história** | |
| Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social. | • Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos nem certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos diferentes.<br>• Compreender o desenvolvimento histórico da tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas.<br>• Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história. A exigência de rapidez e complexidade dos cálculos fez com que a Matemática se desenvolvesse e, por outro lado, as pesquisas e avanços teóricos da Matemática e demais ciências permitiram o aperfeiçoamento de máquinas como o computador, que vêm tornando os cálculos cada vez mais rápidos. |
| **Ciência e tecnologia na cultura contemporânea** | |
| Compreender a ciência e a tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea. | • Compreender a Matemática como parte integrante da cultura contemporânea, sendo capaz de identificar sua presença nas manifestações artísticas ou literárias, teatrais ou musicais, nas construções arquitetônicas ou na publicidade.<br>• Perceber a dimensão da Matemática e da ciência em espaços específicos de difusão e mostras culturais, como museus científicos ou tecnológicos, planetários, exposições.<br>• Compreender formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual, condicionando formas de pensar e interagir. Por exemplo, comparando os cálculos feitos pelas máquinas com aqueles feitos “com lápis e papel”, e identificando a função, especificidades e valores de cada um desses meios na construção do conhecimento. |

| Ciência e tecnologia na atualidade | |
|---|---|
| Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no mundo cotidiano e seus impactos na vida social. | • Acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade. Utilizar o conhecimento matemático como apoio para compreender e julgar as aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos. Por exemplo, o uso de satélites e radares nos rastreamentos e localizações, ou dos diferentes tipos de transmissão e detecção de informações, as formas de manipulação genética ou de obtenção e utilização de recursos naturais. |
| **Ciência e tecnologia, ética e cidadania** | |
| Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar esse conhecimento no exercício da cidadania. | • Compreender a responsabilidade social associada à aquisição e ao uso do conhecimento matemático, sentindo-se mobilizado para diferentes ações, seja em defesa de seus direitos como consumidor, dos espaços e equipamentos coletivos ou da qualidade de vida.<br>• Conhecer recursos, instrumentos e procedimentos econômicos e sociais para posicionar-se, argumentar e julgar sobre questões de interesse da comunidade, como problemas de abastecimento, educação, saúde e lazer, percebendo que podem ser muitas vezes quantificados e descritos através do instrumental da Matemática e dos procedimentos da ciência.<br>• Promover situações que contribuam para a melhoria das condições de vida da cidade onde vive ou da preservação responsável do ambiente. Utilizar as ferramentas matemáticas para analisar situações de seu entorno real e propor soluções, por exemplo, analisando as dificuldades de transporte coletivo em seu bairro por meio de levantamento estatístico, manuais técnicos de aparelhos e equipamentos, ou a melhor forma de plantio da lavoura para subsistência de uma comunidade. |

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC (SEB), 2002. p. 111-119. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2016.

## Avaliação

*A avaliação é um conjunto de ações organizadas com a finalidade de obter informações sobre o que foi assimilado pelo estudante, de que forma e em quais condições. Para tanto, é preciso elaborar um conjunto de procedimentos investigativos que possibilitem o ajuste e a orientação adequada. A avaliação deve funcionar, por um lado, como um instrumento que possibilite ao avaliador analisar criticamente a sua prática; e, por outro, como instrumento que apresente ao avaliado a possibilidade de saber sobre seus avanços, dificuldades e possibilidades.*

CAMPOS, Fernanda C. A. V.; SANTORO, Flávia M.; BORGES, Marcos R. S. A.; SANTOS, Neide. *Cooperação e aprendizagem on-line*. Coleção Educação a Distância. Rio de Janeiro: Dp&A, 2003.

É bastante consensual a ideia de que o processo avaliativo tem o papel de indicar a toda a comunidade escolar (estudantes, professores, coordenadores, diretores e pais) o andamento do processo de ensino e de aprendizagem e, dessa forma, apontar caminhos que viabilizem aprendizagens cada vez mais significativas e que contribuam para o crescimento dos estudantes.

Aos professores, coordenadores e diretores, o processo de avaliação deve fornecer parâmetros para reflexão sobre as práticas pedagógicas da escola, sobre as metodologias usadas nas aulas, bem como sobre os recursos e materiais didáticos utilizados. Os próprios instrumentos de avaliação devem ser continuamente repensados.

Desse modo, é necessário que os professores promovam, sempre que necessário, alterações nos seus planejamentos, redimensionando os objetivos a serem alcançados. Os resultados da avaliação também devem orientar a escola, como um todo, nos processos de reforço escolar.

Aos estudantes, a avaliação tem a função de permitir que verifiquem sua evolução e crescimento, seus erros, suas dificuldades e o que aprenderam. Essa reflexão deverá ser capaz de mobilizá-los para compreender e corrigir eventuais erros, retomar e recuperar conceitos e promover maior envolvimento nas discussões em sala de aula.

Para que o processo de avaliação seja capaz de fornecer subsídios à comunidade escolar, é imprescindível que se apoie em uma grande diversidade de instrumentos avaliativos, intencionalmente pensados e preparados para esse fim. Além disso, faz-se necessário que a avaliação seja contínua e possa acompanhar o dia a dia escolar dos estudantes, suas dificuldades e conquistas.

## O que avaliamos

Numa concepção de aprendizagem mais ampla, podemos pensar em três dimensões do saber: o saber conceitual, o saber procedimental e o saber atitudinal, como sugere Antoni Zabala, em seu livro *A prática educativa – Como ensinar* (Artmed, 1988).

Esses três novos conteúdos (conteúdo aqui está sendo usado não apenas para referir-se às disciplinas tradicionais, mas abrange, nessa concepção, outras capacidades, como as relações interpessoais e a inserção social) correspondem, respectivamente, a três questões: o que devemos saber, como devemos fazer e como devemos ser (ou conviver socialmente).

Se tivermos em mente essas três dimensões do saber, poderemos fazer com que o processo avaliativo seja mais amplo, justo e benéfico para o estudante.

### A dimensão conceitual (o que devemos saber)

Conteúdos conceituais constituem o conjunto de conceitos e definições relacionadas aos saberes. Para aprenderem esses conteúdos, os estudantes deverão desenvolver competências como compreender, refletir, relacionar, analisar, comparar etc. Se o professor promover, exclusivamente, aulas expositivas e se as atividades avaliativas exigirem dos estudantes apenas memorização de fórmulas e reprodução de exercícios com base em modelos previamente conhecidos, dificilmente conseguirá atingir essa dimensão conceitual.

Veja estes três exemplos:

1) Um botânico mediu, dia a dia, durante cinco dias, a altura de uma pequena planta e relacionou os resultados obtidos na tabela seguinte:

| **Altura (em cm)** | 3,0 | 3,5 | 4,5 | 5,0 | 7,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Tempo (em dias)** | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 |

Para expressar matematicamente a relação existente entre a altura (**h**), em cm, e o tempo (**t**), em dias, o botânico usou um modelo linear, isto é, $h(t) = at + b$, em que **a** e **b** são constantes reais específicas do experimento. Comente a escolha desse modelo para essa situação.

A escolha do botânico não foi acertada, pois o crescimento da planta, por dia, não é constante, ou, ainda, a taxa média de variação da função *não* é constante, pois temos do 1º para o 2º dia: acréscimo de 0,5 cm; do 2º para o 3º dia: acréscimo de 1,0 cm; e assim por diante. Não se trata de um crescimento linear, de modo que a função que relaciona essas duas grandezas *não* é de 1º grau, e o gráfico, portanto, *não* é uma reta.

2) Na feira que eu costumo frequentar, uma barraca vende caldo de cana em dois copos cilíndricos: o menor, de 300 mL, custa R$ 2,70, e o maior, de 500 mL, custa R$ 4,00. Qual é a opção mais vantajosa para o consumidor?

Uma das formas de resolver essa questão é comparar os preços para uma mesma quantidade de caldo de cana; por exemplo, quanto pagarei, em cada caso, por 100 mL?

Copo menor: Se por 300 mL, pago R$ 2,70, então, por 100 mL, pago um terço desse valor, ou seja, R$ 0,90.

Copo maior: Se por 500 mL pago R$ 4,00, então, por 100 mL pago um quinto desse valor, isto é, R$ 0,80.

Isto indica que, considerando-se os preços, é mais vantajoso para o consumidor escolher o copo grande. Observe que, nesse problema, usamos o conceito de proporcionalidade.

3) Duas grandezas, **x** e **y**, relacionam-se pelos valores da tabela seguinte:

| **x** | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 100 | 16 | 4 | 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{100}$ |

Ao analisar a tabela, um estudante concluiu que as grandezas **x** e **y** são inversamente proporcionais. Comente a conclusão do estudante.

A conclusão não está correta. Trata-se da ideia equivocada que se "duas grandezas são tais que, à medida que os valores de uma aumentam, os valores da outra diminuem, então essas grandezas são inversamente proporcionais".

É importante estar atento ao fato de que vários estudantes associam, indistintamente, e de maneira errada, decrescimento com proporcionalidade inversa (da mesma forma que associam, indistintamente, crescimento com proporcionalidade direta).

O conceito de grandezas inversamente proporcionais diz que, para qualquer par (x, y), com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, de valores dessas grandezas, o produto $x \cdot y$ é constante.

É fácil verificar que essa condição não é satisfeita para os pares da tabela:

$$\frac{1}{10} \cdot 100 = 10 \neq \frac{1}{4} \cdot 16 = 4;\ 1 \cdot 1 = 1 \neq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ etc.}$$

Por outro lado, uma análise mais cuidadosa mostra que:

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 100 = 1;\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 16 = 1;\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4 = 1 \text{ etc.}$$

Assim, $x^2 \cdot y = 1$ (constante) e, desse modo, $\mathbf{x^2}$ e **y** são grandezas inversamente proporcionais.

## A dimensão procedimental (como devemos fazer)

Conteúdos procedimentais, na concepção de Antoni Zabala, são um conjunto de ações ordenadas e com um fim, isto é, dirigidas para a realização de um objetivo. Envolvem *aquilo que se aprende a fazer fazendo*.

Por exemplo, fazer uma lista de exercícios em que se pede para resolver equações exponenciais é uma tarefa que mobiliza um conteúdo procedimental. Isso inclui também os chamados *exercícios de fixação*, comuns na Matemática. Cabem, no entanto, duas ressalvas importantes:

1º) É imprescindível que o estudante possua uma correta conceituação do objeto de estudo ao qual se refere tal mecanização.
Por exemplo, não é raro encontrar estudantes que, em um esforço grande para memorizar o desenvolvimento dos produtos notáveis, acabam esquecendo que se trata apenas de efetuar multiplicações para a determinação desse resultado.
Outro exemplo, que se encontra no livro *Fundamentos da didática da Matemática* (de Saddo Ag. Almouloud, Editora UFPR), é o estudo feito pelo matemático francês Bodin (1989) e seu núcleo de pesquisa. Eles perceberam que estudantes, ao acertarem a questão "resolva a equação $7x - 3 = 13x + 15$", não foram capazes de responder à seguinte pergunta: "O número 10 é uma solução da equação $7x - 3 = 13x + 15$?".
O professor deve, portanto, ficar atento ao fato de que instrumentos de avaliação centralizados unicamente na dimensão procedimental podem favorecer automatismos e, desse modo, se transformar em obstáculos para a compreensão dos conceitos.

2º) É imprescindível que se criem momentos em que o estudantes possa usar tais procedimentos para resolver problemas e situações mais complexas, sempre que possível, contextualizadas com vivências do seu dia a dia ou aplicadas em outras áreas do conhecimento. Aproveitando o exemplo da equação exponencial, é preciso saber resolvê-la também para enfrentar problemas mais complexos, como a meia-vida de um isótopo radioativo ou a datação de um material orgânico por carbono-14. (Veja *sugestão de atividade em grupo* nas Orientações Didáticas do volume 1.)

Voltando ao exemplo do caldo de cana vendido na feira, se modificarmos um pouco o enunciado (fornecendo a informação de que os copos são cilíndricos, bem como as dimensões — medida do raio e da altura — desses cilindros), estaremos mobilizando também um conteúdo procedimental — o cálculo do volume do cilindro — para resolver o problema.

## A dimensão atitudinal (como devemos ser)

Conteúdos atitudinais são aqueles que se referem à inserção social do estudante e ao exercício da cidadania, e é necessário que estejam presentes numa avaliação.

> [...] *uma avaliação de estudantes deve considerar dois aspectos importantes, a saber:*
> - *a avaliação quantitativa do desempenho dos estudantes* [...]
> - *a avaliação qualitativa, que é um processo de avaliação contínuo relacionado ao processo educativo, como atitude do aluno, sua participação em tarefas propostas, seu interesse, seu espírito crítico, sua autonomia intelectual e seus níveis de cooperação com colegas.*

CAMPOS, Fernanda C. A. V.; SANTORO, Flávia M.; BORGES, Marcos R. S. A.; SANTOS, Neide. *Cooperação e aprendizagem on-line*. Coleção Educação a Distância. Rio de Janeiro: Dp&A, 2003.

Não é tarefa simples para o professor avaliar o grau de aprendizagem do estudante, na medida em que se misturam componentes cognitivos, afetivos e de conduta. No entanto, se ele permitir que as aulas sejam o lugar onde se debatam ideias, onde haja espaço para cada estudante expressar sua opinião pessoal, onde se coloquem, de maneira proposital, situações complexas que obriguem o estudante a questionar, argumentar, refletir, ouvir os colegas etc., ele terá maiores possibilidades de analisar os avanços de cada estudante, observando como este se comporta em debates, seminários, atividades em grupo, estudos de campo, comemorações escolares, jogos, entre outras situações.

Quando um professor propõe atividades em grupo, devidamente organizadas, ele mobiliza os estudantes a vivenciar valores como respeito, responsabilidade, cooperação e honestidade, praticando um exercício de alteridade.

Cada vez mais o mercado de trabalho procura profissionais que saibam trabalhar em equipe e sejam imbuídos desses valores.

Nos três volumes desta coleção, especialmente nos textos de leitura da seção *Aplicações*, no boxe *Pense nisto* e na seção *Troque ideias*, há oportunidades para desenvolver um trabalho que favoreça as integrações aluno-aluno e aluno-professor. Além disso, na parte específica das Orientações Didáticas de cada volume, são propostas atividades em grupo. As três dimensões do saber são colocadas em jogo nessas atividades: a conceitual, a procedimental e a atitudinal. Essas atividades podem fornecer elementos para o professor avaliar os seus estudantes: cabe a ele avaliar a produção e o empenho das equipes, a correta aplicação dos conceitos e das técnicas procedimentais. O professor deve dirigir seu olhar também às atitudes dos estudantes no que se refere ao respeito aos colegas e professores.

# Instrumentos de avaliação

## A comunicação escrita dos estudantes

É importante que o registro que o estudante produz durante todo o ano letivo contemple, entre outros:

- as anotações diárias das aulas no caderno, acompanhadas de observações que ele próprio produz a partir das discussões ocorridas em aula, durante a construção dos conceitos que estão sendo formados;
- exemplos, exercícios resolvidos em sala de aula e exercícios feitos como tarefas de casa;

- fichas de resumo, que podem ser construídas com a participação do professor ou em grupos de estudantes e que têm a função de ajudar na seleção e organização dos assuntos mais relevantes;
- relatórios que o estudante pode produzir a partir de uma proposta de aula com leitura prévia. Trata-se de antecipar um determinado tema (ou apenas um recorte dele) que será apresentado e discutido na aula seguinte. O professor solicita aos estudantes, com a devida antecedência, que façam uma leitura do livro didático, ou pesquisem alguma outra fonte, sobre certo tema. Então, para a data combinada, os estudantes tentam produzir, com as próprias palavras, um pequeno relatório sobre o que entenderam em relação à leitura feita, ainda que tal compreensão tenha sido parcial. Acreditamos que esse tipo de estratégia possa contribuir para a autonomia intelectual do estudante, favorecendo habilidades importantes como leitura, interpretação e a comunicação matemática escrita.

Se essas atividades ou alguma outra similar, como pedir ao estudante um relatório ao final de determinado capítulo ou assunto, forem feitas com alguma frequência durante o ano escolar, cada estudante terá construído um portfólio próprio, no qual comunica, por escrito, ideias matemáticas. Esse portfólio permite acompanhar a evolução e o crescimento do estudante por meio do modo como este se comunica na linguagem matemática.

## Avaliações escritas

As avaliações escritas, como as provas, por exemplo, também são instrumentos de avaliação.

A aplicação de provas, sejam elas na forma de questões de múltipla escolha, sejam na de questões dissertativas, pode ser uma das maneiras de fazer a avaliação dos estudantes. É preciso que elas sejam elaboradas considerando-se os objetivos de aprendizagem que se pretendem alcançar.

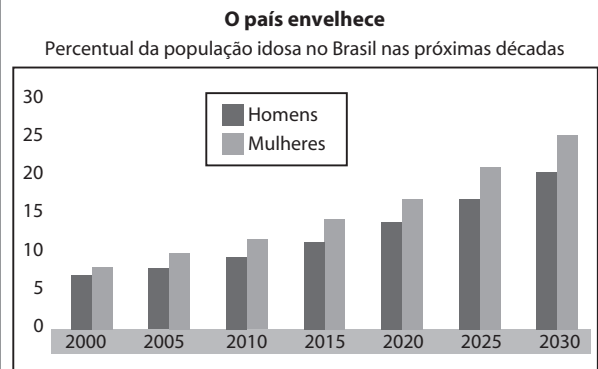
## Autoavaliação

É importante que o professor ouça os estudantes sobre o modo pelo qual eles se relacionam com a Matemática, como estudam, como relacionam a Matemática ao seu cotidiano, quais são as dificuldades que enfrentam no processo de aprendizagem, quais avanços conseguem identificar, tanto no aspecto informativo como no formativo, entre outros.

Se os estudantes tiverem a oportunidade de manifestar suas necessidades, dificuldades, avanços, anseios, formas de aprender e estudar, maiores serão as possibilidades de o professor (e a escola, em geral) encontrar caminhos para enfrentar problemas de aprendizagem e propor ações para os estudantes refletirem sobre os próprios processos de aprendizagem.

## A comunicação oral dos estudantes

O ato de comunicar oralmente ideias matemáticas pode ocorrer em atividades como apresentação de trabalhos e seminários organizados pelos estudantes. Vejamos uma situação-problema que envolve esse aspecto.

Você precisa relatar uma situação descrita pelo gráfico seguinte a uma pessoa que não dispõe dele no momento.

**Fonte:** Ipea. Extraído de: *Carta Capital*, 15/4/2009.

Naturalmente, o estudante deverá ser capaz de identificar e relatar do que trata o gráfico, quais são as grandezas associadas, que tendência se evidencia, quais os dados representados nas estimativas para homens e nas para mulheres etc.

Em se tratando de representações gráficas, atividades similares a essa podem ser realizadas no estudo da Estatística Descritiva e também no estudo introdutório das funções, no que diz respeito à leitura e interpretação de gráficos (em geral, gráficos em que uma das grandezas é o tempo são adequados para o estudo das funções).

Outro assunto que favorece atividades em que os estudantes são convidados a expressar-se oralmente é a Geometria, na descrição e comparação de figuras. Veja estas duas situações:

- No início do estudo dos sólidos geométricos, podem-se espalhar vários sólidos sobre a mesa (ou projetar imagens de sólidos) e pedir aos estudantes para agrupá-los segundo algum critério. Provavelmente, eles separarão os poliedros dos corpos redondos. Outra possibilidade é separar os sólidos em dois grupos: os que possuem vértice e os que não possuem. Em seguida, eles deverão argumentar, oralmente, com o repertório disponível, o critério que usaram na classificação. O professor pode experimentar pedir aos estudantes que repitam a argumentação, depois da formalização dos conceitos.
- Podem-se mostrar aos estudantes, no início do estudo dos poliedros, um prisma e uma pirâmide e pedir que eles descrevam verbalmente esses sólidos, estabelecendo em quê são parecidos (entre outras, eles devem apontar que ambos são formados por polígonos) e em quê são diferentes (entre outras, a pirâmide tem uma só base e o prisma tem duas bases congruentes).

Outra possibilidade é levar para a sala de aula prismas retos e oblíquos e pedir à turma que descreva, oralmente, a diferença entre eles.

Depois de estudados os conceitos, a classificação, os elementos etc., pode-se refazer a atividade e ver quanto a comunicação oral do estudante, na caracterização desses sólidos, avançou.

(Para complementar, sugerimos a atividade de Geometria Analítica proposta na parte específica das Orientações Didáticas do volume 3).

Em relação aos seminários, uma das possibilidades é explorar os textos da seção *Aplicações*, que constam nos três volumes de nossa coleção, e convidar os estudantes a preparar seminários, produzir novos materiais e promover discussões com a turma. Essas atividades devem mobilizar os estudantes a fazer outras pesquisas, aprofundando e ampliando os contextos dos assuntos que são abordados.

Outra possibilidade interessante é a proposta de uma aula preparada por um grupo de estudantes aos demais colegas da turma. Devem-se selecionar alguns recortes do conteúdo para serem pesquisados, e que sejam compatíveis com os conhecimentos dos estudantes. Na data estabelecida, cada equipe apresenta sua aula ao resto da classe. É fundamental que o professor esteja disponível para esclarecer dúvidas e trocar ideias e sugestões com as equipes no período de preparação dos seminários.

Esse tipo de atividade promove a autonomia dos estudantes, valoriza a leitura e a pesquisa, a comunicação oral e o trabalho em equipe.

Para exemplificar, no estudo de áreas das figuras planas, podem-se informar as áreas de várias figuras (triângulos, quadriláteros, círculo e suas partes) às equipes e pedir a cada uma delas que prepare uma aula com a dedução de fórmulas, exemplos e exercícios elaborados a partir dessas informações. Essa atividade pode se transformar em um valioso instrumento de avaliação e dinamização das aulas.

Já no estudo das progressões, temos outro exemplo: é possível separar a turma em equipes, ficando cada equipe responsável pela apresentação de um seminário, na forma de roteiro completo de aula (incluindo problematização inicial, exemplos, demonstrações de fórmulas, se houver, e exercícios).

## Atividade em grupo

Conforme já mencionado anteriormente, as atividades em grupo podem mobilizar as três dimensões dos conteúdos: conceitual, procedimental e atitudinal. Na parte específica das Orientações Didáticas de cada volume, são propostas atividades em grupo. Quando possível, proponha atividades a partir de alguma matéria publicada em jornal, revista, internet etc. Acreditamos que o recurso de usar reportagens veiculadas na mídia pode ser bastante motivador para o estudante, especialmente nos casos de mobilizar competências ligadas a representação e comunicação, investigação e compreensão ou recontextualização sociocultural.

Veja este exemplo de atividade que pode ser proposta sobre a tabela de contribuição mensal do INSS:

A tabela de contribuição mensal é utilizada para a consulta sobre as faixas de salários e respectivas alíquotas de incidência para o cálculo da contribuição a ser paga ao INSS.

**Tabela de contribuição mensal para fins de recolhimento ao INSS (vigente de 01/01 a 31/12/2015)**

| Salário de contribuição (R$) | Alíquota (%) |
|---|---|
| Até 1 399,12 | 8 |
| De 1 399,13 até 2 331,88 | 9 |
| De 2 331,89 até 4 663,75 | 11 |

Atenção: Em 2015, o valor máximo do INSS do segurado era R$ 513,01.

**Fonte:** <www.portaltributario.com.br/guia/tabela_inss_empregados.html>. Acesso em: 26 abr. 2016.

A tabela é o ponto de partida para várias discussões e questões, entre as quais destacamos:

1. O que é INSS?

Resp.: INSS é a sigla de Instituto Nacional do Seguro Social, um órgão governamental responsável por receber as contribuições dos trabalhadores e fazer o pagamento de aposentadorias, auxílio-doença, pensões e outros benefícios previstos por lei.

2. O que é aposentadoria? Quais as regras atuais da aposentadoria para o trabalhador?

Resp.: Aposentadoria é uma remuneração recebida pelo trabalhador após cumprir alguns requisitos. Para conhecer as regras atuais para a aposentadoria, consulte o site <www.mtps.gov.br/aposentadoria>, acesso em 24 maio 2016.

3. Qual é o valor atual mensal do teto da aposentadoria?

Resp.: O teto máximo da aposentadoria é corrigido anualmente, em 2015 era de 4 663,75 reais. Consulte o *site* <www.mtps.gov.br>, acesso em 24 maio 2016, para obter o valor atualizado.

4. Quais são os benefícios dos contribuintes do INSS?

Resp.: Os contribuintes do INSS têm direito a alguns benefícios, como aposentadoria, auxílio-doença, pensão por morte, salário-maternidade etc. Veja mais no *site* <www.mtps.gov.br/todos-os-servicos-do-inss>, acesso em 24 maio 2016.

5. Determine a contribuição ao INSS paga por um trabalhador cujo salário bruto mensal é de:

a) R$ 1 000,00 (Resp.: R$ 80,00)

b) R$ 2 200,00 (Resp.: R$ 198,00)

c) R$ 4 000,00 (Resp.: R$ 440,00)

6. O que a informação "o valor máximo do INSS do segurado é R$ 513,01", logo após a tabela, indica?

Resp.: Como $0{,}11 \cdot 4\,663{,}75 \simeq 513{,}01$, qualquer salário superior a R$ 4 663,01 contribui com o valor de R$ 513,01 ao INSS.

7. Qual é a lei da função que relaciona o valor mensal (**y**) pago ao INSS e o salário mensal (**x**), ambos expressos em reais?

Resp.:

$$y = \begin{cases} 0{,}08 \cdot x; \text{ se } 0 < x \leqslant 1\,399{,}12 \\ 0{,}09 \cdot x; \text{ se } 1\,399{,}13 \leqslant x \leqslant 2\,331{,}88 \\ 0{,}11 \cdot x; \text{ se } 2\,331{,}89 \leqslant x \leqslant 4\,663{,}75 \\ 513{,}01; \text{ se } 4\,663{,}76 \leqslant x \end{cases}$$

## Resolução de problemas

É fundamental que seja trabalhada em aula uma grande diversidade de problemas (inclusive aqueles sem solução ou que admitem mais de uma resposta), mobilizando todas as quatro etapas desse processo, segundo G. Polya, em *A arte de resolver problemas* (1978):

- compreender o problema;
- estabelecer um plano, relacionando os dados;
- executar o plano;
- fazer um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

Na avaliação da resolução de problemas, é importante levar em consideração a evolução dos estudantes no processo. Para isso, é fundamental que esse tipo de avaliação esteja incorporado à prática do professor; não pode ser uma atividade esporádica. É preciso valorizar a criatividade na busca de soluções, a socialização de diferentes maneiras de resolver um problema, analisando todos os passos da resolução (e não apenas a resposta final) e incentivar e encorajar os estudantes na busca da sulução.

## Textos complementares – Avaliação

Pensando em um momento de pausa, estudo, reflexão e formação para o professor, reproduzimos a seguir alguns trechos do capítulo inicial do livro *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens, entre duas lógicas*, de Philippe Perrenoud.

### Uma avaliação a serviço da seleção?

*A avaliação é tradicionalmente associada, na escola, à criação de hierarquias de excelência. Os alunos são comparados e depois classificados em virtude de uma norma de excelência, definida no absoluto ou encarnada pelo professor e pelos melhores alunos. Na maioria das vezes, essas duas referências se misturam, com uma dominante: na elaboração das tabelas, enquanto alguns professores falam de exigências preestabelecidas, outros constroem sua tabela* a posteriori*, em função da distribuição dos resultados, sem todavia chegar a dar sistematicamente a melhor nota possível ao trabalho "menos ruim".*

*No decorrer do ano letivo, os trabalhos, as provas de rotina, as provas orais, a notação de trabalhos pessoais e de dossiês criam "pequenas" hierarquias de excelência, sendo que nenhuma delas é decisiva, mas sua adição e acúmulo prefiguram a hierarquia final:*

*– seja porque se fundamenta amplamente nos resultados obtidos ao longo do ano, quando a avaliação contínua não é acompanhada por provas padronizadas ou exames;*

*– seja porque a avaliação durante o ano funciona como um treinamento para o exame (Merle, 1996).*

*Essa antecipação desempenha um papel maior no contrato didático celebrado entre o professor e seus alunos, assim como nas relações entre a família e a escola. Como mostrou Chevallard (1986a), no que tange aos professores de matemática do secundário, as notas fazem parte de uma* negociação *entre o professor e seus alunos ou, pelo menos, de um* arranjo*. Elas lhes permitem fazê-los trabalhar, conseguir sua aplicação, seu silêncio, sua concentração, sua docilidade em vista do objetivo supremo: passar de ano. A nota é uma* mensagem *que não diz de início ao aluno o que ele sabe, mas* o que pode lhe acontecer *"se continuar assim até o final do ano". Mensagem tranquilizadora para uns, inquietante para outros, que visa também aos pais, com a demanda implícita ou explícita de intervir "antes que seja tarde demais". A avaliação tem a função, quando se dirige à família, de* prevenir*, no duplo sentido de impedir e de advertir. Ela alerta contra o fracasso que se anuncia ou, ao contrário, tranquiliza, acrescentando "desde que continue assim!". Quando o jogo está quase pronto, prepara os espíritos para o pior; uma decisão de reprovação ou de não admissão em uma habilitação exigente apenas confirma, em geral, os prognósticos desfavoráveis comunicados bem antes ao aluno e à sua família.*

*Assim como os pequenos mananciais formam grandes rios, as pequenas hierarquias se combinam para formar hierarquias globais, em cada disciplina escolar, depois sobre o conjunto do programa, para um trimestre, para um ano letivo e, enfim, para o conjunto de um ciclo de estudos. Referindo-se a formas e normas de excelência bem diversas, essas hierarquias têm em comum mais informar sobre a posição de um aluno em um grupo ou sobre sua distância relativa à norma de excelência do que sobre o conteúdo de seus conhecimentos e competências. Elas dizem sobretudo se o aluno é "melhor ou pior" do que seus colegas. A própria existência de uma escala a ser utilizada cria hierarquia,* às *vezes a partir de pontos pouco significativos. Amigues e Zerbato-Poudou lembram esta experiência simples: dá-se um lote de trabalhos heterogêneos a serem corrigidos por um conjunto de professores; cada um estabelece uma distribuição em forma de sino, uma aproximação da famosa curva de Gauss. Retiram-se então todos os trabalhos situados na parte mediana da distribuição e dão-se os restantes a outros corretores. Poder-se-ia logicamente esperar uma distribuição bimodal. Isso não acontece, cada avaliador recria uma distribuição "normal". Obtém-se o mesmo resultado quando se conserva apenas a metade inferior ou superior de um primeiro lote. Os examinadores criam variações que se referem mais à escala e ao princípio da classificação do que às variações significativas entre os conhecimentos ou as competências de uns e outros.*

*Uma hierarquia de excelência jamais é o puro e simples reflexo da "realidade" das variações. Elas existem realmente, mas a avaliação escolhe, em um momento definido, segundo critérios definidos, dar-lhe uma* imagem pública*; as mesmas variações podem ser dramatizadas ou banalizadas conforme a lógica de ação em andamento, pois não se avalia por avaliar, mas para fundamentar uma decisão. Ao final do ano letivo ou do ciclo de estudos, as hierarquias de excelência escolar comandam o prosseguimento normal do curso ou, se houver seleção, a orientação para esta ou aquela habilitação. De modo mais global, ao longo de todo o curso, elas regem o que se chama de êxito ou fracasso escolares. Estabelecida de acordo com uma escala muito*

*diferenciada – às vezes, apenas um décimo de ponto de diferença –, uma hierarquia de excelência se transforma facilmente em dicotomia: basta introduzir um* ponto de ruptura *para criar conjuntos considerados homogêneos; de um lado, aqueles que são reprovados são relegados às habilitações pré-profissionais ou entram no mercado de trabalho aos 15-16 anos; de outro, os que avançam no curso e se orientam para os estudos aprofundados.*

*A outra função tradicional da avaliação é* certificar aquisições em relação a terceiros. *Um diploma garante aos empregadores em potencial que seu portador recebeu formação, o que permite contratá-lo sem fazer com que preste novos exames. Uma forma de certificação análoga funciona também no interior de cada sistema escolar, de um ciclo de estudos ao seguinte, até mesmo entre anos escolares. Isso é menos visível, pois não existe o equivalente em um mercado de trabalho; o mercado da orientação permanece controlado pelo sistema educativo.*

*Uma certificação fornece poucos detalhes dos saberes e das competências adquiridos e do nível de domínio precisamente atingido em cada campo abrangido. Ela garante sobretudo que um aluno sabe* globalmente *"o que é necessário saber" para passar para a série seguinte no curso, ser admitido em uma habilitação ou começar uma profissão. Entre professores dos graus ou ciclos de estudos sucessivos, entre a escola e os empregadores, o nível e o conteúdo dos exames ou da avaliação são, é claro, questões recorrentes. Todavia, no âmbito do funcionamento regular do sistema, "age-se como se" aqueles que avaliam soubessem o que devem fazer e a eles é concedida uma certa* confiança. *A vantagem de uma certificação instituída é justamente a de não precisar ser controlada ponto por ponto, de servir de* passaporte *para o emprego ou para uma formação posterior.*

*Dentro do sistema escolar, a certificação é sobretudo um modo de regulação da divisão vertical do trabalho pedagógico. O que se certifica ao professor que recebe os alunos oriundos do nível ou do ciclo anterior é que ele poderá trabalhar* como de hábito. *O que isso recobre não é totalmente independente do programa e das aquisições mínimas. Isso pode variar muito de um estabelecimento para outro, em função do nível efetivo dos alunos e da atitude do corpo docente.*

*Em todos os casos, a avaliação não é um fim em si. É uma engrenagem no funcionamento didático e, mais globalmente, na seleção e na orientação escolares. Ela serve para controlar o trabalho dos alunos e, simultaneamente, para gerir os fluxos.*

## Ou a serviço das aprendizagens?

*A escola conformou-se com as desigualdades de êxito por tanto tempo quanto elas pareciam "na ordem das coisas". É verdade que era importante que o ensino fosse corretamente distribuído e que os alunos trabalhassem, mas a pedagogia não pretendia nenhum milagre, ela não podia senão "revelar" a desigualdade das aptidões (Bourdieu, 1996). Dentro dessa perspectiva, uma avaliação formativa não tinha muito sentido: a escola ensinava e, se tivessem vontade e meios intelectuais, os alunos aprendiam. A escola não se sentia responsável pelas aprendizagens, limitava-se a oferecer a todos a oportunidade de aprender: cabia a cada um aproveitá-la! A noção de desigualdade das oportunidades não significou, até um período recente, nada além disto: que cada um tenha acesso ao ensino, sem entraves geográficos ou financeiros, sem inquietação com seu sexo ou sua condição de origem.*

*Quando Bloom, nos anos 60, defendeu uma pedagogia do domínio (1972, 1976, 1979, 1988), introduziu um postulado totalmente diferente. Pelo menos no nível da escola obrigatória, ele dizia, "todo mundo pode aprender": 80% dos alunos podem dominar 80% dos conhecimentos e das competências inscritos no programa, com a condição de organizar o ensino de maneira a individualizar o conteúdo, o ritmo e as modalidades de aprendizagem em função de objetivos claramente definidos. De imediato, a avaliação se tornava o instrumento privilegiado de uma* regulação *contínua das intervenções e das situações didáticas. Seu papel, na perspectiva de uma pedagogia de domínio (Huberman, 1988), não era mais criar hierarquias, mas delimitar as aquisições e os modos de raciocínio de* cada *aluno o suficiente para auxiliá-lo a progredir no sentido dos objetivos. Assim nasceu, senão a própria ideia de* avaliação formativa *desenvolvida originalmente por Scriven (1976) em relação aos programas, pelo menos sua transposição à pedagogia e às aprendizagens dos alunos.*

*O que há de novo nessa ideia? Não se servem todos os professores da avaliação durante o ano para ajustar o ritmo e o nível global de seu ensino? Não se conhecem muitos professores que utilizam a avaliação de modo mais individualizado, para melhor delimitar as dificuldades de certos alunos e tentar remediá-las?*

*Toda ação pedagógica repousa sobre uma parcela intuitiva de avaliação formativa, no sentido de que, inevitavelmente, há um mínimo de regulação em função das aprendizagens ou, ao menos, dos funcionamentos observáveis dos alunos. Para se tornar uma prática realmente nova, seria necessário, entretanto, que a avaliação formativa fosse a* regra *e se integrasse a um dispositivo de pedagogia diferenciada. É esse caráter* metódico, instrumentado e constante *que a distancia das práticas comuns. Portanto, não se poderia, sob risco de especulação, afirmar que todo professor faz constantemente avaliação formativa, ao menos não no pleno sentido do termo.*

*Se a avaliação formativa nada mais é do que uma maneira de regular a ação pedagógica, por que não é uma prática corrente? Quando um artesão modela um objeto, não deixa de observar o resultado para ajustar seus gestos e, se preciso for, "corrigir o alvo", expressão comum que designa uma faculdade humana universal: a arte de conduzir a ação pelo olhar, em função de seus resultados provisórios e dos obstáculos encontrados. Cada professor dispõe dela, como todo mundo. Ele se dirige, porém, a um grupo e regula sua ação em função de sua dinâmica de conjunto, do nível global e da distribuição dos resultados, mais do que das trajetórias de cada aluno. A avaliação formativa introduz*

*uma ruptura porque propõe* deslocar essa regulação ao nível das aprendizagens e individualizá-la.

*Nenhum médico se preocupa em classificar seus pacientes, do menos doente ao mais gravemente atingido. Nem mesmo pensa em lhes administrar um tratamento coletivo. Esforça-se para determinar, para cada um deles, um diagnóstico individualizado, estabelecendo uma ação terapêutica sob medida.* Mutatis mutandis, *a avaliação formativa deveria ter a mesma função em uma pedagogia diferenciada. Com essa finalidade, as provas escolares tradicionais se revelam de pouca utilidade, porque são essencialmente concebidas em vista mais do desconto do que da análise dos erros, mais para a classificação dos alunos do que para a identificação do nível de domínio de cada um. "Seu erro me interessa", diria um professor que leu Astolfi (1997). Uma prova escolar clássica suscita erros deliberadamente, já que de nada serviria se todos os alunos resolvessem todos os problemas. Ela cria a famosa curva de Gauss, o que permite dar boas e más notas, criando, portanto, uma hierarquia. Uma prova desse gênero não informa muito como se operam a aprendizagem e a construção dos conhecimentos na mente de cada aluno, ela* sanciona *seus erros sem buscar os meios para* compreendê-los *e para trabalhá-los. A avaliação formativa deve, pois, forjar seus próprios instrumentos, que vão do teste criterioso, descrevendo de modo analítico um nível de aquisição ou de domínio, à observação* in loco *dos métodos de trabalho, dos procedimentos, dos processos intelectuais do aluno.*

*O diagnóstico é inútil se não der lugar a uma ação apropriada. Uma verdadeira avaliação formativa é necessariamente acompanhada de uma intervenção* diferenciada, *com o que isso supõe em termos de meios de ensino, de organização dos horários, de organização do grupo-aula, até mesmo de transformações radicais das estruturas escolares. As pedagogias diferenciadas estão doravante na ordem do dia e a avaliação formativa não é mais uma quimera, já que propiciou inúmeros ensaios em diversos sistemas.*

*[...]*

PERRENOUD, P. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

Para a última parte de nossa proposta de proporcionar ao professor um momento de reflexão e estudo, reproduzimos um trecho do livro *Prova: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas*, de Vasco Pedro Moretto. O autor defende a ideia de que não é a extinção da prova escrita ou oral que melhorará a aprendizagem, mas a ressignificação do método numa nova perspectiva pedagógica.

## Avaliar com eficácia e eficiência

*Avaliar a aprendizagem tem sido um tema angustiante para professores e estressante para alunos. Nas conversas com professores, orientadores e diretores, o assunto avaliação é sempre lembrado com um suspiro de desânimo e uma frase eloquente: "Esse é o problema! Aí está o nó!".*

*Muito se tem escrito e falado sobre a avaliação da aprendizagem. As dúvidas continuam, os pontos de vista se multiplicam e as experiências se diversificam. O sistema escolar gira em torno desse processo e tanto professores como alunos se organizam em função dele. Por isso a verdade apresentada é: professores e pesquisadores precisamos estudar mais, debater com profundidade e conceituar com segurança o papel da avaliação no processo da aprendizagem.*

*A avaliação da aprendizagem é angustiante para muitos professores por não saber como transformá-la num processo que não seja uma mera cobrança de conteúdos aprendidos "de cor", de forma mecânica e sem muito significado para o aluno. Angústia por ter que usar um instrumento tão valioso no processo educativo, como recurso de repressão, como meio de garantir que uma aula seja levada a termo com certo grau de interesse. Sentenças como 'anotem, pois vai cair na prova', 'prestem atenção nesse assunto porque semana que vem tem prova', 'se não ficarem calados vou fazer uma prova surpresa', 'já que vocês não param de falar, considero matéria dada e vai cair na prova', e outras que se equivalem, são indicadores da maneira repressiva que tem sido utilizada na avaliação da aprendizagem.*

*Se para o professor esse processo gera ansiedade, podemos imaginar o que representa para os alunos. 'Hora do acerto de contas', 'A hora da verdade', 'A hora de dizer ao professor o que ele quer que eu saiba', 'A hora da tortura', são algumas dentre as muitas representações em voga entre os alunos. Enquanto não há prova 'marcada' muitos alunos encontram um álibi para não estudar. E se por acaso o professor anunciar que a matéria dada não irá cair na prova... então para que estudar?, perguntarão os alunos.*

*Para grande parte dos pais, a prova também não cumpre seu real papel. Se a nota foi razoável ou ótima, os pais dão-se por satisfeitos, pois pressupõem que a nota traduz a aprendizagem correspondente, o que nem sempre é verdade. E os alunos sabem disso. Se a nota foi de aprovação, o aluno a apresenta como um troféu pelo qual 'deve receber a recompensa': saídas autorizadas, aumento de mesada, passeios extras etc. Lembrar que o dever foi cumprido... ah! Isso nem vem ao caso.*

*Diante de tal diagnóstico, a avaliação precisa ser analisada sob novos parâmetros e tem de assumir outro papel no processo da intervenção pedagógica, em consequência da redefinição dos processos de ensino e de aprendizagem.*

*A avaliação é parte integrante do ensino e da aprendizagem. O ensinar, um dia, já foi concebido como transmitir conhecimentos prontos e acabados, conjunto de verdades a serem recebidas pelo aluno, gravadas e devolvidas na hora da prova. Nessa visão de ensino, o aprender tem sido visto como gravar informações transcritas para um caderno (cultura cadernal) para devolvê-las da forma mais fiel possível ao professor na hora da prova. Expressões como 'o que será que o professor quer com essa questão?', 'professor, a questão sete não estava no caderno de ninguém, o senhor tem que anular', 'professora, dá para explicar o que a senhora quer com a questão 3?', 'professor, eu decorei todo o questionário que o senhor deu e na prova o senhor perguntou tudo diferente' são indicadores de que a preocupação dos alunos é satisfazer os professores, é tentar responder tudo o que o professor quer para, com isso, obter nota.*

*Nesta visão, que classificamos de tradicional por ainda ser, a nosso ver, a que domina o processo de ensino nos dias de hoje,*

*a avaliação de aprendizagem é encarada como um processo de 'toma lá dá cá', em que o aluno deve devolver ao professor o que dele recebeu e de preferência exatamente como recebeu, o que Paulo Freire chamou educação bancária. Nesse caso não cabe criatividade, nem interpretação. A relação professor-aluno vista dessa forma é identificada como uma forma de dominação, de autoritarismo do professor e de submissão do aluno, sendo por isso uma relação perniciosa na formação para a cidadania.*

*A perspectiva construtivista sociointeracionista propõe uma nova relação entre o professor, o aluno e o conhecimento. Ela parte do princípio de que o aluno não é um simples acumulador de informações, ou seja, um mero receptor-repetidor. Ele é o construtor do próprio conhecimento. Essa construção se dá com a mediação do professor, numa ação do aluno que estabelece a relação entre suas concepções prévias e o objeto de conhecimento proposto pela escola. Assim, fica claro que a construção do conhecimento é um processo interior do sujeito da aprendizagem, estimulado por condições exteriores criadas pelo professor. Por isso dizemos que cabe a este o papel de catalisador do processo da aprendizagem. Catalisar/mediar/facilitar são palavras que indicam o novo papel do docente no processo de interação com o aluno, como vimos em capítulos anteriores.*

***Prova: um momento privilegiado de estudo***

*Avaliar aprendizagem tem um sentido amplo. A avaliação é feita de formas diversas, com instrumentos variados, sendo o mais comum deles, em nossa cultura, a prova escrita. Por esse motivo, em lugar de apregoarmos os malefícios da prova e levantarmos a bandeira de uma avaliação sem provas, procuramos seguir o princípio: se tivermos que elaborar provas, que sejam benfeitas, atingindo seu real objetivo, que é verificar se houve aprendizagem significativa de conteúdos relevantes.*

*É preciso ressaltar, no entanto, que a avaliação da aprendizagem precisa ser coerente com a forma de ensinar. Se a abordagem no ensino foi dentro dos princípios da construção do conhecimento, a avaliação da aprendizagem seguirá a mesma orientação. Nessa linha de pensamento, propomos alguns princípios que sustentam nossa concepção de avaliação da aprendizagem:*

- *A aprendizagem é um processo interior ao aluno, ao qual temos acesso por meio de indicadores externos.*
- *Os indicadores (palavras, gestos, figuras, textos) são interpretados pelo professor e nem sempre a interpretação corresponde fielmente ao que o aluno pensa.*
- *O conhecimento é um conjunto de relações estabelecidas entre os componentes de um universo simbólico.*
- *O conhecimento construído significativamente é estável e estruturado.*
- *O conhecimento adquirido mecanicamente é instável e isolado.*
- *A avaliação da aprendizagem é um momento privilegiado de estudo e não um acerto de contas.*

[...]

MORETTO, Vasco P. *Prova*: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. 8ª ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

## Sugestões para o professor

Hoje, para coordenar um curso de Matemática rico e aberto, o professor precisa conhecer a Matemática além do seu programa curricular: deve ter acesso a informações sobre a história da descoberta matemática, estar sintonizado com tendências da Educação Matemática, conhecer curiosidades e divertimentos lógico-matemáticos, dispor de livros paradidáticos para aprofundamento, conhecer e usar recursos tecnológicos em sala de aula como forma de diversificar estratégias de aprendizagem etc.

Pensando nisso, tomamos a liberdade de sugerir alguns livros, revistas, recursos digitais e *sites* que podem contribuir para a melhor formação dos colegas.

### Sugestões de livros para a formação continuada

- *A Matemática na arte e na vida*, de Paulo Roberto Martins Contador. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

A obra analisa com profundidade a complexidade da proporção áurea e suas manifestações na natureza, na arquitetura, nas artes plásticas, enfim, onde há harmonia, beleza e equilíbrio.

- *Coleção do Professor de Matemática*

Trata-se da coleção IMPA/VITAE, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

A coleção oferece um excelente material de consulta, aprofundamento e pesquisa para o professor de Matemática do Ensino Médio. Os assuntos são apresentados e discutidos com elevado rigor matemático, em linguagem precisa e objetiva. Há ainda uma seção de exercícios, em vários dos quais são pedidas demonstrações.

Os seguintes títulos compõem a coleção:

- *A Matemática no Ensino Médio*, de Elon Lages Lima, Paulo César Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César de Oliveira Morgado. v. 1-4. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

Nos volumes de 1 a 3 são apresentados, de modo aprofundado, os principais tópicos dos programas da Matemática do Ensino Médio; no volume 4 são apresentadas as soluções de todos os exercícios propostos nos três volumes anteriores.

- *Análise combinatória e probabilidade*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho, Augusto César de Oliveira Morgado, Pedro Fernandez e João Bosco Pitombeira. 9ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

- *Construções Geométricas*, de Eduardo Wagner. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

- *Coordenadas no espaço*, de Elon Lages Lima. 4ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

- *Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios*, de Elon Lages Lima. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

- *Introdução à geometria espacial*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho. 4ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

- *Logaritmos*, de Elon Lages Lima. 5ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

- *Medida e forma em Geometria*, de Elon Lages Lima. 4ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

- *Meu professor de Matemática e outras histórias*, de Elon Lages Lima. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

- *Progressões e Matemática Financeira*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Sheila Zani. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

- *Trigonometria e Números Complexos*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Manfredo Perdigão do Carmo. 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

• *Coleção Fundamentos de Matemática Elementar*

A coleção apresenta, em 11 volumes, um estudo detalhado e rigoroso dos eixos trabalhados no Ensino Médio: Funções, Álgebra, Números, Geometria, Estatística, contagem e probabilidade, além de Matemática Financeira e Introdução ao Cálculo.

Nos livros, encontramos uma grande variedade e quantidade de exercícios, podendo servir de referencial teórico e prático para o professor do Ensino Médio. Os seguintes livros compõem a coleção:

- *Conjuntos*, *Funções*, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami. 9ª ed. v. 1. São Paulo: Atual, 2013.

Aborda os conjuntos numéricos, a noção de função e o estudo de algumas das funções elementares.

- *Logaritmos*, de Osvaldo Dolce, Gelson Iezzi e Carlos Murakami. 9ª ed. v. 2. São Paulo: Atual, 2013.

Sintetiza o assunto potências e o estudo das funções exponencial e logarítmica.

- *Trigonometria*, de Gelson Iezzi. 9ª ed. v. 3. São Paulo: Atual, 2013.

Estudo completo das funções circulares, das relações entre elas, das transformações, das equações e inequações trigonométricas, das funções circulares inversas e da trigonometria nos triângulos.

- *Sequências, matrizes, determinantes, sistemas*, de Gelson Iezzi e Samuel Hazzan. 9ª ed. v. 4. São Paulo: Atual, 2013.

Trata do estudo de progressões, de matrizes, de determinantes e de sistemas lineares.

- *Combinatória, probabilidade*, de Samuel Hazzan. 9ª ed. v. 5. São Paulo: Atual, 2013.

Estuda problemas de contagem e o binômio de Newton e faz um estudo completo sobre probabilidades.

- *Complexos, polinômios, equações*, de Gelson Iezzi. 9ª ed. v. 6. São Paulo: Atual, 2013.

São estudados os números complexos, os polinômios e as equações polinomiais.

- *Geometria analítica*, de Gelson Iezzi. 9ª ed. v. 7. São Paulo: Atual, 2013.

Aborda o estudo analítico das retas, das circunferências e das cônicas.

- *Limites, derivadas, noções de integral*, de Gelson Iezzi, Carlos Murakami e Nilson José Machado. 9ª ed. v. 8. São Paulo: Atual, 2013.

Uma abordagem simplificada de limites, de derivadas e funções de uma variável, das aplicações de derivadas e de uma introdução à noção de integral definida.

- *Geometria Plana*, de Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. 9ª ed. v. 9. São Paulo: Atual, 2013.

Trata, com rigor, detalhes e profundidade, da Geometria Plana usualmente trabalhada no Ensino Fundamental.

- *Geometria Espacial*, de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo. 9ª ed. v. 10. São Paulo: Atual, 2013.

Faz um estudo completo e axiomático da Geometria de Posição Espacial. Na Geometria Métrica são estudados poliedros, corpos redondos, inscrição e circunscrição de sólidos.

- *Matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva*, de Gelson Iezzi, Samuel Hazzan e David M. Degenszajn. 9ª ed. v. 11. São Paulo: Atual, 2013.

No livro são estudadas matemática comercial e financeira, além da estatística descritiva.

• *Fundamentos da Aritmética*, de Hygino H. Domingues. 1ª ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2009.

Podemos encontrar na obra a origem da ideia de número, os primeiros sistemas de numeração, o conceito de congruência, representação decimal dos racionais e irracionais e o corpo dos números complexos. A obra contempla elementos da história da Matemática.

• *Introdução à lógica*, de Cezar A. Mortari. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

O livro aborda inferência, dedução, indução e outras conceituações e mostra a diferença entre a lógica clássica e a não clássica.

• *Introdução às técnicas de demonstração na Matemática*, de John A. Fossa. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O autor convida o leitor a "mergulhar" no caminho das argumentações em Matemática.

• *Os elementos de Euclides*, traduzido por Irineu Bicudo. 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

Trata-se da primeira tradução completa para a Língua Portuguesa a partir do texto grego. A obra da Antiguidade Clássica contém definições, postulados, demonstrações de 465 proposições em forte sequência lógico-dedutiva, referentes à Geometria Plana e Espacial. Há também capítulos destinados à teoria dos números.

• *Probabilidade*: um curso moderno com aplicações, de Sheldon Ross. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

Uma obra completa e aprofundada sobre probabilidade, com grande variedade de exercícios.

• *Uma história da simetria em Matemática*, de Ian Stewart. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

O autor conta como uma sucessão de matemáticos e físicos, à procura de soluções para equações algébricas, acabou por construir o conceito de simetria, que revolucionou nossa visão sobre o Universo.

- *Vetores e uma iniciação à Geometria Analítica*, de Dorival A. Mello, Renate G. Watanabe. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

A obra contempla o estudo de vetores, dependência linear e bases, produto escalar e vetorial, sistemas de coordenadas no espaço, estudo do plano, superfície esférica e um apêndice sobre cônicas.

## História da Matemática

- *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática, de Gilberto G. Garbi. 5ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

A obra faz um relato da construção do conhecimento matemático em quatro milênios, destacando a vida e as contribuições de grandes matemáticos, a matemática contemporânea e as mulheres da Matemática.

- *Cinema e História da Matemática*: entrelaços possíveis, de Romélia Mara Alves Souto. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

A autora discute relações possíveis entre o cinema e a História da Matemática, considerando que tais relações podem construir um ambiente favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento da criatividade de quem considera o cinema um agente de ideias plurais sobre História, Educação e Matemática.

- *Coleção História da Matemática para professores*

Com seus dois primeiros livros lançados em 2009, a coleção visa à divulgação e ao uso das produções acadêmicas provenientes de estudos e pesquisa na História da Matemática, agrupados nos seguintes tópicos: história dos problemas e conceitos matemáticos; história das relações entre Matemática, Ciências Naturais e Técnicas; biografias de matemáticos e educadores matemáticos; análise de fontes literárias.

A seguir, destacamos duas obras dessa coleção:

- *A descoberta do teorema de Pitágoras*, de Sofia Cardoso Marques. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

Neste livro, a autora descreve o resultado e as aplicações desse teorema em algumas civilizações antigas, contextualizando-o na cultura e nos conhecimentos dessas civilizações.

- *Matemática e medida*: três momentos históricos, de John A. Fossa (Org.). 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro contém aspectos histórico-epistemológicos importantes para o desenvolvimento de alguns conceitos em Matemática, como Medidas.

- *Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*

Esta coleção procura dar ao leitor uma visão abrangente da história da descoberta da Matemática. Está dividida em seis volumes, entre os quais destacamos:

- *Números e numerais*, de Bernard H. Gundlach. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1992.

- *Geometria*, de Howard Eves. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1992.

- *Trigonometria*, de Edward S. Kennedy. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1992.

Em cada volume é abordada a história da criação e desenvolvimento de um grande tema matemático. O volume é dividido em tópicos bastante curtos (de no máximo oito páginas), denominados cápsulas, nos quais é abordado algum assunto ligado ao tema. Assim, por exemplo, no volume sobre Geometria, existe uma cápsula contendo várias demonstrações do teorema de Pitágoras.

- *História concisa das matemáticas*, de Dirk J. Struik. 3ª ed. Lisboa: Gradiva, 1997.

Na obra, o autor, além de narrar fatos, datas e passagens da vida de matemáticos, procura relacionar o trabalho de cada um deles, relatando descobertas que aconteciam, concomitantemente, em lugares diferentes, privilegiando o caráter cultural da produção do conhecimento em Matemática.

- *História da Matemática em atividades didáticas*, de Arlete de Jesus Brito, Antonio Miguel e Dione Lucchesi de Carvalho. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

A obra tem como eixo principal o ensino da Matemática nos campos de Geometria, Trigonometria e números irracionais por meio de atividades nas quais a História da Matemática exerce um papel central, mostrando que ela pode ser uma grande aliada na reinvenção de uma didática em que o estudante assume uma postura mais ativa na produção de conhecimento.

- *História da Matemática*, de Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

Uma das obras mais consagradas, sendo referência para professores, estudantes de graduação e pós-graduação em Matemática. Nesta nova edição, destacamos dois novos capítulos: Legados do Século Vinte e Tendências Recentes, que discorrem, entre outros assuntos, sobre o Último Teorema de Fermat.

- *História da Matemática*, de Howard Eves. 1ª ed. Campinas: Unicamp, 2004.

Uma das mais completas obras na área de História da Matemática. Na introdução de alguns capítulos, encontramos um relato do panorama cultural e histórico da época em questão.

- *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, de Tatiana Roque. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

A autora lança um olhar crítico sobre como a História da Matemática vem sendo abordada nos últimos tempos, pretendendo derrubar a ideia de que a matemática é essencialmente abstrata e com uma estrutura rígida. A obra aborda diferentes “sistemas matemáticos”, desenvolvidos desde a Antiguidade até o século XIX, mostrando que práticas diversas sempre coexistiram, procurando soluções diferentes para problemas semelhantes.

- *História em Educação Matemática*: propostas e desafios, de Antônio Miguel e Maria Ângela Miorim. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

A obra aborda a história da Matemática, a história da Educação Matemática e de que maneira elas se relacionam. O próprio conceito de história é discutido na obra.

- *Matemática*: uma breve história, de Paulo Roberto Martins Contador. 4ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

A obra está organizada em três volumes: o volume I tem início nas descobertas mais primitivas do conhecimento humano, dos primórdios das civilizações à idade medieval; o volume II vai do Renascimento ao século XVIII; e o volume III aborda, de forma teórica atual, tudo o que foi visto nos dois primeiros volumes.

- *O último teorema de Fermat*, de Simon Singh. 1ª ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

O livro conta a história da busca épica para resolver um dos maiores enigmas da Matemática de todos os tempos.

- *Relatos de memórias* — A trajetória histórica de 25 anos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, de Nancy Campus Muniz. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

A obra visa à recuperação, preservação e difusão da trajetória da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

## Ensino e aprendizagem em Matemática e Educação Matemática

- *A arte de resolver problemas*, de George Polya. 2ª ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

O livro analisa métodos criativos de resolução de problemas, revela as quatro etapas básicas de uma resolução e sugere estratégias a serem desenvolvidas em sala de aula.

- *A resolução de problemas na Matemática Escolar*, de Stephen Krulik e Robert E. Reys, traduzido por Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Editora Atual, 1998.

A obra reúne 22 artigos do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) que poderão ajudar o professor a lidar com a resolução de problemas.

- Coleção Explorando o Ensino – Matemática. Disponível no *site* do MEC em: <portal.mec.gov.br/secretaria-de-educacao-basica/destaques?id=12583:ensino-medio>. Acesso em: 18 abr. 2016.

Trata-se de uma coletânea de artigos extraídos da *Revista do Professor de Matemática* (RPM), uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com o apoio da Universidade de São Paulo.

Na obra são apresentadas sugestões de abordagens contextualizadas, o uso de material concreto e uma grande variedade de situações cotidianas em que a Matemática se faz presente. Há artigos envolvendo a História da Matemática, Números, Geometria, Álgebra, ensino e crônicas. O professor tem a oportunidade de enriquecer as discussões em sala de aula, envolvendo e mobilizando os estudantes nas atividades de resolução de problemas.

São três volumes envolvendo assuntos geralmente abordados no Ensino Fundamental e Médio: volume 1 (dividido em 6 capítulos), volume 2 (dividido em 4 partes) e volume 3 (dividido em 6 capítulos).

- *Coleção Tendências em Educação Matemática*

A coleção é voltada para profissionais da área que buscam refletir sobre Educação Matemática, a qual está embasada no princípio de que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões. A coleção explora ainda tópicos do programa de Matemática que se transformam em novas tendências no Ensino Médio. O conselho editorial da coleção é formado por professores pesquisadores da Unesp e da UFMG e o coordenador da coleção é Marcelo de Carvalho Borba. Até o início de 2016, a coleção contava com quase 30 obras, entre as quais destacamos:

- *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos alunos, de Helena Noronha Cury. 2ª ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007.

A autora defende a ideia de que a análise de erros é uma abordagem de pesquisa e também uma possibilidade metodológica, se os estudantes forem levados a refletir e questionar as próprias soluções.

- *Informática e Educação Matemática*, de Marcelo de Carvalho Borba e Miriam Godoy Penteado. 5ª ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007.

Na obra, são apresentados exemplos de uso da informática com estudantes e professores através dos quais debatem-se temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa e outras questões epistemológicas e pedagógicas.

- *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*, de Vanessa Sena Tomaz e Maria Manuela Martins Soares David. 1ª ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2008.

Pensando em uma formação integral dos estudantes, os autores ressaltam a importância de tratar o Ensino da Matemática levando em conta contextos sociais e a visão interdisciplinar da relação ensino-aprendizagem.

- *Didática da resolução de problemas de Matemática*, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2005.

O livro mostra os objetivos, as etapas e o encaminhamento da resolução de problemas e apresenta os vários tipos de problemas existentes. A obra sugere ainda como propor enunciados e como conduzir os problemas em sala.

- *Educação em Ciências e Matemáticas*: debates contemporâneos sobre ensino e formação de professores, de Terezinha Valim Oliver Gonçalves, Francisco Cristiano da S. Macêdo e Fábio Lustosa Souza. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

Na obra, são apresentados e analisados resultados de pesquisa sobre a prática docente, abordagens metodológicas e formação de professores. O livro traz também textos que discutem a relação entre ciência, tecnologia e sociedade e os desafios da Educação Matemática (e científica) nas instituições de ensino no século XXI.

- *Educação Matemática*: da teoria à prática, de Ubiratan D'Ambrosio. 23ª ed. Campinas: Papirus, 2014.

O autor discute inovações na prática docente, propondo reflexões sobre o ensino de Matemática.

- *Educação Matemática*: pesquisa em movimento. Maria Aparecida Viggiani Bicudo e Marcelo de Carvalho Borba (Orgs.). 4ª ed. São Paulo: Cortez, 2012.

Esse livro é fruto dos trabalhos de investigação na área da Educação Matemática desenvolvidos por professores pesquisadores do programa de pós-graduação em Educação Matemática da Unesp, do campus de Rio Claro-SP. Divide-se em 16 capítulos, escritos por vários professores, que expõem suas ideias, dúvidas, questionamentos e relatos de experiências na área. São destaques do texto a diversidade de pensamento e da produção matemática

em uma série de contextos socioculturais, a compreensão dessa produção e seu efeito na ação de ensinar.

Em particular, no capítulo *Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas*, encontramos um levantamento histórico das reformas do ensino da Matemática no mundo e no Brasil e uma reflexão sobre ensinar Matemática por meio da resolução de problemas.

- *Educação Matemática*: uma (nova) introdução, organizado por Silvia Dias Alcântara Machado. 3ª ed. São Paulo: Educ, 2008.

Na obra, são mencionadas oito noções que introduzem o leitor no discurso pedagógico da Matemática.

- *Educar por competências*: o que há de novo?, de José Gimeno Sacristán e outros. 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2011.

Elaborada por educadores espanhóis e traduzida para o português, a obra apresenta discussões sobre a educação por competências, incluindo um capítulo destinado à avaliação de aprendizagens em um ensino centrado em competências

- *Elementos de didática da Matemática*, de Bruno D'Amore. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

A obra analisa várias abordagens da Educação Matemática e as principais propostas do pesquisador para a didática da Matemática.

- *Ensaios sobre a Educação Matemática*, de John A. Fossa. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

A obra traz vários capítulos ligados ao tema, entre os quais destacamos o uso da História da Matemática como um instrumento pedagógico.

- *Ensinando Matemática para adolescentes*, de Paul Chambers e Robert Timlin. 2ª ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

A obra traz sugestões de uso de recursos, planos de aula e discute como avaliar o progresso do estudante de maneira efetiva.

- *Etnomatemática:* elo entre as tradições e a modernidade, de Ubiratan D'Ambrosio. 5ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

Esta obra apresenta e discute a etnomatemática – teoria que concebe o ensino de Matemática levando em conta a realidade sociocultural do estudante, o ambiente em que vive e o conhecimento que traz de casa.

- *Fundamentos da didática da Matemática*, de Saddo Ag Almouloud. Curitiba: Editora UFPR, 2010.

Na obra, são analisados os fenômenos de ensino e de aprendizagem em Matemática num ambiente didático: um meio social concebido para o ensino.

- *Investigações matemáticas na sala de aula*, de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

Nesta obra, os autores portugueses propõem uma reflexão sobre atividades de investigação em Matemática, suas vantagens e dificuldades. Levantar conjecturas, refletir e formalizar conhecimentos são aspectos discutidos pelos autores, bem como os papéis de estudantes e professores em sala de aula.

- *Matemática e investigação em sala de aula*: tecendo redes cognitivas na aprendizagem, de Iran Abreu Mendes. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

A obra aborda de maneira direta e profunda a tendência metodológica de investigação no ensino de Matemática, "tecendo redes cognitivas na aprendizagem".

- *Matemática e língua materna*: análise de uma impregnação mútua, de Nilson José Machado. 6ª ed. São Paulo: Cortez, 2011.

Na obra é feita uma análise detalhada sobre a mediação da língua materna (a primeira que aprendemos) no ensino da Matemática, determinando, entre elas, uma relação de impregnação mútua, ao considerar os pontos comuns entre as funções que desempenham e também os pontos complementares nos objetivos que elas perseguem. Em particular, o autor exemplifica essa relação por meio da estruturação no estudo da Geometria.

- *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crenças na resolução de problemas, de Antoni Vila e Maria Luz Callejo. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2006.

Por meio de reflexões e relatos de práticas, o livro busca respostas a questões do tipo "Em que consiste realmente o saber resolver problemas?" ou "O que são crenças?".

- *Matemática*. Práticas pedagógicas para o Ensino Médio, de Estela Kaufman Fainguelernt e Katia Regina Ashton Nunes. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2012.

Os autores buscam incentivar o professor a procurar novas ideias para uso em sala de aula que o incentivem e também motivem os estudantes para a aprendizagem em Matemática no Ensino Médio.

- *Modelagem em Educação Matemática*, de João Frederico da Costa de Azevedo Meyer, Ademir Donizeti Caldeira e Ana Paula dos Santos Malheiros. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

O livro leva o leitor a refletir sobre aspectos da modelagem e suas relações com a Educação Matemática, destacando que, nesses processos, o estudante ocupa lugar central na escolha de seu currículo.

- *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira*: pesquisas e práticas educacionais, de Jonei Cerqueira Barbosa, Ademir Donizeti Caldeira e Jussara de Loiola Araújo. 1ª ed. Recife: SBEM, 2007.

A obra, escrita por 23 nomes de destaque no assunto, está dividida em 4 partes: aspectos teóricos da modelagem matemática; modelagem e prática de sala de aula; modelagem matemática e as tecnologias da informação e comunicação; modelagem matemática e formação de professores.

- *O Ensino da Matemática*: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas, de J. C. Sánchez Huete e J. A. Fernández Bravo. Porto Alegre: Penso, 2005.

O livro traz uma reflexão sobre diversos aspectos do ensino e da aprendizagem em Matemática. Alguns capítulos do livro têm relação direta com o sistema educacional espanhol. No entanto, na segunda metade do livro há um tratamento interessante dado à resolução de problemas e à construção do conhecimento em Matemática, incluindo uma explanação sobre os vários pontos de vista para a definição de um problema em Matemática, sob a ótica de diversos educadores e também dos estudantes.

- *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas, de Maria Aparecida Viggiani Bicudo (Org.). 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

O livro resulta, basicamente, dos trabalhos de reflexão e pesquisa em Educação Matemática do grupo da Unesp de Rio Claro-SP. Ele está dividido em cinco partes, a saber: Filosofia e Epistemologia na Educação Matemática; História da Matemática e Educação Matemática; Ensino e Aprendizagem na Educação Matemática; Formação de professores de Matemática; e Informática na Educação Matemática.

- *Práticas de modelagem matemática na Educação Matemática*, de Lourdes Maria Werle de Almeida, Jussara de Loiola Araújo e Eleni Bisognin. 1ª ed. Londrina: EDUEL, 2011.

As autoras descrevem experiências em sala de aula e resultados de pesquisas com modelagem matemática, destacando possibilidades de trabalho e convidando o leitor a repensar e construir novos significados para o ensino e a aprendizagem.

- *Tecnologias digitais e Educação Matemática*, de Marcelo C. Borba e Aparecida Chiari (Orgs.). 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

Ligados ao Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), os autores exploram a importância e o potencial das tecnologias digitais para educação e aprendizagens em Matemática.

## Avaliação

- *A avaliação da aprendizagem escolar*, de Celso Antunes. 10ª ed. Petrópolis: Vozes, 2012. (Coleção Na Sala de Aula)

A obra apresenta sugestões de práticas, expondo princípios e discutindo estratégias e modelos avaliativos.

- *As competências para ensinar no século XXI*: a formação de professores e o desafio da avaliação, de Philippe Perrenoud e Monica Gather Thurler. 1ª ed. São Paulo: Penso, 2002.

O livro traz ao leitor os textos nos quais os autores suíços Perrenoud e Thurler apoiaram suas falas na vinda ao Brasil, em 2001, em conferências que contavam com a participação dos educadores brasileiros Lino de Macedo, Nilson José Machado e Cristina D. Allessandrini.

- *Avaliação como apoio à aprendizagem*, de Margarita Ballester et al. 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2003. (Coleção Inovação Pedagógica)

Nesse texto é possível encontrar reflexões e propostas sobre temas de avaliação para o professor recriar seu cotidiano pedagógico.

- *Avaliação das aprendizagens*: sua relação com o papel social da escola, de Claudia de Oliveira Fernandes. 1ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 2014.

Na obra, a autora defende a ideia de que os processos atuais avaliativos nas escolas brasileiras são, em geral, baseados em concepções quantitativas de conhecimento e não diferem, essencialmente, de práticas "antigas". Nesse sentido, ela propõe outro olhar à avaliação, desafiando os docentes a abandonar o "velho conhecido".

- *Avaliação de aprendizagem na escola*: estudos e proposições, de Cipriano Carlos Luckesi. 22ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 2011.

A obra é constituída por alguns artigos escritos pelo autor, que posicionam a avaliação como um ato seletivo e inclusivo, que possibilita questionar ações passadas e gerar ações futuras.

- *Avaliação desmistificada*, de Charles Hadji. 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2001.

A obra é uma detalhada reflexão sobre a essência da avaliação, a qual, segundo o autor, está dividida em duas partes: compreender e agir.

- *Avaliação em Matemática*: história e perspectivas atuais, de Wagner Rodrigues Valente. 1ª ed. Campinas: Papirus, 2015.

A obra aborda a cultura das práticas avaliativas, os formadores dos professores de Matemática e suas práticas, a história escolar da avaliação, entre outros.

- *Avaliação em Matemática:* pontos de vista dos sujeitos envolvidos na Educação Básica, de César Augusto do Prado Moraes. 1ª ed. Jundiaí: Paco, 2012.

O livro investiga as concepções de avaliação em Matemática na Educação Básica, analisando também os processos avaliativos usados pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e pelo Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp).

- *Avaliação escolar*: vários enfoques e uma só finalidade, melhorar a aprendizagem, de Adriana Patrício Delgado et al. 1ª ed. Jundiaí: Paco, 2015.

O livro busca trazer parte da produção acadêmica sobre avaliação, contribuindo para a formação docente.

- *Avaliação*: novos tempos, novas práticas, de Edmar Henrique Rabelo. 7ª ed. Petrópolis: Vozes, 2007.

O livro discute as profundas transformações no sistema educacional e seus impactos sobre a avaliação.

- *Avaliar para conhecer, examinar para excluir*, de Juan Manuel Álvarez Méndez. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2002. (Coleção Inovação Pedagógica)

No texto, o autor destaca a importância da avaliação nos processos de aprendizagem, desde que colocada a serviço do conhecimento. Caso a avaliação seja limitada à prova, ela pode atuar como um instrumento de exclusão.

- *Educação*: competência e qualidade, de Nilson José Machado. 2ª ed. São Paulo: Escrituras, 2010. (Coleção Ensaios Transversais)

O autor convida a uma reflexão sobre a formação na Educação Básica, o significado da qualidade no terreno educacional e as competências a serem desenvolvidas.

## Recursos educacionais digitais

O portal principal da coleção $M^3$ Matemática Multimídia, disponível em <m3.ime.unicamp.br> (Acesso em: 21 mar. 2016), contém recursos educacionais em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp. Os recursos podem ser buscados pelas mídias: experimentos, vídeos, *softwares* ou áudios; ou pelos temas centrais: análise de dados e probabilidade, geometria e medidas ou números e funções. Vamos conhecer um pouco mais dessas mídias:

**Experimentos**: São atividades práticas e instigantes em que se constrói algum conceito. Esses experimentos contam com um roteiro metodológico para o professor, uma folha de acompanhamento para os estudantes, entre outros. Destacamos três experimentos para exemplificação:

- *A altura da árvore*, que introduz, experimentalmente, o conceito de tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo, além de propor atividades práticas para medir ângulos e determinar a altura de objetos.

- *Baralhos e torradas*, experimento no qual são apresentados dois jogos envolvendo o conceito de probabilidade condicional. Os estudantes deverão tomar decisões nesse contexto.

- *Escoamento de areia*, que trata de razões e proporcionalidade.

**Vídeos**: Há uma grande variedade de vídeos que duram, em média, dez minutos cada e que podem ser utilizados como um recurso metodológico diferenciado na sala de aula. Os vídeos abordam assuntos estudados no Ensino Médio por meio de situações, ficções e contextualizações. Os vídeos são ricos em representações gráficas que dão suporte ao conteúdo. Além disso, neles são mostrados pequenos documentários que trazem informações interdisciplinares. Alguns vídeos deixam, propositadamente, algumas questões em aberto para o espectador refletir.

Cada vídeo é acompanhado do guia do professor. Na obra, são sugeridos vários desses vídeos para o estudante.

Destacamos a seguir alguns desses vídeos:

- *De malas prontas*: uma passageira está prestes a embarcar e não consegue colocar todas as roupas na mala. Um funcionário da companhia aérea vai ajudá-la usando o princípio fundamental da contagem.

- *Alice e a lei dos cossenos*: narra o sonho da jovem Alice sobre a demonstração da lei dos cossenos (é apresentada uma demonstração diferente da que aparece nesta coleção).

- *Salvador, o hipocondríaco*: ao ler a bula de um medicamento, o personagem Salvador depara com conceitos importantes ligados à função exponencial, como o de meia-vida.

Em geral, os vídeos apresentam uma linguagem informal e compatível com a faixa etária dos estudantes de Ensino Médio, podendo ser usados em vários contextos:

- como introdução de um assunto (ou atividade) que será apresentado na sequência: por exemplo, o vídeo *A Cartomante* pode servir de motivador para o estudo dos agrupamentos em Análise Combinatória. Já o vídeo *A loira do banheiro* envolve ideias de criptografia e pode ser apresentado antes da *atividade 3: Matrizes*, que o professor encontra nos comentários específicos do volume 2.

- como complemento de conteúdos: o vídeo *Lembranças de Sofia*, em que se discutem o planejamento de um experimento e a amostragem em Estatística.

- como objeto da História da Matemática: um exemplo é o vídeo *Esse tal de Bhaskara*, que apresenta a trajetória histórica dos processos de resolução de equações do 2º grau.

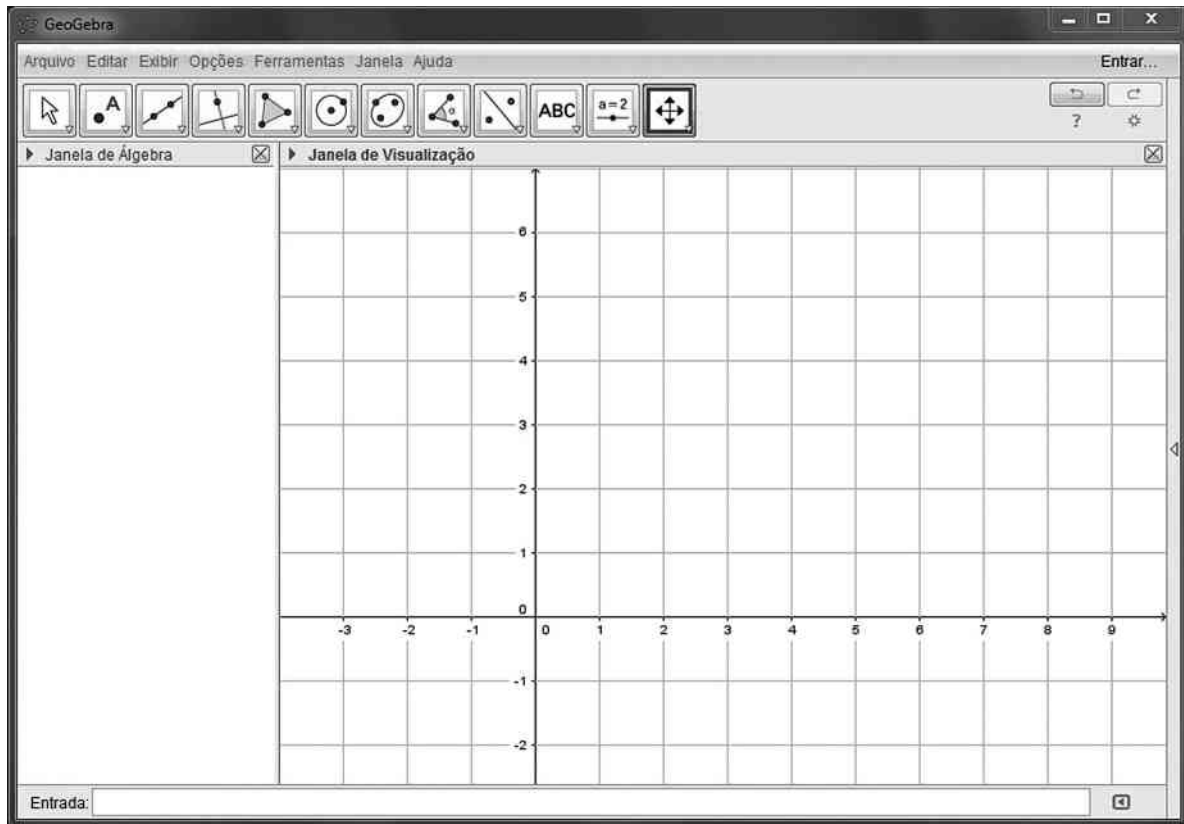
- como instrumento de avaliação, em que o professor encontra nos arquivos (pacote completo) sugestões de atividades que podem ser aplicadas antes ou depois da exibição dos vídeos.

## Sugestões de *softwares* de Matemática

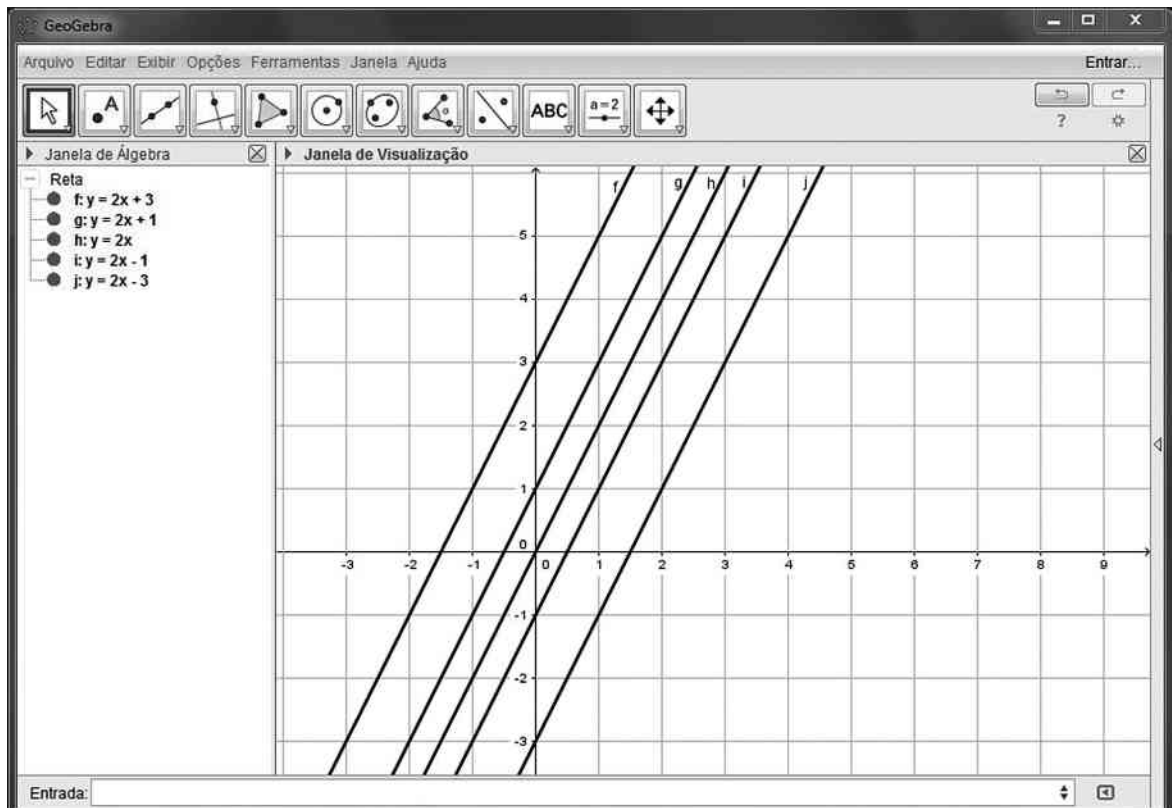
Destacamos a seguir três *softwares* gratuitos que podem ajudar o professor a dinamizar e diversificar as suas estratégias em sala de aula. Dois deles foram utilizados na coleção: o GeoGebra, no estudo de funções nos volumes 1 e 2 e no traçado de cônicas, no volume 3, e o Graphmática, no estudo das funções polinomiais no volume 3.

### GeoGebra

Este *software* pode ser utilizado no trabalho com funções, geometria plana e analítica. Está disponível para instalação em: <www.geogebra.org/download>. Acesso em: 21 maio 2016.

No estudo das funções, por exemplo, o traçado dos gráficos das funções elementares (afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica etc.) pode ser facilmente executado, a partir da janela "entrada", como mostra a reprodução da tela a seguir. Basta digitar a lei da função (por exemplo, y = 3x + 1 na função afim; y = x ^ 2, em que a tecla ^ é usada para potenciação, representando a função $y = x^2$; y = abs(x), para a função modular $y = |x|$ e assim por diante).

GEOGEBRA

Uma atividade que propomos, por meio do GeoGebra, é a elaboração de gráficos de várias funções a partir de uma delas. Por exemplo, a partir da função $y = 2x$, podemos construir os gráficos das funções $y = 2x + k$, com $k \in \mathbb{R}$. Podemos visualizar os gráficos gerados a partir de alguns valores de **k**.

GEOGEBRA

Além de visualizar a translação vertical, cria-se espaço para a compreensão dos coeficientes (angular e linear) das retas obtidas.

- Ao perceberem que as retas do feixe $y = 2x + k$ são paralelas, fica estabelecido que o coeficiente angular dessas retas mantém-se constante e determina a inclinação comum a todas essas retas.
- Ao perceberem que a reta de equação $y = 2x + k$ intersecta o eixo das ordenadas em $(0, k)$, fica estabelecido o papel do coeficiente linear (**k**).

Várias outras possibilidades de trabalho com funções podem ser realizadas com o GeoGebra. Citamos alguns exemplos:

- a construção do gráfico da função exponencial e de sua inversa (a função logarítmica) no mesmo plano cartesiano permite reconhecer a simetria existente entre esses gráficos em relação à reta $y = x$;
- a construção do gráfico da função definida por $y = x^2$ e $y = x^2 + k$, com $k \in \mathbb{R}$; a construção dos gráficos da "família" de parábolas do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$;
- a construção do gráfico de funções modulares, com translação vertical ($y = |x| + k$, a partir do gráfico de $y = |x|$) e horizontal ($y = |x + k|$, a partir do gráfico de $y = |x|$). Lembre que deve ser usado abs(x) para indicar o módulo de **x**;
- a construção do gráfico de funções exponenciais do tipo $y = a^x + k$ ($0 < a$, $a \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}$).

Na Geometria Analítica, destacam-se possibilidades de trabalho com o plano cartesiano, distâncias, perímetro e área de polígonos, pontos notáveis do triângulo, paralelismo e perpendicularidade.

No livro *Aprendendo Matemática com o GeoGebra*, de Jorge Cássio Costa Nóbriga e Luís Cláudio Lopes de Araújo (Brasília: Exato, 2010), encontramos várias propostas de utilização do GeoGebra, em linguagem simples e direta.

### Winplot

É um programa usado para elaborar gráficos de funções, definidas em certo intervalo a partir de suas leis. Seu funcionamento é relativamente simples; há opções de ajuda em todas as partes. Este *software* está disponível para instalação em: <math.exeter.edu/rparris/peanut/wppr32z.exe>. Acesso em: 21 mar. 2016.

Sugerimos usá-lo na construção de gráficos de funções usualmente estudadas no Ensino Médio: função afim, quadrática, modular (esse *software* usa abs(x) para representar o módulo de **x**), exponencial, logarítmica e as funções trigonométricas (o número real $\pi$ deve ser digitado como "pi").

### Graphmática

Similar ao Winplot, este *software* possui uma tabela de pontos $(x, y)$ que é automaticamente preenchida à medida que é colocada a lei da função $y = f(x)$ cujo gráfico se pretende construir. Este *software* está disponível para instalação em: <www.graphmatica.com/>. Acesso em: 21 mar. 2016.

## Sugestões de revistas

- *Educação Matemática em revista*

É uma publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) que aborda assuntos de interesse para o professor e pesquisador de Matemática. Até o final de 2015 já haviam sido publicadas 47 revistas. Para os interessados, é possível conseguir mais informações no *site* <www.sbembrasil.org.br>. Acesso em: 21 mar. 2016.

- Revista *Carta na Escola*

Lançada em 2006, a revista é uma publicação dirigida a educadores do Ensino Médio. São artigos, reportagens e sugestões de temas para discussões em sala de aula. Embora não exista uma seção específica para a Matemática em cada exemplar, é possível extrair boas ideias para a sala de aula. Acessando o *site* <www.cartaeducacao.com.br> (acesso em: 21 mar. 2016), pode-se conhecer um pouco mais da revista, em sua versão *on-line*.

- *Revista do Professor de Matemática* (RPM)

É uma publicação destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Encontramos relatos de experiências em sala de aula, problemas que suscitam questões pouco conhecidas, uma nova abordagem de um assunto, entre outros. Além dos artigos há as seções: Problemas, O leitor pergunta, Livros, Cartas do leitor e Painéis.

Até o início de 2016, já haviam sido publicadas quase 90 revistas. No *site* <www.rpm.org.br>, o leitor encontrará informações mais detalhadas.

- Revista *Nova Escola*

A revista auxilia o educador na complexa tarefa de ensinar. Há reflexões e artigos sobre temas atuais de educação, bem como propostas e relatos de atividades em sala de aula. No *site* <revistaescola.abril.com.br> (acesso em: 21 mar. 2016), é possível conhecer um pouco mais sobre a revista, incluindo os planos de aula de Matemática para alunos do Ensino Médio, blogues, vídeos, jogos etc.

- *Revista Pátio* – Ensino Médio, Profissional e Tecnológico

Essa revista tem periodicidade trimestral e faz parte dos periódicos publicados pelo Grupo A. Nela são discutidos temas variados e atuais em Educação, incluindo temas diversificados com enfoque interdisciplinar. Para mais informações, acesse <www.grupoa.com.br/revista-patio>. Acesso em: 21 mar. 2016.

## Sugestões de *sites*

- *Associação de Professores de Matemática (Portugal)*

Disponível em: <www.apm.pt>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* da Associação de Professores de Matemática de Portugal. Há textos para reflexão, propostas de atividades, recursos educativos, que direcionam a atividades variadas em Matemática e *softwares* para *download*, publicações etc.

- *Banco Internacional de Objetos Educacionais*

Disponível em: <objetoseducacionais2.mec.gov.br>. Acesso em: 22 abr. 2016.

*Site* do Banco Internacional de Objetos Educacionais, com quase 20 000 objetos (recursos digitais) em vários formatos de arquivo e de acesso público. Há diversas opções de recursos, como animação/simulação, áudio, hipertexto, imagem, *softwares* educacionais ou vídeos. Esses objetos podem ser acessados isoladamente na seção Modalidade de Ensino, ou por meio das seções a seguir: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação Profissional e Educação Superior.

- *Educação Matemática e Tecnologia Informática* (Instituto de Matemática – UFRGS)

Disponível em: <turing.mat.ufrgs.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

O *site* Educação Matemática e Tecnologia Informática apresenta material que usa a tecnologia da informática no âmbito da educação matemática escolar.

Na opção *Software* são listados aplicativos que podem auxiliar o trabalho com Geometria, Álgebra e Funções, além de *softwares* recreativos. Na opção Atividades, encontramos propostas de trabalho que fazem uso desses *softwares*. O *site* também apresenta uma relação de *links* que oferecem possibilidades de trabalho, bem como artigos sobre o Ensino de Matemática.

- *iMática*

Disponível em: <www.matematica.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

O iMática (A Matemática Interativa na Internet) é um *site* mantido por professores e estudantes do IME-USP. É composto de quatro seções:

– História da Matemática (é possível encontrar bons textos, seja por uma linha do tempo, biografia ou por tópicos);

– Problemas-desafios (geralmente relacionados à seção Problemas da Revista do Professor de Matemática (RPM);

– Programas (é possível encontrar *softwares* gratuitos, voltados ao ensino e à aprendizagem em Matemática, entre eles o iGeom, de geometria dinâmica, o iGraf, de funções, e o iHanoi, que trata do problema da Torre de Hanói);

– Cursos (é possível encontrar centros que oferecem cursos à comunidade interna e externa da USP).

- *Laboratório de Educação Matemática (UFC)*

Disponível em: <www.ledum.ufc.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* do laboratório de Educação Matemática da UFC. Na opção Produtos, são disponibilizados trabalhos de conclusão de curso, dissertações, trabalhos em congressos, entre outros.

- *Laboratório de Ensino de Matemática (UFMG)*

Disponível em: <www.mat.ufmg.br/~lem>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* do laboratório de Ensino de Matemática da UFMG. Apresenta propostas de jogos e atividades, bem como um amplo acervo, com publicações em assuntos variados, como resolução de problemas, Educação Matemática, lógica etc.

- *Laboratório de Ensino de Matemática (Unicamp)*

Disponível em: <www.ime.unicamp.br/lem>. Acesso em: 18 abr. 2016.

*Site* do laboratório de Ensino da Matemática da Unicamp (IMECC – Unicamp). Há indicações de cursos, seminários, eventos e publicações que incentivam o aperfeiçoamento de professores da Educação Básica. Na seção Publicações, encontramos artigos sobre temas que podem contribuir para a formação de professores, como a história do conceito de função, a prática avaliativa nas salas de aula de Matemática e o que é Etnomatemática. Na seção Jornal do Professor de Matemática, há sugestões de leitura e atividades para a sala de aula.

- *Laboratório de Matemática – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Unesp)*

Disponível em: <www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat>. Acesso em: 18 abr. 2016.

No *site* é possível encontrar ideias de jogos para o ensino da Matemática desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

Há também a seção intitulada Eureka, que é aberta à comunidade geral e discute a resolução de problemas.

A seção Artigos apresenta publicações recentes relacionadas ao ensino e à aprendizagem em Matemática; já a seção História da Matemática destaca a vida de grandes matemáticos e suas contribuições ao desenvolvimento dessa ciência.

- *Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino (UFF)*

Disponível em: <www.lante.uff.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

No *site* da Universidade Federal Fluminense há informações e detalhes sobre a especialização em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, na modalidade a distância. O curso é inteiramente gratuito e tem como objetivo apresentar recursos para o Ensino da Matemática, introduzir novas tecnologias e instrumentar o professor para o ensino de Matemática nos níveis fundamental e médio.

- *Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências (UFRJ)*

Disponível em: <www.limc.ufrj.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

*Site* do laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências da UFRJ. Apresenta diversos materiais para uso em sala de aula, incluindo um *software* de geometria dinâmica (o Tabulae Colaborativo).

- *Olimpíada Brasileira de Matemática*

Disponível em: <www.obm.org.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* oficial da Olimpíada Brasileira de Matemática, sob responsabilidade do Impa (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), situado no Rio de Janeiro. Estão disponíveis para *download* as provas com gabaritos de vários anos da OBM, nos diversos níveis (nível 1: 6º e 7º anos; nível 2: 8º e 9º anos; nível 3: Ensino Médio e nível universitário) e fases (1ª, 2ª e 3ª). O grau de dificuldade aumenta à medida que se avança a fase. Pode ser uma interessante fonte para o trabalho com resolução de problemas, ainda que muitas questões apresentem um elevado grau de dificuldade.

- *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*

Disponível em: <www.obmep.org.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

Nesse *site* é possível obter as provas resolvidas das edições anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Além disso, há um extenso e variado banco de questões, separadas por níveis (nível 1: 6º e 7º anos; nível 2: 8º e 9º anos; e nível 3: Ensino Médio). É uma excelente oportunidade para o professor promover o hábito de resolver problemas na sala de aula.

O *site* também conduz a um canal chamado Portal de Matemática OBMEP, onde são disponibilizadas videoaulas com professores selecionados, voltadas para estudantes e professores, além de conteúdos interativos, vídeos e materiais que podem ser baixados. O acesso é livre e gratuito.

- *Revista Nova Escola*

Disponível em: <revistaescola.abril.com.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

Nesse *site* são sugeridas aulas e atividades diferenciadas na seção Planos de aula. Os planos são divididos por segmentos (Educação Infantil, Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio) e por área de conhecimento (Ciências da Natureza e Matemática). Na Matemática do Ensino Médio, os assuntos encontram-se divididos em três blocos: Álgebra, Geometria e Análise de dados. As atividades são desenvolvidas a partir de matérias de revistas, estabelecendo um elo entre a Matemática e as notícias do cotidiano. Além disso, o *site* permite que você compartilhe sua opinião sobre os planos de aula com outros colegas de profissão, por meio de redes sociais. O *site* contém ainda uma grande variedade de artigos sobre educação: gestão escolar, planejamento e avaliação, formação, políticas públicas, inclusão, criança e adolescente.

- *Sociedade Brasileira de Educação Matemática*

Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>. Acesso em: 18 abr. 2016.

No *site* da Sociedade Brasileira de Educação Matemática existe o calendário atualizado de concursos e eventos da área de pesquisa em Educação Matemática. Há indicação de eventos regionais, nacionais e até internacionais.

Também estão listados grupos de pesquisa de universidades em todo o Brasil e laboratórios de Educação Matemática de todas as regiões.

Na opção Biblioteca em Educação Matemática, há uma vasta bibliografia com publicações recentes na área. Você também tem acesso a vários grupos de trabalho (GTs) e pesquisa reunidos pela SBEM.

## Sugestões de livros paradidáticos

As coleções seguintes podem servir de base para relembrar alguns conceitos estruturantes do Ensino Fundamental.

- *Aprendendo a matemática com o GeoGebra*, de Luís Cláudio Lopes de Araújo e Jorge Cássio Costa Nóbriga. 1ª ed. São Paulo: Exato, 2010.

Os autores, buscando superar as limitações do uso da lousa (quadro e giz), procuraram escrever um livro autoinstrutivo voltado para o estudante para que ele possa desenvolver, de maneira independente, as construções. Caberia, então, ao professor, a partir da manipulação das figuras, auxiliar o estudante na formulação de conjecturas, conclusões e justificativas.

No volume 1 da coleção, o livro pode auxiliar os estudantes nas aprendizagens em Geometria Plana (teorema de Tales, teorema de Pitágoras, áreas, função afim e função quadrática); e, no volume 2, na aprendizagem da trigonometria em triângulos quaisquer.

- *Coleção Pra que serve Matemática?*

Essa coleção busca responder à clássica pergunta dos estudantes em qualquer assunto: "Pra que isto serve?". Por meio de exemplos do cotidiano, de jogos e de aplicações, os autores procuram responder à pergunta clássica em cada um dos seguintes temas:

- *Álgebra*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

- *Ângulos*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

- *Equação do 2º grau*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

- *Estatística*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2001.

- *Frações e números decimais*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

- *Geometria*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 16ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

- *Números negativos*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 21ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

- *Proporções*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 13ª ed. São Paulo: Atual, 2002.

- *Semelhanças*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 14ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

- *Coleção Vivendo a Matemática*

Essa coleção busca despertar o interesse pela Matemática por meio do conhecimento das ligações entre essa ciência e objetos ou fatos do cotidiano. Sugerimos os seguintes volumes:

- *Lógica? É lógico!*, de Nilson José Machado. 9ª ed. São Paulo: Scipione, 2006.

- *Medindo comprimentos*, de Nilson José Machado. 2ª ed. São Paulo: Scipione, 2000.

- *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*, de Nilson José Machado. 8ª ed. São Paulo: Scipione, 2000.

- *Semelhança não é mera coincidência*, de Nilson José Machado. 7ª ed. São Paulo: Scipione, 2006.

## Questões curiosas de Matemática, jogos e desafios de raciocínio quantitativo

- *A Matemática das coisas*: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas, de Nuno Crato (adaptação de Ruth Ribas Itacarambi). 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro mostra a Matemática como parte da vida do ser humano. Há 5 eixos no livro: coisas do dia a dia, a terra é redonda, coisas secretas, arte e geometria e coisas matemáticas. Com temas interessantes, desperta a atenção de professores e estudantes.

- *Alex no país dos números*: uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática, de Alex Bellos. 1ª ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

Viajando entre diferentes línguas e culturas, o autor investiga as propriedades do jogo Sudoku com seus inventores; conversa com um pesquisador francês especializado no raciocínio quantitativo de tribos indígenas na Amazônia; venera

um guru indiano responsável pelo legado mítico criador do zero; visita a escola japonesa em que professores e estudantes fazem cálculos imaginando o funcionamento de um ábaco; na companhia de um estatístico, aventura-se em um cassino de Nevada para tentar prever os acasos da fortuna; consulta um famoso numerólogo sobre o nome profissional que deve usar.

- *Conexões Matemáticas Educacionais*: aprendendo novas e explorando antigas, de Ruy Madsen Barbosa. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

Explorando "brincadeiras" com retângulos mágicos, quadrados "bem comportados", cubos e policubos, dominós, estabelecendo conexões com teoria dos números, análise combinatória etc., o livro oferece experiências significativas e prazerosas com a Matemática que podem ser usadas em sala de aula.

- *Enigmas, desafios, paradoxos e outros divertimentos lógicos e matemáticos*, de Dimas Monteiro de Barros. 1ª ed. Araçatuba: Novas Conquistas, 2003.

O livro traz uma série de problemas de raciocínio lógico não muito difíceis, acompanhados da resolução comentada. Pode ser uma boa opção para o início de um trabalho sistemático do exercício do raciocínio lógico com os estudantes.

- *Leonardo e a Matemática*, de Giorgio T. Bagani e Bruno D'Amore. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

O livro relata a Matemática nos tempos de Leonardo da Vinci e seu interesse por essa ciência.

- *Mania de Matemática 2*: novos enigmas e desafios matemáticos, de Ian Stewart. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

Nessa obra, há uma grande variedade de desafios, mistérios, paradoxos e quebra-cabeças, construídos em uma linguagem comum e acessível também a leitores não habituados com temas de Matemática.

Do mesmo autor, destacamos também: *Almanaque das curiosidades matemáticas*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

- *Matemática e Arte*, de Dirceu Zaleski Filho. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

O autor propõe aproximar a Matemática e a Arte no ensino, analisando e integrando a História da Matemática e a História da Arte e sugerindo novas possibilidades de trabalho em sala de aula.

- *Revisitando conexões matemáticas com brincadeiras, explorações e materiais pedagógicos*, de Ruy Madsen Barbosa. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

O autor elege objetos geométricos como pontos de partida para atividades e reflexões. O livro está estruturado em três partes: triângulos e recreações, materiais pedagógicos manipuláveis e miscelânea, apresentando situações-problema, atividades, recreações. Há conexões com a teoria dos grafos, expansões binomiais, geometria plana e espacial.

## Referências bibliográficas


ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da Matemática*. Curitiba: Editora UFPR, 2010.

BICUDO, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218. (Seminários & Debates)

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução por Elza F. Gomide. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*, Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

_____. *Ensino Médio Inovador*. Brasília, 2009. Disponível em: <portal.mec.gov.br/dmdocuments/ensino_medioinovador.pdf>. Acesso em: 10 maio 2016.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

CAMPOS, F. C. A. V.; SANTORO, F. M.; BORGES, M. R. S. A.; SANTOS, N. *Cooperação e aprendizagem on-line*. Rio de Janeiro: Dp&A, 2003. (Coleção Educação a Distância)

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2001. (Coleção Perspectiva em Educação Matemática)

FAZENDA, I. C. A. *Integração e Interdisciplinaridade no ensino brasileiro*: efetividade ou ideologia. São Paulo: Loyola, 2011.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MIORIM, M. A. *Introdução à História da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1999.

MORETTO, V. P. *Prova*: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. 9ª ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2010.

PARRA, C.; SAIZ, I. *Didática da Matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2009.

PERRENOUD, P. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

_____; THURLER, M. G. *Competências para ensinar no século XXI*: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artmed, 2002.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

TOMAZ, V. S. *Práticas de transferência de aprendizagem situada em uma atividade interdisciplinar*. Belo Horizonte: UFMG, 2007.

ZABALA, A. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

# COMENTÁRIOS ESPECÍFICOS

Neste volume, damos continuidade ao estudo da Trigonometria, iniciado no volume 1 da coleção, com as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Esse estudo está distribuído nos quatro primeiros capítulos do volume.

Os capítulos 5 e 6, ao tratarem de matrizes e sistemas lineares (incluindo um rápido estudo dos determinantes), enfocam basicamente a Álgebra deste volume da coleção.

O estudo da Geometria é feito em duas etapas. A primeira, no capítulo 7, na qual se faz um estudo intuitivo da Geometria espacial de posição. Na segunda etapa, nos capítulos 8 e 9, é feito um estudo detalhado dos sólidos geométricos.

O volume é encerrado com dois capítulos que abordam o eixo Estatística, contagem e probabilidade. A resolução de problemas permeia quase a totalidade desses capítulos. O capítulo 10 diz respeito à análise combinatória e, no último capítulo deste volume, é feito um estudo de probabilidade.

## Objetivos específicos

### Funções

Neste volume são apresentadas as funções trigonométricas, e os objetivos específicos desse estudo estão descritos a seguir.

- Reconhecer arcos, ângulos, congruências e simetrias na circunferência trigonométrica.
- Relacionar com correção as unidades de medida de arcos e ângulos, distinguir medida e comprimento de arco.
- Fazer a correta leitura, na circunferência trigonométrica, do seno, do cosseno e da tangente (quando existir) de um número real.
- Generalizar as relações fundamentais ($\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$) estudadas no triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica.
- Resolver problemas envolvendo medidas de lados e ângulos de triângulos acutângulos e obtusângulos, bem como outros problemas de Geometria Plana.
- Usar a lei dos senos, a lei dos cossenos e a trigonometria do triângulo retângulo para resolver problemas diversos, como os de distâncias impossíveis de serem medidas diretamente.
- Estudar “as demais voltas” na circunferência trigonométrica e, a partir daí, definir as funções trigonométricas dadas por $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, bem como o conceito de período de uma função.
- Reconhecer que fenômenos periódicos naturais (mudança das marés, por exemplo) podem ser modelados, de forma aproximada, por funções trigonométricas.
- Construir, ler e interpretar gráficos de funções trigonométricas definidas por $y = a + b \cdot \text{sen } (mx)$ e $y = a + b \cdot \cos (mx)$, com **a**, **b** e **m** constantes reais.
- Compreender, com auxílio de *softwares* computacionais de Matemática, as alterações no gráfico de funções do tipo $y = a + b \cdot \text{sen } (mx)$ à medida que se modificam os valores de **a**, **b** e **m**.
- Determinar o período, o domínio e o conjunto imagem de funções trigonométricas.

### Álgebra

O eixo de Álgebra é retomado neste volume com a apresentação de matrizes e sistemas lineares, cujos objetivos estão listados a seguir.

- Compreender e usar a linguagem matricial de apresentação de dados em uma tabela.
- Efetuar a adição e a subtração de matrizes, bem como a multiplicação de uma matriz por um número real.
- Multiplicar matrizes, estabelecendo as condições de existência do produto.
- Determinar a inversa de uma matriz, relacionando-a também à resolução de equações do tipo $A \cdot X = B$.
- Relacionar as propriedades operatórias da adição e da multiplicação de números reais às propriedades operatórias válidas para a adição e multiplicação de matrizes.
- Reconhecer algumas aplicações de matrizes relacionadas às transformações geométricas bidimensionais e às imagens digitais.
- Identificar equações lineares, bem como suas soluções.
- Resolver, classificar e interpretar geometricamente um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.
- Reconhecer sistemas lineares e representá-los na forma matricial.
- Resolver e classificar sistemas lineares com três equações e três incógnitas utilizando o método do escalonamento.
- Reconhecer a regra prática para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 e de ordem 3 no contexto da análise de um sistema linear, por meio de seus coeficientes.
- Calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e de ordem 3.
- Relacionar a classificação de um sistema linear (com número de equações igual ao número de incógnitas) ao determinante da matriz de seus coeficientes.
- Reconhecer e resolver sistemas homogêneos.

### Geometria

Em relação ao eixo da Geometria, citamos os seguintes objetivos.

- Abstrair os conceitos de ponto, reta e plano, valendo-se de objetos reais e também do espaço físico da sala de aula.
- Conhecer os postulados principais da Geometria Euclidiana Espacial.
- Diferenciar definições de preposições e postulados.
- Compreender, por meio de algumas demonstrações, o método lógico-dedutivo da Geometria.
- Reconhecer posições relativas entre retas, entre retas e planos, e entre planos, utilizando, para ilustração, sempre que necessário, objetos do cotidiano e o próprio espaço físico da sala de aula.
- Reconhecer projeções ortogonais.
- Conceituar distância entre dois pontos, entre ponto e reta, entre retas paralelas, entre ponto e plano, entre reta e plano paralelos, entre planos paralelos e entre duas retas reversas.
- Reconhecer as características principais de poliedros e corpos redondos e identificar as planificações de suas superfícies.

- Calcular áreas da superfície e volumes dos principais sólidos geométricos.
- Reconhecer a importância do princípio de Cavalieri na dedução das fórmulas dos volumes dos principais sólidos.
- Reconhecer sólidos semelhantes e estabelecer a razão de semelhança (entre elementos lineares, entre áreas e entre volumes) na resolução de problemas.
- Reconhecer unidades de medidas de superfície e volume; transformar unidades de medidas de uma mesma grandeza.
- Integrar o estudo das funções polinomiais do 1º e do 2º grau ao volume de alguns sólidos, recordando conceitos estruturantes, como o de proporcionalidade.

### Estatística, contagem e probabilidade

Neste volume, os objetivos específicos deste eixo estão relacionados, principalmente, a contagem e probabilidade.

- Utilizar o princípio fundamental da contagem (ou princípio multiplicativo) na resolução de problemas.
- Utilizar o diagrama da árvore para analisar possibilidades e compreender a estrutura multiplicativa do princípio fundamental da contagem.
- Reconhecer e diferenciar os principais agrupamentos simples (permutação, arranjo e combinação).
- Calcular as quantidades de permutações, arranjos e combinações na resolução de problemas.
- Resolver problemas envolvendo permutações com elementos repetidos.
- Reconhecer fenômenos de natureza aleatória.
- Conceituar espaço amostral e evento de um experimento aleatório.
- Utilizar a frequência relativa para definir a probabilidade de ocorrência de um evento.
- Calcular probabilidades em espaços amostrais finitos equiprováveis.
- Reconhecer situações em que o espaço amostral não é equiprovável.
- Utilizar as técnicas de contagem como um recurso a mais na resolução de problemas de probabilidade.
- Calcular a probabilidade da união e interseção de dois eventos.
- Resolver problemas de probabilidade condicional, com a redução do espaço amostral.
- Reconhecer eventos independentes e resolver problemas relacionados a esses eventos.

## Sugestões de abordagem, avaliação e tópicos principais

### Trigonometria e funções

Para apresentar a circunferência trigonométrica, será necessário revisar e aprofundar alguns conceitos, como o de arco e sua medida (em graus) e o de comprimento de circunferência, bem como construir novos conceitos, como o de radiano.

Antes de iniciar o estudo da circunferência trigonométrica, sugerimos que se desenvolva com os estudantes a *atividade 1: Trigonometria – Medindo distâncias inacessíveis*, descrita nas *Sugestões de atividades em grupo*, nestas Orientações Didáticas. Nela há uma proposta na qual o estudante vivenciará a importância da Trigonometria na medição de distâncias inacessíveis, relacionando arcos de circunferência e também triângulos retângulos. O infográfico sobre as distâncias inacessíveis e o criativo método de Eratóstenes para estimar a medida do raio da Terra, na seção *Aplicações* – capítulo 1 (Medindo distâncias inacessíveis), pode ser o ponto de partida para as discussões.

Sugerimos o trabalho com a circunferência trigonométrica em duas etapas: 0 a $2\pi$ (1ª volta) e, depois que o estudante adquirir certa familiaridade, estender para $\mathbb{R}$ ("demais voltas", em qualquer sentido). Entenda-se por familiaridade o estudante já fazer a correta leitura do seno, do cosseno e da tangente de um número real **x** (ou de um arco de medida x rad), com $0 \leqslant x < 2\pi$; reconhecer simetrias e regularidades na circunferência; reduzir corretamente ao primeiro quadrante etc.

Fazendo-se a extensão para $\mathbb{R}$, é o momento propício para introduzir as funções seno e cosseno, bem como o conceito de período de função.

Recomendamos que o estudo das funções trigonométricas seja feito com o auxílio de *softwares* livres de matemática (no livro-texto optamos pelo GeoGebra), o que pode enriquecê-lo em vários aspectos:

- A visualização da periodicidade dessas funções: muitas vezes, na lousa da sala de aula, ficamos restritos à representação de um único período da função.
- As modificações observadas no gráfico da função $y = \text{sen } x$ (ou $y = \cos x$) quando:
  - adicionamos a sen x uma constante real ($y = \text{sen } x + k$); e altera-se o conjunto imagem;
  - multiplicamos sen x por uma constante real não nula ($y = k \cdot \text{sen } x$) e altera-se o conjunto imagem e/ou o "formato" do gráfico. Se $k = -1$, por exemplo, as imagens de cada **x** são as opostas das imagens de **x** pela senoide;
  - multiplicamos a variável real **x** por uma constante real não nula ($y = \text{sen }(kx)$) e altera-se o período da função, provocando-se uma "compressão" ou "expansão" do gráfico.

Por fim, na construção dos gráficos sem o uso de *softwares*, alertamos para o cuidado na escolha da unidade de medida, especialmente na marcação de valores no eixo das abscissas.

O estudo das funções trigonométricas deve ser priorizado, em relação ao "treinamento" algébrico de simplificação de expressões, identidades e equações envolvendo as funções trigonométricas.

Como atividade especial sugerimos a leitura e análise do texto sobre o movimento de uma roda-gigante, na seção *Aplicações* – capítulo 4 (A trigonometria e a roda-gigante), com a mediação do professor e, para os professores que desejam ampliar a discussão, sugerimos a *atividade 2: A roda-gigante e os movimentos periódicos,* apresentada nestas Orientações Didáticas no item *Sugestões de atividades em grupo*, que trata do mesmo assunto.

Outra possibilidade é a atividade em grupo da seção *Troque ideias* – capítulo 4 (A trigonometria e o fenômeno das marés) na qual os estudantes modelam fenômenos naturais (movimento das marés) aproximadamente periódicos usando funções trigonométricas.

Entre os capítulos da construção da circunferência trigonométrica e das razões, que conduzem ao estudo das funções trigonométricas, intercalamos um capítulo que conduz à Geometria: a trigonometria nos triângulos acutângulos e obtusângulos, com o estudo da lei dos senos e da lei dos cossenos. Nesse capítulo, o estudante pode aplicar seus conhecimentos sobre os valores das razões trigonométricas de ângulos obtusos na resolução de problemas geométricos.

Além disso, na seção *Troque ideias* – capítulo 3 (Área de um triângulo) o estudante é convidado a deduzir a fórmula da área de um triângulo (conhecendo-se as medidas de dois lados e do ângulo por eles formado) e, em seguida, resolver alguns problemas.

## Álgebra

No início do estudo das matrizes, é interessante relacionar a representação matricial à organização de dados e informações em tabelas geralmente conhecidas pelos estudantes, tais como uma planilha eletrônica ou tabelas mostradas em jornais, revistas, internet etc. Em seguida, ao estudar as operações, a ênfase e o maior foco devem ser na multiplicação de matrizes, pois as outras (adição, subtração, multiplicação de números reais por matriz) são intuitivas, uma vez que essas operações, bem como as propriedades correspondentes, têm por base as operações entre números reais, já consolidadas nessa etapa da escolaridade. Para introduzir a multiplicação, sempre é válido contextualizar com alguma situação real para dar mais significado à determinação da matriz produto.

No estudo das propriedades da multiplicação deve ser destacada a não validade da propriedade comutativa. Uma aplicação interessante das matrizes no estudo das transformações geométricas (translação, rotação etc.) pode ser fonte de pesquisa e atividade diferenciada, e o texto apresentado na seção *Aplicações* – capítulo 5 (Computação gráfica e matrizes) pode ser o ponto de partida para esse trabalho.

Outra aplicação das matrizes que também pode ser fonte para um trabalho e uma avaliação diferenciados é seu uso na decodificação de senhas cujas técnicas são amplamente usadas em criptografia. No item *Sugestões de atividades em grupo*, nestas Orientações Didáticas, é apresentada a proposta de *atividade 3: Matrizes* que ilustra, de maneira acessível, como codificar (e depois decifrar) uma senha, conhecendo-se a matriz-chave. É também a oportunidade de mostrar uma aplicação da inversa de uma matriz.

O texto de *Aplicações* – capítulo 5 (Matrizes e imagens digitais) também pode servir de base para novas pesquisas.

Em seguida, deve-se partir para o estudo dos sistemas lineares, começando pela revisão da resolução e classificação de sistemas $2 \times 2$, bem como de sua interpretação geométrica. É uma boa oportunidade de se revisar também funções afim.

A ênfase principal do capítulo deve ser dada na resolução e classificação de sistemas $3 \times 3$, por meio do método do escalonamento, na resolução de problemas concretos que possam ser "traduzidos" por um sistema linear.

Sugerimos que os determinantes sejam apresentados a partir da classificação de um sistema $2 \times 2$, por meio de seus coeficientes, reproduzindo, de certa forma, o seu surgimento histórico. Desse modo, é recomendável focar apenas o cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e 3 para usá-los, nesse primeiro momento, na discussão do número de soluções de um sistema (com número de equações igual ao número de incógnitas).

## Contagem e probabilidade

Sugerimos que o professor inicie o trabalho nesses capítulos com o princípio multiplicativo (ou princípio fundamental da contagem) e invista um bom tempo nesse assunto. Os estudantes do Ensino Médio já tiveram contato com esse princípio, ainda que tenham trabalhado de maneira informal no Ensino Fundamental I e também no Ensino Fundamental II. Em um primeiro contato, os estudantes talvez não percebam a estrutura multiplicativa em problemas como: "De quantos modos Patrícia poderá vestir-se se estão disponíveis 3 blusas e 2 saias?", pois conseguem resolvê-lo usando outras estratégias, como representações, esquemas ou tabelas. À medida que se aumenta o número de opções de blusas e saias, fica mais evidente a necessidade da multiplicação. O chamado diagrama da árvore (ou diagrama de possibilidades) pode favorecer essa compreensão.

Em problemas do tipo "quantas placas de automóveis podem ser formadas com 3 letras e 4 algarismos, sem os repetir?", é impensável reproduzir o diagrama da árvore completo. Ainda assim, a reprodução parcial do diagrama ajuda o estudante a compreender a estrutura multiplicativa.

É preciso que os estudantes tenham, portanto, oportunidade para vivenciar uma boa quantidade e diversidade de problemas para que o uso desse princípio se solidifique.

Em seguida, é normal se deparar com a seguinte dúvida: Para estudar os agrupamentos simples (permutações, arranjos e combinações), qual é a melhor saída? Usar ou não as fórmulas? Acreditamos que não haja uma solução definitivamente melhor que a outra; a escolha deve ser livre. Se a opção for pelo uso das fórmulas, é imprescindível que elas sejam construídas, com compreensão, junto dos estudantes, usando o princípio multiplicativo, como consta no livro-texto. Nessa construção, fica mais fácil estabelecer a diferença entre agrupamentos ordenados e não ordenados, bem como a relação entre eles.

Por fim, é preciso lembrar que o fatorial de um número natural é apenas uma ferramenta de cálculo, não podendo se tornar um conteúdo à parte; portanto, o professor não deve investir muito na resolução de equações envolvendo fatoriais ou na simplificação de expressões complexas.

Com relação à probabilidade, a exemplo do princípio fundamental da contagem, o estudante do Ensino Médio já teve um primeiro contato no Ensino Fundamental e, em geral, possui uma ideia intuitiva para resolver problemas como: "Se lançarmos um dado não viciado, qual é a chance de sair a face 4?". Esse conhecimento prévio e intuitivo do estudante pode ser o ponto de partida para a construção de conceitos importantes, tais como experimento aleatório, frequência relativa, espaço amostral equiprovável e não equiprovável, evento e definição de probabilidade de ocorrência de um evento ("número de casos favoráveis/número de casos possíveis").

Muitos problemas de probabilidade podem ser resolvidos com essa definição, alguns deles usando as técnicas de contagem estudadas pela análise combinatória, mas, de modo algum, limitando-se a eles.

É importante que se complemente o estudo de probabilidade trabalhando com a união de probabilidades, probabilidade condicional (sem uso de fórmula, apenas com a restrição do espaço amostral), interseção de probabilidades e eventos independentes (este último, com aplicações importantes em Genética e também em muitos outros problemas).

É inevitável que o assunto loterias apareça nas discussões sobre probabilidade. A coleção dá subsídios para um trabalho detalhado e diferenciado, podendo, inclusive, constituir-se em um instrumento de avaliação em sala de aula.

Na seção *Troque ideias* – capítulo 11 (As chances na Mega-Sena), os estudantes, trabalhando em equipes, "desvendam" as possibilidades de combinações das dezenas da Mega-Sena e as probabilidades de acertos na sena, quina e quadra, com vários tipos de apostas.

Já no texto da seção *Aplicações* – capítulo 11 (Matemática, futebol e loteria) abre-se espaço para conhecer e discutir sobre as chances de acerto na loteca (antiga Loteria Esportiva).

Por fim, nas *Sugestões de atividades em grupo*, nestas Orientações Didáticas, há uma proposta de aprofundamento no tema "loterias" – *atividade 6: Loterias, análise combinatória e probabilidade* –, conhecendo-se, também, o jogo da lotomania.

## Geometria

Um pouco de Geometria Plana é visto dentro da Trigonometria, com o estudo da lei dos senos e da lei dos cossenos e do cálculo de área de triângulos acutângulos e obtusângulos, já explicados no eixo Funções.

O trabalho com a Geometria Espacial é iniciado com a geometria de posição. Sugerimos que se faça um trabalho informal e intuitivo no lugar de apresentar uma teoria com base em postulados, proposições, teoremas e demonstrações. Isso não exclui a possibilidade de se mostrar o método lógico-dedutivo no qual se apoia a Geometria. Para isso, apresentamos a demonstração de quatro importantes teoremas da geometria espacial, nos quais o estudante tem, mais uma vez, a oportunidade de compreender como a Matemática se estrutura como ciência.

Nas atividades, no entanto, não recomendamos que sejam cobradas demonstrações formais. Neste trabalho, é sempre válido levar para a sala de aula objetos (ou sólidos, se a escola dispuser de material) que possam auxiliar os estudantes na visualização e compreensão de conceitos.

Por exemplo, trazendo para a aula uma caixa de sapatos (ou alguma outra embalagem no formato de paralelepípedo retângulo, senão o próprio sólido), podemos imaginar: um par de retas paralelas e o plano por elas determinado; um par de retas concorrentes e o plano determinado por elas; retas reversas (em particular ortogonais também); planos paralelos; planos secantes e sua interseção etc. Os próprios conceitos primitivos da Geometria (ponto, reta e plano) também podem ser recordados no início dessa atividade.

Destacamos como pontos principais desse capítulo o estudo da posição relativa entre duas retas, entre reta e plano e entre dois planos. Outro ponto de destaque do capítulo é o estudo das projeções ortogonais de um ponto, de uma figura ou de uma reta sobre um plano.

No estudo dos sólidos geométricos, destacamos a importância da resolução de problemas que interajam com o mundo real, como a comparação do material necessário para confecção de duas embalagens distintas (cilíndrica e na forma de paralelepípedo, por exemplo), bem como de suas capacidades e respectivos preços. Alertamos também para o cuidado que se deve ter para não transformar as aulas e atividades de Geometria em um grande formulário para os estudantes decorarem. Vamos lembrar que muitas fórmulas da Geometria, como a da área lateral e total de poliedros e corpos redondos, podem ser facilmente construídas a partir das planificações de suas superfícies: por exemplo, no caso do cilindro reto, é fácil o estudante perceber que sua superfície lateral corresponde à superfície de um retângulo cujas dimensões são o comprimento da circunferência da base e a altura do cilindro.

Com relação ao volume, o primeiro passo é estabelecer um padrão (cubo unitário) e, nesse caso, vale a analogia com a unidade de medida de superfície: da mesma forma que podemos determinar a área do retângulo, a partir do padrão (quadrado unitário), podemos determinar o volume do paralelepípedo retângulo a partir do volume padrão, que é o cubo unitário. No livro-texto, é estudado o caso em que as arestas do paralelepípedo são números inteiros.

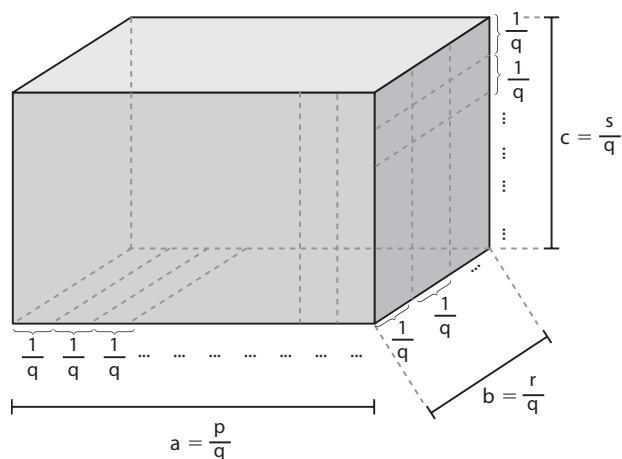
Vejamos a demonstração, baseada no livro de Elon Lages Lima, *Áreas e Volumes* da Coleção de Matemática Elementar (SBM), da fórmula do volume do paralelepípedo retângulo no caso em que suas dimensões são números racionais **a**, **b** e **c**. Se achar pertinente, o professor pode levar a demonstração para a sala de aula para aprofundamento.

**Demonstração:**

Podemos escrever **a**, **b** e **c** como frações de mesmo denominador. Assim, temos:

$$A = \frac{p}{q},\ b = \frac{r}{q} \text{ e } c = \frac{s}{q}$$

Tomemos a dimensão **a**. Vamos decompor as arestas de dimensão **a** em **p** partes iguais, cada uma com comprimento $\frac{1}{q}$; analogamente, cada aresta de dimensão **b** pode ser decomposta em **r** partes iguais, cada uma com comprimento $\frac{1}{q}$.

Também, cada aresta de dimensão **c** pode ser decomposta em **s** partes, cada uma com comprimento $\frac{1}{q}$.

Desse modo, o paralelepípedo retângulo ficou dividido em $p \cdot r \cdot s$ cubos idênticos, cada qual com aresta medindo $\frac{1}{q}$.

Considerando que o volume de um cubo cuja aresta é o número racional $\frac{1}{q}$ é igual a $\left(\frac{1}{q}\right)^3$ (veja a demonstração (*) logo a seguir), temos:

$$V_{paral.} = p \cdot r \cdot s \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^3 = \frac{p \cdot r \cdot s}{q^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{paral.} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{q} \cdot \frac{s}{q} = a \cdot b \cdot c$$

**Demonstração (*):**

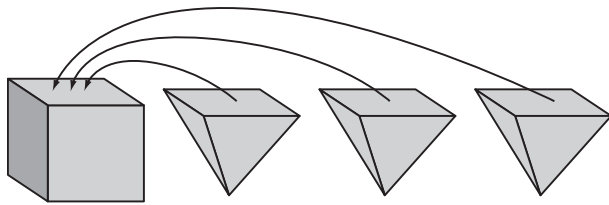
Vamos decompor cada aresta de um cubo unitário em um mesmo número inteiro **q** de partes iguais. Obtemos $q^3$ cubos justapostos, cada um com aresta de medida $\frac{1}{q}$.

Daí:

$$V_{cubo\ unitário} = q^3 \cdot V_{cubo\ de\ aresta\ 1/q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = q^3 \cdot V_{cubo\ de\ aresta\ 1/q} \Rightarrow V_{cubo\ de\ aresta\ 1/q} = \frac{1}{q^3}$$

Outra importante relação muitas vezes esquecida pelos estudantes e que pode ser lembrada por meio de uma atividade simples é mostrar, usando a embalagem de 1 litro de leite longa vida e fazendo as medições corretas de suas dimensões, a relação entre o litro e o $dm^3$ (e entre o litro e o $cm^3$): a capacidade declarada na embalagem deve corresponder aproximadamente ao volume do paralelepípedo a ser calculado, a saber, aproximadamente 1 000 $cm^3$ ou 1 $dm^3$.

O princípio de Cavalieri ajuda na obtenção das expressões dos volumes de outros sólidos. Vale também lembrar a possibilidade de realizar com os estudantes uma validação experimental da relação entre o volume de um prisma e o de uma pirâmide: basta tomar um prisma e uma pirâmide com bases congruentes e mesma altura. Em seguida, encher completamente a pirâmide com água e despejar o líquido no prisma. Será necessário encher a pirâmide mais duas vezes para completar totalmente o conteúdo do prisma. Dessa forma, é possível mostrar que o volume da pirâmide é a terça parte do volume do prisma.

Nesse momento vale a pena comentar que, na história da Matemática e das ciências em geral, muitas propriedades, cujas demonstrações só viriam a ser feitas séculos depois, já eram conhecidas empiricamente há muito tempo.

Por fim, como possibilidades de avaliação, lembramos que a comunicação oral do estudante pode ser explorada nos capítulos de Geometria, como já mencionamos e exemplificamos quando tratamos do tema Avaliação, na parte geral destas Orientações Didáticas.

## Orientações específicas para a seção *Troque ideias*

### Área de um triângulo (Capítulo 3)

Essa atividade tem por objetivos:

- Integrar a Trigonometria à Geometria.
- Levar o estudante a deduzir a fórmula para se calcular a área (**S**) da superfície de um triângulo: $S = \dfrac{a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}}{2}$, em que **a** e **c** são as medidas de dois lados do triângulo e $\hat{\mathbf{B}}$ é a medida do ângulo por eles formado.
- Aplicar a fórmula deduzida para resolver alguns problemas.

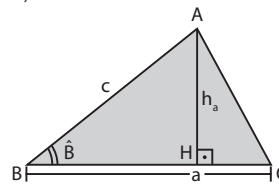
A competência de investigação e compreensão em Matemática pode ser desenvolvida nessa atividade à medida que o estudante estabelece relações, identifica regularidades, invariantes e transformações, e constrói uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos.

O roteiro da atividade conduz o estudante à dedução das fórmulas nos três casos (triângulo, acutângulo, obtusângulo e retângulo) com sugestões e encaminhamentos.

No caso em que ABC é um triângulo obtusângulo, o estudante deverá usar a relação $\text{sen } (180° - \hat{B}) = \text{sen } \hat{B}$; no caso em que $\hat{B} = 90°$, ($\text{sen } \hat{B} = 1$), a fórmula deduzida se reduz ao semiproduto das medidas dos catetos que, na verdade, nada mais é que o caso geral de cálculo da área do triângulo, tomando-se um dos catetos como base do triângulo e o outro cateto como a altura relativa a essa base.

**Solução:**

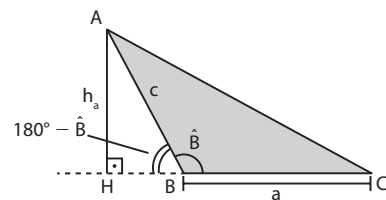
a)

$\triangle AHB$:

$\text{sen } \hat{B} = \dfrac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c \cdot \text{sen } \hat{B}$

Como área $= \dfrac{a \cdot h_a}{2}$, temos:

área $= \dfrac{a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}}{2}$

O professor pode comentar que, de maneira análoga, mostra-se que a área também pode ser dada por $\dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}}{2}$ ou $\dfrac{b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}$.

b)

Observe que $\overline{AH}$ é externa ao $\triangle ABC$;

$\triangle AHB$:

$\text{sen } (180° - \hat{B}) = \dfrac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c \cdot \text{sen } (180° - \hat{B})$

Como $\text{sen } (180° - \hat{B}) = \text{sen } \hat{B}$, temos: $h_a = c \cdot \text{sen } \hat{B}$

Por fim, área $= \dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}}{2}$

c) Se $\overline{AB}$ é a base e $\overline{AC}$ é a altura, então área $= \dfrac{c \cdot b}{2}$; os catetos de medida **b** e **c** formam um ângulo $\hat{A} = 90°$ e, como $\text{sen } 90° = 1$, escrevemos área $= \dfrac{c \cdot b \cdot \text{sen } 90°}{2} = \dfrac{c \cdot b \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}$.

d) i) $A = \dfrac{10 \cdot 5 \cdot \text{sen } 120°}{2} = 25 \cdot \text{sen } 120° = 25 \cdot \text{sen } 60° = 25 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 25 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $cm^2$

ii) A área destacada em laranja é igual à diferença entre a área do setor e a área do triângulo AOB.

Área do setor, em $cm^2$: $\dfrac{\pi \cdot 4^2}{8} = 2\pi$

Área $\triangle AOB$, em $cm^2$: $\dfrac{AO \cdot BO \cdot \text{sen } 45°}{2} = \dfrac{4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 45°}{2} = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

O valor procurado é $\left(2\pi - 4\sqrt{2}\right)$ $cm^2$.

### A trigonometria e o fenômeno das marés (Capítulo 4)

Essa é uma atividade de modelagem de um fenômeno aproximadamente periódico (movimento das marés) por meio de uma função trigonométrica.

Ela contribui para o desenvolvimento da competência de investigação e compreensão em Matemática na medida em que o estudante deve interpretar a situação proposta, utilizar e elaborar modelos e representações matemáticas

para analisar situações, além de compreender o mundo do qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações.

Inicialmente, os estudantes deverão determinar os valores das constantes **A**, **B** e **W** na lei $h(t) = A + B \cdot \cos(w \cdot t)$ (1). No livro-texto, são discutidas (com auxílio do GeoGebra) as alterações no gráfico da cossenoide quando consideramos funções do tipo $y = A \cdot \cos x$ ou $y = A + \cos x$ ou $y = A + B \cdot \cos(wx)$. Desse modo, espera-se que os estudantes concluam que:

- O período da função é 12 h; isso permite determinar o valor de **w**.
- O conjunto imagem da função é o intervalo [0,2; 2], cujos "extremos" são, respectivamente, a altura da maré baixa e a da maré alta.

Daí, em (1), temos: $A + B \cdot 1 = 2$ e $A + B \cdot (-1) = 0,2$; determinam-se os valores de **A** e **B**.

É interessante o professor levantar, em sala de aula, a seguinte questão:

Por que foi "sugerido" um modelo do tipo $A + B \cdot \cos(wt)$, e não $A = B \cdot \text{sen}(wt)$ (2), para representar a altura das marés?

A escolha da função cosseno deve-se ao fato de que, na tábua de marés do texto, a primeira medição ($t = 0$) corresponde à altura de uma maré alta. Assim, $t = 0 \Rightarrow h(0) = A + B \cdot \cos 0 = A + B$: maior valor possível para h(t); observe que $A > 0$ e $B > 0$, por hipótese.

Se tivéssemos usado a função seno, teríamos, em (2):

$h(0) = A + B \cdot \text{sen } 0 = A + 0 = A < A + B$

**Solução:**

a) As marés altas repetem-se de 12 em 12 horas, de 24 em 24 horas e de 36 em 36 horas, o mesmo ocorrendo com as marés baixas. Assim, o período de função é 12 horas.

Como $p = \frac{2\pi}{|w|}$, temos: $12 = \frac{2\pi}{|w|} \xRightarrow{w > 0} w = \frac{\pi}{6}$

b) $h(t) = A + B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Como $-1 \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leqslant 1$, para todo $t \geqslant 0$, temos que:

$h_{mín.} = A + B \cdot (-1) = A - B$

$h_{máx.} = A + B \cdot 1 = A + B$

Como as alturas das marés alta e baixa são, respectivamente, 2,0 m e 0,2 m, temos:

$\begin{cases} A + B = 2 \\ A - B = 0,2 \end{cases} \Rightarrow A = 1,1 \text{ e } B = 0,9$

c) A lei é: $h(t) = 1,1 + 0,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$

d)
- $t = 10$ s

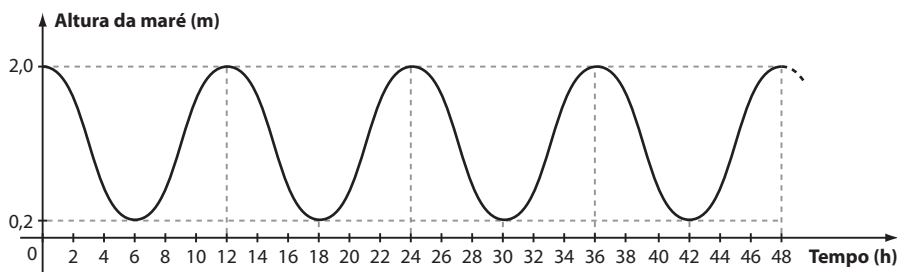
  $h(10) = 1,1 + 0,9 \cdot \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) = 1,1 + 0,9 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1,1 + 0,9 \cdot \frac{1}{2} = 1,55 \Rightarrow h(10) = 1,55$ m

- $t = 28$ s

  $h(28) = 1,1 + 0,9 \cdot \cos\left(\frac{28\pi}{6}\right) = 1,1 + 0,9 \cdot \cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)$

  Como $\frac{14\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$, temos:

  $h(28) = 1,1 + 0,9 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1,1 + 0,9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0,65 \Rightarrow h(28) = 0,65$ m $= 65$ cm

e)

## Os sistemas lineares e o balanceamento de equações químicas (Capítulo 6)

Normalmente, o assunto sistemas lineares é desenvolvido dentro do contexto da própria Matemática e a resolução de problemas ganha espaço quando um sistema linear é usado para "traduzir algebricamente" e resolver um problema cotidiano concreto, como os que aparecem no livro-texto.

Nessa atividade é mostrada uma interessante aplicação dos sistemas lineares à Química, no balanceamento de equações.

A atividade desenvolvida nessa seção contribui para o desenvolvimento das competências de investigação e compreensão e de representação e comunicação em Matemática. Ela demanda que o estudante seja capaz de perceber a relação entre a Matemática e outras áreas de conhecimento, além de reconhecer a conservação contida em toda igualdade,

ou seja, ao resolver o sistema linear por escalonamento, o estudante deve reconhecer que as operações usadas transformam a situação inicial em outra equivalente.

É importante que os estudantes percebam que, ao balancear uma equação química, os coeficientes usados são os menores números inteiros que fazem com que a quantidade de átomos de cada elemento químico envolvido seja a mesma nos reagentes e produtos, mas não os únicos – verifica-se que os sistemas obtidos, quando escalonados, são indeterminados. Não se pretende, com essa atividade, que os estudantes passem a balancear equações químicas usando sistemas (embora seja um método criativo é, em geral, trabalhoso), mas que eles reconheçam a presença da Matemática em outra área do conhecimento, por meio de uma "inusitada" aplicação.

Por fim, a atividade proporciona uma ótima oportunidade de trabalho com sistemas indeterminados que, em geral, são mais abstratos e menos intuitivos que os sistemas determinados e, assim, apresentam maior dificuldade de compreensão pelos estudantes.

**Solução:**

a) i) oxigênio (O): $11x + y = z + 2w$

ii) carbono (C): $12x = 2z + 2w$

iii) hidrogênio (H): $22x + 2y = 6z$

b) $\begin{cases} 11x + y - z - 2w = 0 \\ 12x - 2z - w = 0 \\ 22x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 11x + y - z - 2w = 0 \\ 12x - 2z - w = 0 \\ 22x + 2y - 6z - = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 11x + y - z - 2w = 0 \\ 12y + 10z - 13w = 0 \leftarrow 12 \cdot (1^{a}\text{ eq.}) + (-11) \cdot (2^{a}\text{ eq.}) \\ -4z + 4w = 0 \leftarrow (-2) \cdot (1^{a}\text{ eq.}) + (3^{a}\text{ eq.}) \end{cases}$

d) O sistema escalonado obtido é possível e indeterminado.

3ª equação: $z = w$

2ª equação:

$12y + 10w - 13w = 0 \Rightarrow 12y = 3w \Rightarrow y = \frac{w}{4}$

1ª equação: $11x + \frac{w}{4} - w - 2w = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 11x = \frac{11w}{4} \Rightarrow x = \frac{w}{4}$

A solução geral é $\left(\frac{w}{4}, \frac{w}{4}, w, w\right)$; $w \in \mathbb{R}$.

e) Se $w = 4$, temos que: $x = 1$, $y = 1$, $z = 4$ e $w = 4$.

A equação balanceada é:

$C_{12}H_{22}O_{11} + H_20 \rightarrow 4\ C_2H_5OH + 4\ CO_2$

f) i) $x\ C_6H_{12}O_6 \rightarrow y\ CO_2 + z\ C_2H_5OH$

C: $6x = y + 2z$

H: $12x = 6z$

O: $6x = 2y + z$

$\begin{cases} 6x - y - 2z = 0 \\ 12x - 6z = 0 \leftarrow (-2) \cdot (1^{a}\text{ eq.}) + (2^{a}\text{ eq.}) \\ 6x - 2y - z = 0 \leftarrow (-1) \cdot (1^{a}\text{ eq.}) + (3^{a}\text{ eq.}) \end{cases} \sim$

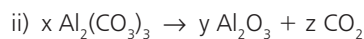
$\sim \begin{cases} 6x - y - 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 6x - y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

$y = z$

$6x - 3z = 0 \Rightarrow x = \frac{3z}{6} = \frac{z}{2}$

Se $z = 2$, temos $x = 1$ e $y = 2$.

$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2\ CO_2 + 2\ C_2H_5OH$

ii) $x\ Al_2(CO_3)_3 \rightarrow y\ Al_2O_3 + z\ CO_2$

Al: $2x = 2y$

C: $3x = z$

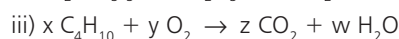
O: $9x = 3y + 2z$

$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 3x - z = 0 \\ 9x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -6y + 2z = 0 \\ -12y + 4z = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{z}{3} \Rightarrow x = \frac{z}{3}$

Se $z = 3$, obtemos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 3$

$Al_2(CO_3)_3 \rightarrow Al_2O_3 + 3\ CO_2$

iii) $x\ C_4H_{10} + y\ O_2 \rightarrow z\ CO_2 + w\ H_2O$

C: $4x = z$

H: $10x = 2w \Rightarrow 5x = w$

O: $2y = 2z + w$

$\begin{cases} 4x - z = 0 \\ 5x - w = 0 \\ 2y - 2z - w = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 4x - z = 0 \\ -5z + 4w = 0 \\ 2y - 2z - w = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 4x - z = 0 \\ 2y - 2z - w = 0 \\ -5z + 4w = 0 \end{cases}$

3ª equação: $z = \frac{4w}{5}$

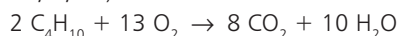
2ª equação: $2y - 2 \cdot \frac{4w}{5} - w = 0 \Rightarrow 2y = \frac{13w}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{13w}{10}$

1ª equação: $4x - \frac{4w}{5} = 0 \Rightarrow x = \frac{w}{5}$

A solução geral é $\left(\frac{w}{5}, \frac{13w}{10}, \frac{4w}{5}, w\right)$; $w \in \mathbb{R}$.

Se $w = 10$, obtemos a solução em que as incógnitas assumem os menores valores inteiros positivos: (2, 13, 8, 10).

$2\ C_4H_{10} + 13\ O_2 \rightarrow 8\ CO_2 + 10\ H_2O$

## A Matemática e as chuvas (Capítulo 9)

Essa proposta de trabalho, além de levar o estudante a compreender a medição e a determinação do índice pluviométrico (medida cada vez mais difundida nos meios de comunicação) e conhecer uma interessante aplicação da Geometria, tem por objetivo fazê-lo refletir e debater sobre temas vitais da sociedade, como o uso responsável e consciente da água, as secas em algumas regiões do Brasil e seus efeitos; as consequências da industrialização e do desmatamento no clima terrestre, de forma a proporcionar oportunidade para um trabalho interdisciplinar.

São muitas as competências que podem ser desenvolvidas com a aplicação dessa atividade. Entre elas, destacamos: a contextualização sociocultural em Matemática, ao levar o estudante a compreender a responsabilidade social associada à aquisição e ao uso do conhecimento matemático, bem como sua mobilização para diferentes ações, seja em defesa de seus direitos ou da qualidade de vida; a representação e a comunicação em Matemática, ao estimular o estudante a acompanhar e analisar os noticiários e artigos relativos à ciência em diferentes meios de comunicação.

Outra possibilidade de trabalho é a construção, pelos estudantes, de pluviômetros artesanais, feitos com garrafas PET, por exemplo, com o objetivo de medir o índice pluviométrico da região onde se encontra sua escola. Se julgar apropriado, o professor poderá consultar indicações e possibilidades de trabalho nos *sites* <portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1481> e <objetos educacionais2.mec.gov.br/handle/mec/21212> (Acessos em: 22 abr. 2016).

**Solução:**

a) Como 1 m corresponde a 1 000 mm, teríamos o nível de 0,025 m (25 ÷ 1 000 = 0,025). Note, então, que o volume de água de chuva "recolhido" na semana seria: $V = A_b \cdot h = (1\ m^2) \cdot (0{,}025\ m) = 0{,}025\ m^3$; como $1\ m^3$ equivale a 1 000 litros, teríamos 25 L.
Assim, uma chuva de 25 mm significa que, para cada metro quadrado na região, houve uma precipitação de 25 litros ao longo da semana.

b) $V = (1\ m^2) \cdot (1\ mm) = (1\ m^2) \cdot \left(\frac{1}{1\,000}\ m\right) = 0{,}001\ m^3 = 1\ L$

c) A área da abertura maior do funil é:
$\pi \cdot (5\ cm)^2 \simeq 78{,}5\ cm^2 = 78{,}5 \cdot 10^{-4}\ m^2$
$$\begin{cases} 0{,}3\ L \ — \ 78{,}5 \cdot 10^{-4}\ m^2 \\ x \ — \ 1\ m^2 \end{cases} \Rightarrow x \simeq 38{,}22\ L$$
Assim, houve precipitação de 38,22 litros de água de chuva em cada metro quadrado na região, o que equivale a dizer que a precipitação foi de 38,22 mm.

## O volume do cone e as funções (Capítulo 9)

A atividade tem por objetivo principal integrar os eixos Geometria e Funções, revisando também conceitos estruturantes, como o de proporcionalidade direta. Ela possibilita, ainda, ao estudante "construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada", contribuindo para o desenvolvimento da competência de investigação e compreensão em Matemática.

Embora a atividade faça parte do assunto cones, no capítulo sobre corpos redondos, a ideia central pode ser aplicada a outros sólidos. Por exemplo, para um cubo, o volume é diretamente proporcional à medida da altura, desde que, claro, não se altere sua base. Assim, considerando um recipiente cúbico, inicialmente vazio, que recebe água a uma vazão constante, se o nível (altura) que a água atinge dobrar, o volume de água contido no recipiente cúbico também dobra. Também, se representarmos em um gráfico cartesiano as grandezas volume (**V**) de água no cubo e tempo (**t**), obteremos uma reta que passa pela origem, pois, como a vazão é constante, **V** e **t** são diretamente proporcionais.

Já para o cilindro, como $V = \pi r^2 \cdot h$, temos:

- para uma base fixada, **V** é diretamente proporcional a **h**, pois $\frac{V}{h}$ é constante;
- para uma altura fixada, **V** é diretamente proporcional a $r^2$, mas não é diretamente proporcional a **r**. Assim, o gráfico de $V \times r$ é uma parábola, e não uma reta.

Raciocínios análogos aos anteriores serão usados pelos estudantes nessa atividade.

**Solução:**

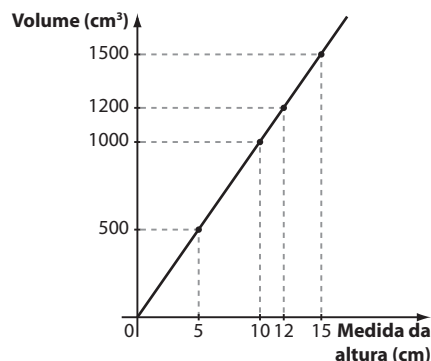
a) Modelo I: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 5 = \frac{500\pi}{3} \simeq 166{,}6\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow V \simeq 166{,}6\pi\ cm^3$

Modelo II: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 10 = \frac{1\,000\pi}{3} \simeq 333{,}3\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow V \simeq 333{,}3\pi\ cm^3$

Modelo III: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 12 = 400\pi \Rightarrow V = 400\pi\ cm^3$

Modelo IV: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 500\pi \Rightarrow V = 500\pi\ cm^3$

b) Sendo **r** constante, temos:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot h = \underbrace{\frac{100\pi}{3}}_{\text{constante } k} \cdot h$, isto é,
$V(h) = \frac{100\pi}{3} \cdot h$, ou seja, $V(h) = k \cdot h$, com **h** em cm e **V** em $cm^3$.
Trata-se de uma função linear ($y = k \cdot x$). Observe, nesse caso, que **V** e **h** são grandezas diretamente proporcionais: dobrando-se **h**, dobra-se **V**; triplicando-se **h**, triplica-se **V** etc.

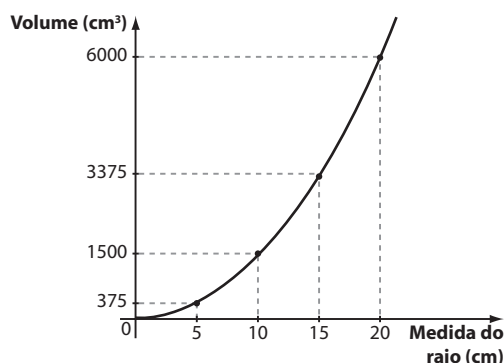
c) É importante que os estudantes recordem que, na função linear, a reta passa pela origem; para cada ponto da reta, o par ordenado correspondente (h, V) é tal que $\frac{V}{h}$ é constante ($h \neq 0$).

d) Modelo I: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 125\pi\ cm^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 125\pi\ cm^3$

Modelo II: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 500\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 500\pi\ cm^3$

Modelo III: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 15 = 1\,125\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 1\,125\pi\ cm^3$

Modelo IV: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 15 = 2\,000\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 2\,000\pi\ cm^3$

e) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 15 = 5\pi \cdot r^2$, isto é, $V(r) = 5\pi \cdot r^2$; trata-se de uma função quadrática ($y = 5\pi \cdot x^2$).
Nesse caso, $\frac{V}{r^2} = 5\pi$ é constante e **V** é diretamente proporcional ao quadrado de **r**. Assim, **V** e **r** não são diretamente proporcionais.

f) Pelo item *e*, sabemos que o gráfico da função que relaciona **V** e **r** é um arco de parábola no 1º quadrante (note que devemos ter $V > 0$ e $r > 0$).

### As chances na Mega-Sena (Capítulo 11)

O assunto loterias costuma despertar a atenção de todos, pois frequentemente ouvimos nos noticiários: "A Mega-Sena acumulou novamente. A previsão é que o próximo concurso chegue a 20 milhões". É natural que os estudantes, ao desenvolverem os conceitos de combinatória e probabilidade, queiram determinar as chances de ganhar algum prêmio. Esse contexto, aliás, é um terreno fértil para o desenvolvimento da competência de comunicação e representação em Matemática, já que o estudante deve ser capaz de analisar e julgar probabilidades de receber determinado prêmio em sorteio ou loterias, fazendo com que compreenda e emita juízos próprios sobre informações relativas à ciência e à tecnologia, de forma analítica e crítica, posicionando-se com argumentação clara e consistente sempre que necessário.

O cálculo mais simples é o da probabilidade de se acertar a sena com a aposta mínima. Para os cálculos das probabilidades de acerto na quadra e quina, nos itens *b* e *c*, há um raciocínio um pouco mais detalhado que pode ajudar as equipes a chegar aos resultados. Se necessário, o professor pode seguir o encaminhamento abaixo:

- Peça a alguém que descreva um determinado resultado do sorteio (por exemplo: 10, 20, 30, 40, 50, 60). Escreva na lousa (quadro de giz).
- Peça aos grupos que escrevam apostas mínimas que contenham exatamente uma quadra. Escreva algumas delas na lousa. Por exemplo: 5, 10, 20, 30, 38, 40 ou 1, 8, 10, 20, 50, 60.

Baseadas em "simulações", poderá ser mais fácil notar que as apostas premiadas com a quadra devem conter 4 entre os 6 sorteados e 2 entre os 54 restantes.

O item *d* apresenta raciocínio análogo aos anteriores, mas é importante que os estudantes façam os cálculos e constatem que a probabilidade de não se acertar número algum é alta (cerca de 51,6%). Para muitos, esse cálculo "derruba" a intuição e crença de que é "azarado aquele que não acerta número algum".

Nos itens *e* e *f* compara-se a aposta mínima (custo da aposta e chance de acertar a sena) a uma aposta em 8 dezenas e à aposta máxima, de 15 dezenas.

No último item, as equipes são convidadas a tomar uma decisão, buscando aumentar as chances de acerto na quina.

**Solução:**

a) O resultado do sorteio pode ocorrer de $\binom{60}{6} = 50\,063\,860$ modos distintos (observe que não importa a ordem em que os números são sorteados). Para acertar a sena, é preciso que os 6 números apostados coincidam com os 6 sorteados, havendo, assim, um único caso favorável. A probabilidade é $\frac{1}{50\,063\,860} \simeq 0{,}000002\%$.

b) É preciso acertar exatamente 4 dos 6 números sorteados e errar exatamente 2, isto é, em sua aposta deverão constar 4 das 6 dezenas sorteadas e 2 das 54 não sorteadas. Isso pode ocorrer de $\binom{6}{4} \cdot \binom{54}{2} = 21\,465$ maneiras distintas e a probabilidade é $\frac{21\,465}{50\,063\,860} \simeq 0{,}0428\%$ (aproximadamente 1 em 2 332).

c) Analogamente ao item *b*, é preciso acertar exatamente 5 dos 6 números sorteados e errar 1 entre os 54 não sorteados. A probabilidade é $\frac{\binom{6}{5} \cdot 54}{50\,063\,860} \simeq 0{,}00065\%$ (aproximadamente 1 em 154 518).

d) Para não se acertar qualquer dezena é preciso que sua aposta seja formada por 6 dentre os 54 que não serão sorteados. Isso pode ocorrer de $C_{54,\,6} = \binom{54}{6} = 25\,827\,165$ maneiras distintas e a probabilidade pedida é $\frac{25\,827\,165}{50\,063\,860} \simeq 0{,}5159 = 51{,}59\%$.

e) i) Uma aposta em 8 números contém $C_{8,\,6} = \binom{8}{6} = 28$ subconjuntos de 6 números, isto é, 28 senas.
ii) Sim; observe que $28 \cdot$ R\$ 3,50 = R\$ 98,00; na aposta mínima concorre-se com uma única sena e, na outra, com 28 senas, ou seja, a chance de acerto é 28 vezes maior.
iii) 1º modo:
O número de casos favoráveis é $28 \Rightarrow p = \frac{28}{\binom{60}{6}} \simeq$
$\simeq 0{,}0000559\%$ (aproximadamente 1 em 1 787 995).
2º modo:
Ao escolher os 8 números, o apostador deve escolher os 6 que serão sorteados (isso ocorre de maneira única) e outros 2 entre os 54 que não serão. Isso pode ser feito de $1 \cdot \binom{54}{2} = 1\,431$ maneiras distintas.
Como a escolha de 8 números quaisquer pode ser feita de $\binom{60}{8}$ maneiras distintas, a probabilidade é $\frac{1431}{\binom{60}{8}} \simeq$
$\simeq 0{,}0000559\%$.

f) Como em 15 números há $\binom{15}{6} = 5\,005$ subconjuntos de 6 números, isto é, 6 senas, a chave de acerto se torna 5 005 vezes maior.
O professor pode comentar que, em setembro de 2015, a aposta custava R\$ 17 517,50, que é igual a $5\,005 \cdot$ R\$ 3,50.

g) Ao optar por uma única aposta em 7 números, Aurélio estará concorrendo com $\binom{7}{5} = 21$ quinas;
Se fizer 7 apostas mínimas, ele poderá concorrer com $7 \cdot \binom{6}{5} = 7 \cdot \underbrace{6}_{\text{número de quinas em uma aposta mínima}} = 42$ quinas (esse é o número máximo possível, se nenhuma quina for repetida nos 7 jogos).
Assim, fazendo 7 apostas mínimas, ele aumenta a chance de acertar a quina.

## Sugestões de atividades em grupo

A seguir, são propostas sugestões de atividades que favorecem as interações aluno-aluno e aluno-professor, no intuito de dar continuidade às atividades propostas na seção *Troque ideias*, no livro-texto.

As atividades em grupo proporcionam aos estudantes:

- ouvir, discutir e refletir sobre a opinião dos colegas;
- respeitar as diferenças individuais quanto ao tempo de compreensão e à assimilação dos conteúdos;

- socializar diferentes pontos de vista e resoluções diversas para um mesmo problema e estabelecer consensos;
- promover situações de ajuda e de ensino-aprendizagem entre os colegas;
- dividir tarefas e responsabilidades;
- promover maior integração social.

Veja as sugestões a seguir para atividade em grupo.

## Atividade 1: Trigonometria – Medindo distâncias inacessíveis

### Objetivo

- Reconhecer a importância da Trigonometria na medição de distâncias impossíveis de serem medidas diretamente.

### Material

- Lápis, borracha, compasso (opcional) e papel sulfite.

**Número de aulas:** 2 a 3.

### Desenvolvimento

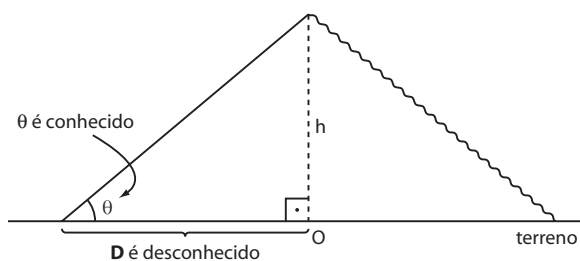
**1ª parte:**

O professor deve dividir a classe em grupos de 3 ou 4 estudantes e ler coletivamente o seguinte problema:

> Você está caminhando em um terreno plano e avista uma montanha. Deseja-se medir a altura dessa montanha. Os únicos materiais disponíveis são um moderno teodolito (aparelho usado para medir ângulos), uma trena e uma calculadora científica. Como proceder para obter a altura da montanha?

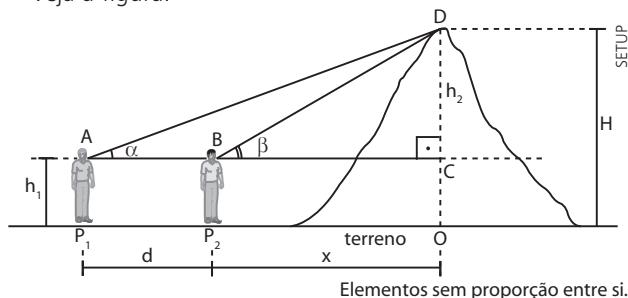
Deve-se disponibilizar o tempo necessário para os grupos discutirem a solução do problema.

Em seguida, é preciso verificar se há algum grupo disposto a socializar a resolução. Caso nenhum deles tenha chegado a uma conclusão consistente, o professor deve dar a pista seguinte:

> Mesmo que se chegue ao pé da montanha, não é possível determinar sua altura, ainda que se conheça a medida do ângulo em que se avista seu ponto mais alto, pois não conhecemos a distância do pé da montanha ao "centro" **O**. Imaginemos a reta perpendicular ao terreno, traçada pelo ponto mais alto da montanha, conforme a figura a seguir. O ponto **O** é a interseção dessa perpendicular com o traçado do solo.

A dica pode ajudar os estudantes a reconhecer a necessidade de se fazer medições em dois pontos, $P_1$ e $P_2$, arbitrários, entre os quais a distância pode ser medida com auxílio da trena.

**Solução:**

Veja a figura:

Elementos sem proporção entre si.

Em um ponto $P_1$ deve-se medir, com o teodolito, o ângulo de medida $\alpha$ em que se avista, a partir dos olhos do observador, o ponto mais alto da montanha.

Aproximando-se da montanha, deve ser estabelecida a posição de outro ponto $P_2$, no qual será realizada nova medição e se avistará o ponto mais alto sob um ângulo de medida $\beta$. Marcados os pontos $P_1$ e $P_2$, a distância (**d**) entre eles deve ser medida com auxílio da trena.

Seja **x** a distância entre $P_2$ e o ponto **O** (**x** é desconhecido). Temos:

$$\triangle BCD: \text{tg}\,\beta = \frac{h_2}{x} \Rightarrow h_2 = x \cdot \text{tg}\,\beta \quad (1)$$

$$\triangle ACD: \text{tg}\,\alpha = \frac{h_2}{d + x} \Rightarrow h_2 = \text{tg}\,\alpha \cdot (d + x) \quad (2)$$

De (1), temos: $x = \dfrac{h_2}{\text{tg}\,\beta}$ (3)

Substituindo (3) em (2) obtemos:

$$h_2 = \text{tg}\,\alpha \cdot \left(d + \frac{h_2}{\text{tg}\,\beta}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = d \cdot \text{tg}\,\alpha + \frac{\text{tg}\,\alpha \cdot h_2}{\text{tg}\,\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2\left(1 - \frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\beta}\right) = d \cdot \text{tg}\,\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{d \cdot \text{tg}\,\alpha}{\left(1 - \dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\beta}\right)} \Rightarrow h_2 = \frac{d \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}{(\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha)}$$

Como **d**, $\alpha$ e $\beta$ são conhecidos, com auxílio da calculadora obtemos os valores de $\text{tg}\,\alpha$ e $\text{tg}\,\beta$ e, em seguida, o valor de $h_2$.

Por fim, a altura (**H**) da montanha é obtida por $H = h_2 + h_1$, sendo $h_1$ a altura do observador.

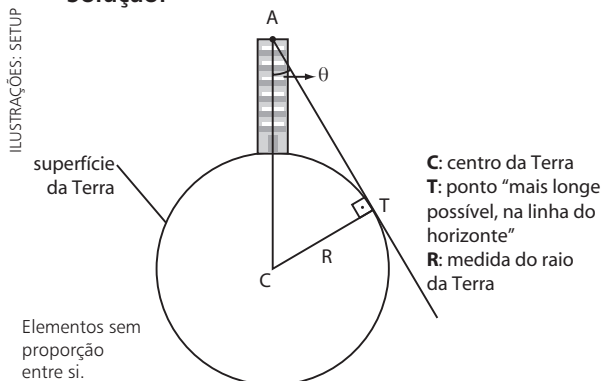
**2ª parte:**

- O professor deve ler com a turma o seguinte problema:

> Suponha que lhe seja dada a incumbência de estimar a medida do raio da Terra. Você está no topo de um arranha-céu cuja altura **h** é conhecida, dispõe de um moderno teodolito e uma calculadora científica. O que você faria? Como estimar, nessas condições, a medida do raio da Terra?

O professor deve disponibilizar algum tempo aos grupos, e, se necessário, oferecer a seguinte dica:

> Avistem, do topo do arranha-céu, a linha do horizonte, localizando um ponto **T**, o mais longe possível...

**Solução:**

Do topo do arranha-céu, de um ponto **A**, é possível avistar a linha do horizonte, em que **T** é o ponto de tangência da linha do horizonte com a circunferência. Com o auxílio do teodolito, medimos o ângulo θ que a reta vertical do edifício (reta $\overleftrightarrow{AC}$) forma com a reta que representa a linha do horizonte (reta $\overleftrightarrow{AT}$).

Lembrando que toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência, temos:

$\overleftrightarrow{CT} \perp \overleftrightarrow{AT}$, CT = R, AC = R + h e θ é conhecido, temos, no $\triangle$CTA:

$$\text{sen } \theta = \frac{CT}{AC} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{R}{R + h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \cdot \text{sen } \theta + h \cdot \text{sen } \theta = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \cdot \text{sen } \theta = R(1 - \text{sen } \theta) \Rightarrow R = \frac{h \cdot \text{sen } \theta}{1 - \text{sen } \theta}$$

Como **h** é conhecido e θ também (medido com o teodolito), obtemos com a calculadora o valor de sen θ e, em seguida, a estimativa para o raio **R** da Terra.

## Atividade 2: A roda-gigante e os movimentos periódicos

### Objetivos

- Complementar o texto sobre funções trigonométricas e movimentos periódicos, apresentado no capítulo 4 (*Funções trigonométricas*), na seção *Aplicações* (A trigonometria e a roda-gigante).
- Estudar o movimento de uma roda-gigante; reconhecer sua periodicidade; observar que um passageiro sentado em uma cadeira da roda-gigante atinge várias vezes uma determinada altura, à medida que são dadas voltas completas.
- Aprofundar o conceito de período de uma função, vinculando-o a uma situação concreta, mais próxima da realidade dos estudantes.
- Usar os conhecimentos de Trigonometria para determinar:
  - o deslocamento angular experimentado por uma cadeira da roda-gigante, de acordo com o tempo; a altura de uma cadeira, em relação ao solo, durante um instante qualquer do movimento da roda;
  - em que instantes o passageiro atinge certa altura etc.

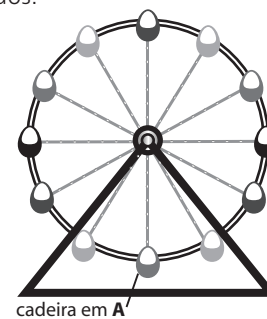
### Material

- Lápis, borracha, caneta, compasso (opcional para traçado das circunferências).

**Número de aulas:** 4.

### Desenvolvimento

Dividir a turma em duplas e distribuir para cada uma o texto seguinte:

> Imagine que uma roda-gigante gire com velocidade praticamente constante. Ela comporta 12 cadeiras, igualmente espaçadas ao longo de sua circunferência. Seu raio mede 10 m, e ela está fixa no solo por uma estrutura triangular de ferro, como mostra a figura a seguir. Suponha ainda que a distância do centro da roda ao solo seja de 11 m e que a roda complete uma volta em 24 segundos.
>
> 
> 

O professor deve dar o tempo necessário para que todos leiam com detalhes o texto e cada uma das questões a seguir.

1) Determine a medida do arco (ângulo) percorrido por uma cadeira em 1 segundo.

**Solução:**

Como em 24 segundos a roda dá uma volta completa, isto é, percorre 360°, então, por segundo, cada cadeira descreve um arco (ângulo) de medida:

$$\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ \left(\text{ou } \frac{2\pi}{24} \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}\right)$$

Depois, deve-se marcar a cadeira da roda-gigante que ocupa a posição de menor altura em relação ao solo (na figura, está assinalada a cadeira na posição **A**) e propor a seguinte questão:

2) Para cada instante de tempo, preencha as duas colunas em branco da tabela 1, correspondentes aos ângulos descritos pela cadeira e à altura em que esta se encontra em relação ao solo. A escolha de uma determinada cadeira (no caso em **A**) é arbitrária.

Considere: sen 60° ≃ 0,866; sen 45° ≃ 0,707.

Tabela 1

| Tempo (s) | Medida do arco percorrido pela cadeira **A** | Altura em relação ao solo (m) |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 2 | | |
| 4 | | |
| 6 | | |
| 12 | | |
| 18 | | |
| 20 | | |
| 24 | | |
| 27 | | |
| 36 | | |
| 39 | | |
| 40 | | |

**Solução:**

O preenchimento da 1ª coluna em branco da tabela é relativamente simples: basta lembrar que em 1 segundo uma cadeira percorre um ângulo de medida 15°. A partir daí é possível estabelecer uma proporção para cada um dos tempos (em segundos).

Para preencher a 2ª coluna em branco da tabela é importante observar inicialmente que, para instantes múltiplos de 6 (0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...), a cadeira se encontra em uma das extremidades **A**, **B**, **C** ou **D** da circunferência, como pode ser observado na figura a seguir:

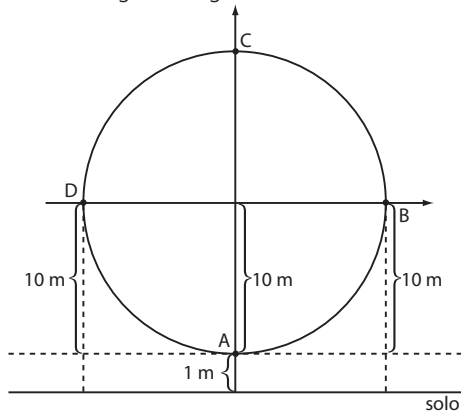
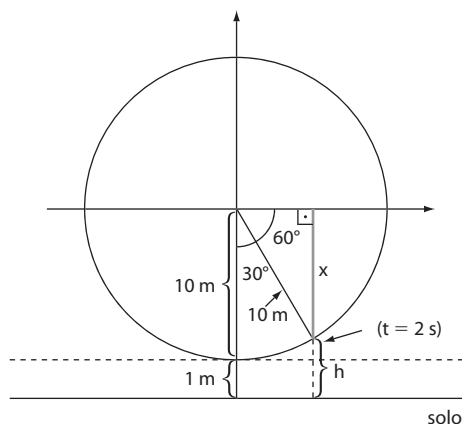



Tabela 2

| Tempo (s) | Posição | Altura em relação ao solo (m) |
|---|---|---|
| 0 | A | 1 |
| 6 | B | 11 |
| 12 | C | 21 |
| 18 | D | 11 |
| 24 | A | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Para outros instantes, pode-se adotar procedimento análogo ao que será mostrado a seguir para o instante t = 2 s.

Em 2 segundos, a cadeira descreve um ângulo de 30°.

$\text{sen } 60° = \dfrac{x}{10} \Rightarrow$

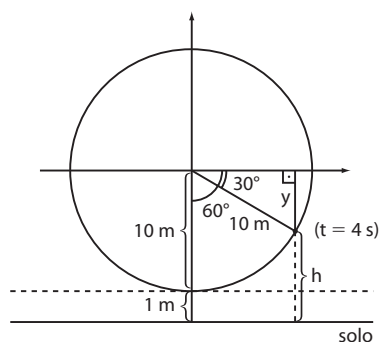
$\Rightarrow x = 10 \cdot \text{sen } 60° \simeq 10 \cdot 0{,}866 = 8{,}66 \Rightarrow x \simeq 8{,}66 \text{ m}$

A altura em que se encontra a cadeira é:

$h = 11 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 11 - 8{,}66 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 2{,}34 \text{ m}$

Para o instante t = 4 s, temos:

Em 4 segundos, a cadeira descreve um ângulo de 60°.

$\text{sen } 30° = \dfrac{y}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 10 \cdot \text{sen } 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5 \Rightarrow y = 5 \text{ m}$

A altura em que se encontra a cadeira 4 s depois do início do movimento é:

$h = 11 - y \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 11 - 5 \Rightarrow h = 6 \text{ m}$

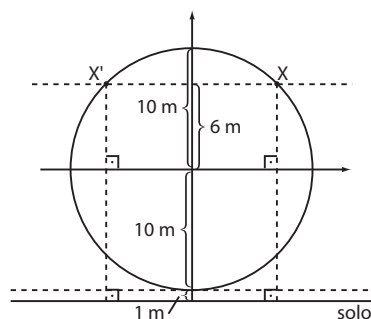
Repetindo o procedimento para os demais instantes da tabela 1, temos a tabela 3 preenchida.

Tabela 3

| Tempo (s) | Medida do arco percorrido pela cadeira A | Altura em relação ao solo (m) |
|---|---|---|
| 0 | 0° (ou 0 rad) | 1 |
| 2 | $30°\left(\text{ou } \frac{\pi}{6} \text{ rad}\right)$ | 2,34 |
| 4 | $60°\left(\text{ou } \frac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$ | 6 |
| 6 | $90°\left(\text{ou } \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right)$ | 11 |
| 12 | 180° (ou π rad) | 21 |
| 18 | $270°\left(\text{ou } \frac{3\pi}{2} \text{ rad}\right)$ | 11 |
| 20 | $300°\left(\text{ou } \frac{5\pi}{3} \text{ rad}\right)$ | 6 |
| 24 | 360° (ou 2π rad ) | 1 |
| 27 | $405°\left(\text{ou } \frac{9\pi}{4} \text{ rad}\right)$ | 3,93 |
| 36 | 540° (ou 3π rad) | 21 |
| 39 | $585°\left(\text{ou } \frac{13\pi}{4} \text{ rad}\right)$ | 18,07 |
| 40 | $600°\left(\text{ou } \frac{10\pi}{3} \text{ rad}\right)$ | 16 |

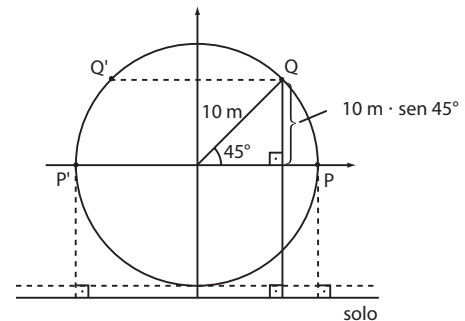
3) Imagine que um ingresso comprado para a roda-gigante dá direito a 5 voltas completas. Quantas vezes uma pessoa se encontra a 17 metros em relação ao solo?

**Solução:**

Não é necessário conhecer a lei da função que relaciona a altura com o instante para resolver essa questão. Basta lembrar que a altura máxima da cadeira em relação ao solo é 21 m. Em uma volta, a altura de 17 metros é atingida duas vezes, como mostra a figura:

Observe que de **X** (ou **X'**) ao solo temos:
(6 + 10 + 1) m = 17 m. Assim, em 5 voltas, a altura 17 m é atingida 10 vezes.

4) Um passageiro afirmou que, durante $\frac{1}{3}$ da trajetória circular da roda-gigante, a altura em que ele se encontrava superava 19 metros. Essa afirmação é verdadeira ou falsa?

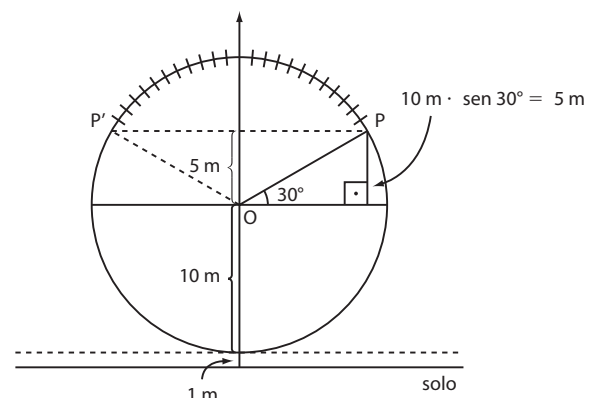
**Solução:**

Não é preciso conhecer a lei da função que relaciona a altura e o tempo para responder a essa questão.

Em **P** ou **P'**, a cadeira se encontra a 11 m do solo (em 50% da trajetória, o passageiro encontra-se a uma altura menor ou igual a 11 metros).

Em **Q** (ou **Q'**) a altura **h** da cadeira, em relação ao solo, é: (11 + 10 · sen 45°) m ≃ (11 + 10 · 0,707) m = 18,07 m. Isso implica que durante $\frac{3}{4}$ da trajetória da roda-gigante a altura do passageiro em relação ao solo é menor ou igual a 18,07 m. Desse modo, a afirmação de que durante $\frac{1}{3}$ da trajetória a altura em que se encontra um passageiro é maior que 19 metros é, evidentemente, **falsa**.

5) Considerando o tempo de uma volta completa da roda-gigante, pode-se afirmar que em $\frac{2}{3}$ desse tempo o passageiro sentado em uma cadeira qualquer se encontrava a não mais que 16 m do solo.

Essa afirmação é verdadeira ou falsa?

**Solução:**

Na região destacada na circunferência, o passageiro se encontrava a 16 m ou mais do solo.

Observe que med(POP') = 180° − 2 · 30° = 120°; o tempo necessário, em segundos, para percorrê-la é $\frac{120}{15} = 8$; como $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$, pode-se afirmar que em $\frac{2}{3}$ do percurso a altura não excedeu 16 m; portanto, a afirmação é **verdadeira**.

**Questão para aprofundamento**

6) Obtenha a lei da função trigonométrica para expressar a altura (**h**) da cadeira na posição **A** (em relação ao solo), em função do tempo (**t**), em segundos, de funcionamento da roda-gigante, considerando que um ingresso dá direito a cinco voltas completas. Assim, $t \in [0, 120]$. Esboce o gráfico de um período completo dessa função.

**Solução:**

Observe que:

$t = 0 \Rightarrow h = 1 = 11 - 10 \cdot \text{sen } 90° =$
$= 11 - 10 \cdot \text{sen } (90° - 0 \cdot 15°)$

$t = 2 \Rightarrow h = 11 - 10 \cdot \text{sen } 60° =$
$= 11 - 10 \cdot \text{sen } (90° - 2 \cdot 15°)$

$t = 4 \Rightarrow h = 11 - 10 \cdot \text{sen } 30° =$
$= 11 - 10 \cdot \text{sen } (90° - 4 \cdot 15°)$

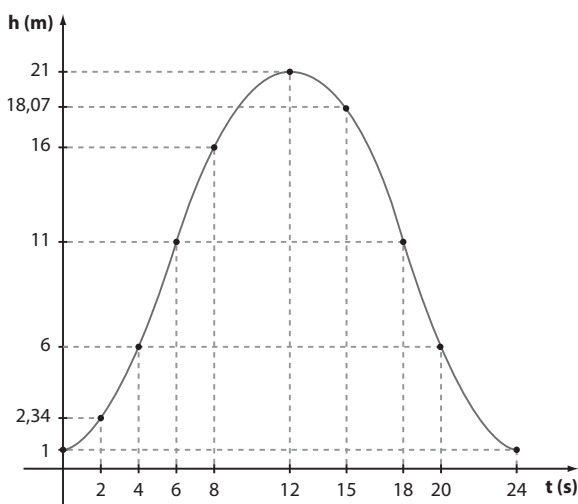
$t = 6 \Rightarrow h = 11 = 11 - 10 \cdot \text{sen } 0° =$
$= 11 - 10 \cdot \text{sen } (90° - 6 \cdot 15°)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$t = 12 \Rightarrow h = 21 = 11 - 10 \cdot \text{sen } \underbrace{270°}_{= \text{sen } (-90°)} =$
$= 11 - 10 \cdot \text{sen } (90° - 12 \cdot 15°)$

Generalizando, temos:
$h(t) = 11 - 10 \cdot \text{sen } (90° - t \cdot 15°)$
Mas $\text{sen } (90° - t \cdot 15°) = \cos (t \cdot 15°)$
Portanto: $h(t) = 11 - 10 \cdot \cos (15° \cdot t)$

Como $15° = \frac{\pi}{12}$, segue que $h(t) = 11 - 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$;

observe que o período dessa função é $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{12}\right|} = 24$ (24 s é o intervalo de tempo para uma volta completa da roda-gigante).

## Atividade 3: Matrizes

### Objetivos

- Reconhecer uma aplicação da inversa de uma matriz em um contexto cotidiano.
- Praticar a multiplicação de matrizes e a obtenção da inversa de uma matriz.
- Conhecer princípios básicos da criptografia.

### Material

- Lápis, borracha e folhas de papel sulfite.

**Número de aulas:** 2.

### Desenvolvimento

**1ª parte:**

O professor deve dividir a classe em grupos de até 3 estudantes e, em seguida, pedir a cada grupo que selecione uma senha de quatro algarismos (imagine que cada grupo represente um banco que precisa preservar as senhas de seus clientes).

Os estudantes devem formar uma matriz quadrada de ordem 2 a partir da senha escolhida, representando os dois primeiros algarismos na 1ª linha e os dois últimos na 2ª linha.

Por exemplo, com a senha 2509 podemos formar a matriz: $S = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Na lousa (quadro de giz) o professor deve escrever uma matriz $2 \times 2$ inversível; digamos: $X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

O professor deve explicar aos estudantes que essa matriz, chamada **matriz-chave** para decifrar códigos e senhas, só é conhecida pelo banco ou instituição responsável pela integridade e sigilo das informações de seus clientes.

Depois, os estudantes devem ser orientados a multiplicar **S** por **X**.

No nosso exemplo,

$S \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 12 \\ 36 & 18 \end{bmatrix}$

Essa matriz será chamada **matriz transmitida**.

O seguinte problema deve ser proposto aos estudantes:

> Como podemos recuperar a senha do cliente, se só conhecemos a matriz-chave e a matriz transmitida?

**Solução:**

Os estudantes deverão concluir que é preciso multiplicar, à direita de $S \cdot X$, pela inversa de **X**, ou seja, $X^{-1}$ a fim de obter, de volta, a matriz **S** e, consequentemente, recuperar a senha do cliente.

De fato: $(S \cdot X) \cdot X^{-1} = S \cdot (X \cdot X^{-1}) = S \cdot I_2 = S$

Assim, é preciso determinar, inicialmente, a inversa de **X**.

De $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, segue que:

$a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -2$ e $d = \frac{3}{2}$

Assim, $X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Devemos então multiplicar, à direita de S · X, por $X^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 26 & 12 \\ 36 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Portanto, a senha 2509 é recuperada.

**2ª parte:**

Nessa parte da atividade, os estudantes vão decodificar uma mensagem, utilizando o mesmo raciocínio da senha numérica anterior. Para isso, será necessário estabelecer uma correspondência entre as letras do alfabeto e os números, utilizando a seguinte convenção:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |

O espaço entre uma palavra e outra será identificado pelo número zero.

A mensagem a ser codificada é BOA PROVA. Ao final da atividade os grupos deverão obtê-la.

O professor deve anunciar aos grupos que a matriz-chave, nesse caso, é $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(Observação: Qualquer matriz 3 × 3 inversível pode ser tomada como matriz-chave. Quanto mais zeros possuir essa matriz, mais fácil ficará o cálculo de sua inversa.)

Por fim, o professor deve anunciar que a matriz transmitida é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 30 & -12 \\ 0 & 32 & 2 \\ 15 & 44 & -6 \end{bmatrix}$$

A partir da matriz transmitida e da matriz-chave, as equipes deverão decifrar a mensagem enviada.

**Solução:**

Inicialmente, os estudantes deverão encontrar $X^{-1}$.

Impondo que $X \cdot X^{-1} = I_3$ e resolvendo o sistema, é possível obter:

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a matriz transmitida por $X^{-1}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 30 & -12 \\ 0 & 32 & 2 \\ 15 & 44 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 15 & 1 \\ 0 & 16 & 18 \\ 15 & 22 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando a correspondência proposta, segue a mensagem: BOA PROVA.

## Atividade 4: O entrelaçamento da Álgebra com a Geometria

### Objetivo

- Integrar os eixos Geometria e Álgebra.

Essa atividade deve ser desenvolvida em duas etapas.

**1ª etapa**

### Objetivo

- Construir uma interpretação geométrica para o quadrado da soma de dois termos, utilizando conhecimentos da geometria plana (áreas e composição de figuras).

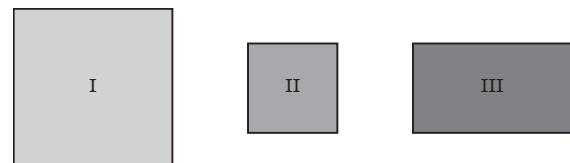
### Material

- Papel sulfite, régua, lápis, borracha e tesoura.

**Número de aulas:** 1.

### Desenvolvimento

O professor deve dividir a turma em grupos, de 3 a 4 estudantes.

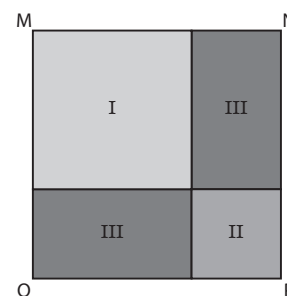
Na folha de papel sulfite, cada equipe deverá desenhar e, em seguida, recortar 1 quadrado I, cujo lado mede a = 8 cm; 1 quadrado II, cujo lado mede b = 5 cm; 2 retângulos III, de dimensões a = 8 cm e b = 5 cm.

Os grupos deverão calcular as áreas de I, II e III.

**Solução:**

$A_I = a^2 = (8\text{ cm})^2 = 64\text{ cm}^2 = 8^2\text{ cm}^2$

$A_{II} = b^2 = (5\text{ cm})^2 = 25\text{ cm}^2 = 5^2\text{ cm}^2$

$A_{III} = a \cdot b = (8\text{ cm}) \cdot (5\text{ cm}) = 40\text{ cm}^2 = (8 \cdot 5)\text{ cm}^2$

Os grupos deverão construir o quadrado MNPQ representado na figura seguinte usando os quatro recortes.

Na sequência deverão calcular a área desse quadrado de duas maneiras distintas (a partir da medida de seu lado e como a soma das áreas das superfícies planas que o compõem). Por fim, os estudantes deverão generalizar a igualdade obtida.

A área MNPQ é igual à soma das áreas das regiões I, II e o dobro da área da região III, ou seja:

$A_{MNPQ} = A_{I} + 2 \cdot A_{III} + A_{II} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{MNPQ} = (8\text{ cm})^2 + 2 \cdot (8 \cdot 5)\text{ cm}^2 + (5\text{ cm})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{MNPQ} = (8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 5 + 5^2)\text{ cm}^2$ (1)

Por outro lado, temos: $A_{MNPQ} = (8\text{ cm} + 5\text{ cm})^2 = (8 + 5)^2\text{ cm}^2$ (2)

Igualando (1) e (2), temos:

$\underbrace{(8 + 5)^2}_{A_{MNPQ}} = \underbrace{8^2}_{A_{I}} + 2 \cdot \underbrace{8 \cdot 5}_{A_{II}} + \underbrace{5^2}_{A_{III}}$

De modo geral, $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

**2ª etapa**

## Objetivo

- Construir uma interpretação geométrica para o cubo da soma de dois termos, utilizando conhecimentos de geometria métrica espacial.

## Material

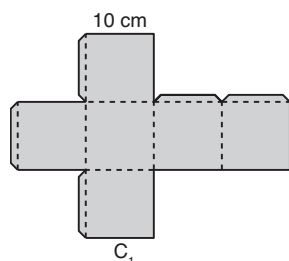
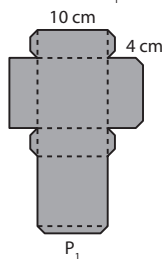
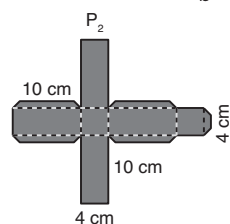
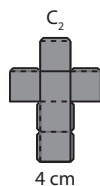
- Folhas de cartolina de diferentes cores, régua, lápis, borracha, tesoura e cola líquida.

**Número de aulas:** 2 a 3.

## Desenvolvimento

O professor deve dividir a classe em grupos de 3 ou 4 estudantes.

As planificações a seguir representadas, que estão acrescidas das abas de colagem para a posterior montagem dos sólidos, devem ser desenhadas em folhas de cartolina de cores distintas entre si, nas quantidades indicadas. Para sólidos de um mesmo tipo deve ser usada a mesma cor.

ILUSTRAÇÕES: SETUP

1 cubo ($\mathbf{C}_1$), cuja aresta mede a = 10 cm

3 prismas retos quadrangulares regulares ($\mathbf{P}_1$), cada qual com aresta da base medindo a = 10 cm e altura de medida b = 4 cm

3 prismas retos quadrangulares regulares ($\mathbf{P}_2$), cada qual com aresta da base medindo b = 4 cm e altura de medida a = 10 cm

1 cubo ($\mathbf{C}_2$), cuja aresta mede b = 4 cm

Os grupos devem recortar e montar os oito sólidos, com as dimensões indicadas nas planificações. Em cada sólido, as linhas tracejadas indicam onde devem ser feitas as dobraduras para a montagem.

Após a construção dos sólidos, os grupos deverão calcular os volumes de $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ e $\mathbf{C}_2$.

**Solução:**

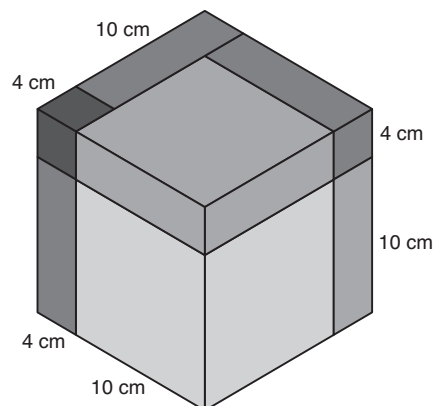
$V_{C_1} = a^3 = (10\text{ cm})^3 = 1\,000\text{ cm}^3 = 10^3\text{ cm}^3$

$V_{P_1} = a^2 \cdot b = (10\text{ cm})^2 \cdot (4\text{ cm}) = 400\text{ cm}^3 = (10^2 \cdot 4)\text{ cm}^3$

$V_{P_2} = b^2 \cdot a = (4\text{ cm})^2 \cdot (10\text{ cm}) = 160\text{ cm}^3 = (10 \cdot 4^2)\text{ cm}^3$

$V_{C_2} = b^3 = (4\text{ cm})^3 = 64\text{ cm}^3 = 4^3\text{ cm}^3$

Com os oito sólidos montados, os estudantes deverão construir o cubo a seguir de aresta 14 cm (10 cm + 4 cm = = 14 cm).

**Solução:**

O professor deve pedir para cada grupo calcular o volume do cubo montado de duas maneiras distintas (a partir da medida de sua aresta e como soma dos volumes dos sólidos que o compõem).

Em seguida, os estudantes deverão generalizar a igualdade obtida, isto é, considerar **a** e **b** medidas quaisquer.

**Solução:**

Assim, como $V = (10\text{ cm} + 4\text{ cm})^3 = (10 + 4)^3\text{ cm}^3$, temos, em centímetros cúbicos, $\underbrace{(10 + 4)^3}_{V} =$

$= \underbrace{10^3}_{V_{C_1}} + 3 \cdot \underbrace{10^2 \cdot 4}_{V_{P_1}} + 3 \cdot \underbrace{10 \cdot 4^2}_{V_{P_2}} + \underbrace{4^3}_{V_{C_2}}$ e, de modo geral:

$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$

## Atividade 5: O volume do cilindro e a função linear

### Objetivos

- Promover uma atividade de experimentação na Matemática.
- Integrar os eixos Geometria e Funções.
- Construir gráficos e revisar o conceito de proporcionalidade, relacionando-o à função linear.

### Material

- Provetas graduadas de 1000 mL, cronômetros, lápis, borracha, calculadoras, papel sulfite e fita métrica.

**Número de aulas:** 2.

### Desenvolvimento

A atividade poderá ser realizada no laboratório do colégio.

O professor deve dividir a turma em grupos de 4 a 5 estudantes.

Nesse experimento, cada grupo deverá fazer medições sucessivas do volume de água na proveta, em determinados instantes. A proveta é abastecida de água por uma torneira, a uma vazão constante, isto é, uma vez regulada a saída de água, ela deverá ser assim mantida até o final da fase de experimentação. É importante que a vazão escolhida por cada grupo seja suficientemente reduzida para que seja possível realizar algumas medições; se a vazão for muito grande, a proveta ficará cheia em poucos segundos, o que, além de desperdiçar água, inviabiliza a realização da atividade.

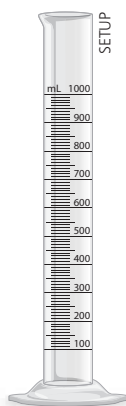
Abre-se a torneira por alguns segundos até estabilizar a vazão. Aciona-se, então, o cronômetro com a proveta vazia sob a torneira. Um membro do grupo para o cronômetro ao final de 3 segundos (ou 2 segundos, dependendo da vazão). Imediatamente, retira-se a proveta da fonte de água (debaixo da torneira) e, por meio da leitura na escala graduada, anota-se o volume de água, em mililitros. A seguir, a água é descartada em um recipiente para ser reaproveitada para outro uso. Observe que a vazão da torneira não pode ser alterada nesse processo.

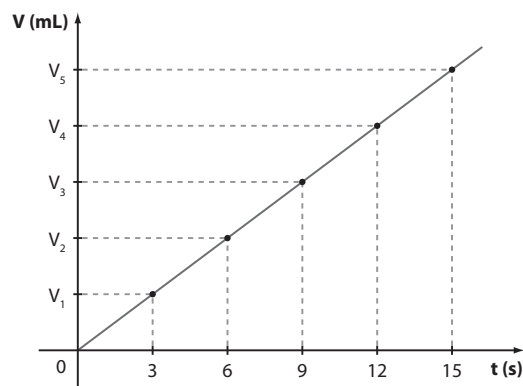
Coloca-se novamente a proveta sob a torneira por um período de 6 segundos (ou 4 segundos, dependendo da vazão). Quando o cronômetro parar, retira-se, imediatamente, a proveta da fonte e anota-se o volume de água na proveta.

Nas etapas seguintes, deve-se repetir o procedimento anterior em intervalos de tempo iguais a 9 segundos, 12 segundos, 15 segundos, 18 segundos etc. (ou 6, 8, 10, 12 etc.). É preciso que a vazão definida por cada grupo seja suficiente para repetir o procedimento pelo menos cinco vezes, de modo que a água não transborde da proveta.

Após a última repetição, ainda com a torneira aberta e a proveta vazia, os estudantes deverão medir o tempo necessário para enchê-la completamente de água.

Encerrada a fase de experimentação, fecha-se a torneira e se inicia outra etapa. Cada equipe terá disponíveis os seguintes dados:

| Tempo (s) | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Volume (mL) | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ | $V_5$ | ... |

Cada equipe deve construir o gráfico cartesiano de V × t, com **V** em mL e **t** em s. Depois de dar tempo às equipes, o professor deve pedir a cada equipe que mostre o gráfico construído.

Espera-se que o gráfico obtido seja aproximadamente uma reta, como é mostrado a seguir:

Por que, do ponto de vista teórico, todos os pontos deveriam estar alinhados?

Há, evidentemente, incertezas associadas à utilização da proveta e do cronômetro nessa atividade:

- o instante exato em que o cronômetro para dificilmente se dará por um número inteiro (3, 6, 9, ...), mas, sim, por um número racional próximo a ele;
- a proveta é um instrumento de medição de pouca precisão. Ainda assim, acredita-se que os pontos obtidos nos vários gráficos da turma estejam aproximadamente alinhados e permitam ao professor propor a reflexão sobre o fato.

Durante toda a experiência, a vazão foi constante, isto é, a cada segundo a proveta recebeu a mesma quantidade de água: se dobrarmos o tempo, a quantidade de água dobrará; triplicando-se o tempo, triplicará a quantidade de água etc.

Isso significa que **V** (volume) e **t** (tempo) são diretamente proporcionais, isto é, $\frac{V}{t} = k$ (**k** é uma constante real) $\Rightarrow V = k \cdot t$

Desse modo, o gráfico que relaciona **V** e **t** é uma reta que passa pela origem, isto é, uma função linear.

1) Conhecendo-se o tempo necessário para se encher completamente a proveta, medido na fase anterior, cada equipe deverá determinar:
   a) a vazão da torneira;
   b) a medida do raio da base da proveta.

   **Solução:**

   a) Para fixar ideias, imagine que a torneira leve 40 segundos para encher a proveta, com a vazão escolhida. Como o volume da proveta é 1 000 mL, sua vazão é: $\frac{1\,000 \text{ mL}}{40 \text{ s}} = 25 \text{ mL/s}$

   b) Para se determinar, experimentalmente, a medida do raio da base da proveta, pode-se medir, com a fita métrica, a altura (em cm) da proveta (correspondente ao nível de 1 000 mL).

   Como $V = A_b \cdot h$, $V = 1\,000$ mL e **h** é conhecido (foi medido), temos:

   $$\pi \cdot r^2 \cdot h = V \Rightarrow r^2 = \frac{V}{\pi \cdot h} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$$

## Atividade 6: Loterias, análise combinatória e probabilidade

### Objetivo

- Conhecer outra loteria, a Lotomania, e calcular probabilidades de se ganhar algum prêmio, dando continuidade ao estudo das loterias, apresentado sob a forma de atividade e leitura no livro-texto.

### Material

- Lápis, borracha, calculadora, de preferência científica (há cálculos que envolvem números muito grandes), volantes da Lotomania.

**Número de aulas:** 1.

### Desenvolvimento

O professor deve dividir a classe em grupos, de até 3 estudantes, e ler com eles o trecho seguinte, explicativo da Lotomania. Os volantes da Lotomania devem circular entre os grupos.

> Na Lotomania, o apostador escolhe 50 números entre os 100 naturais existentes de 1 a 100. A aposta de 50 números é única e custa R$ 1,50 (valor de referência: janeiro de 2016).
>
> O resultado do sorteio é um conjunto formado por 20 números.
>
> Há prêmios para quem acerta 16, 17, 18, 19, 20 ou nenhum número.

O desenvolvimento dessa etapa começa com uma pergunta à classe:

1) De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Lotomania?
   A correção deve ser feita na lousa, deixando o resultado indicado sem efetuar os cálculos.
   **Solução:**
   A quantidade de resultados distintos na Lotomania é $C_{100,\,20}$.
2) De quantos modos distintos um apostador pode escolher as 50 dezenas que serão assinaladas?
   A correção deve ser feita na lousa (no quadro de giz), deixando o resultado indicado, sem efetuar os cálculos.
   **Solução:**

Trata-se de escolher 50 entre os 100 números disponíveis, sem importar a ordem, isto é, devemos formar um subconjunto de 50 números escolhidos entre os 100 disponíveis. Isso pode ser feito de $C_{100,\,50}$ maneiras distintas.

3) Qual é a probabilidade de se acertarem 17 números?
   **Solução:**

Para acertar 17 números, é necessário que a aposta contenha 17 entre os 20 números que serão sorteados **e** os demais 33 números entre os 80 que não serão sorteados.

O número de maneiras distintas de isso ocorrer é $C_{20,\,17} \cdot C_{80,\,33}$.

Assim, a probabilidade pedida é:

$$\frac{C_{20,\,17} \cdot C_{80,\,33}}{C_{100,\,50}}$$

Após uma longa conta (as equipes deverão fazê-la), chega-se a 0,036%, aproximadamente.

O professor deve pedir aos estudantes que confiram o resultado com o verso do volante.

É interessante comentar com a classe que o cálculo das probabilidades de acerto de 16, 18, 19, 20 ou nenhum número segue o mesmo raciocínio.

4) Justifique o fato de que a probabilidade de não se acertar qualquer número é igual à probabilidade de se acertarem os 20 números. Como curiosidade, esse cálculo fornece uma probabilidade aproximada de 0,0000088%.
   **Solução:**
   A probabilidade de não se acertar qualquer número é:

Os 50 números assinalados devem estar entre os 80 que não serão sorteados.

$$\frac{C_{80,\,50}}{C_{100,\,50}}$$

A probabilidade de se acertarem os 20 números é:

Dos 50 assinalados, 20 devem corresponder aos que serão sorteados e são determinados de maneira única; os outros 30 devem estar entre os 80 números não sorteados.

$$\frac{1 \cdot C_{80,\,30}}{C_{100,\,50}}$$

Se necessário, o professor pode lembrar aos estudantes que $C_{80,\,50} = \binom{80}{50} = \binom{80}{30} = C_{80,\,30}$.

## Atividade 7: Matemática e Arte

### Objetivos

- Promover uma atividade interdisciplinar, ligando a Matemática à Arte.
- Aprofundar os conceitos relativos à geometria dos fractais, iniciado no infográfico da seção *Aplicações* – capítulo 9 (Matemática, natureza e arte: a Geometria dos fractais).
- Rever conceitos importantes ligados à progressão geométrica.
- Aplicar os conceitos de Geometria construídos nesta coleção para resolver problemas ligados a fractais geométricos.
- Valorizar habilidades como: observação de padrões e regularidades, generalizações, leitura e interpretação, além de outras ligadas à Arte.
- Produzir um painel com fotos e imagens para exposição dos trabalhos, explorando a presença de fractais na natureza e na arte.
- Estimular a pesquisa na internet e outros meios.

### Material

- Lápis, borracha, régua, papel sulfite e computadores com acesso à internet.

**Número de aulas:** 2 a 3.

## Desenvolvimento

Como ponto de partida, sugerimos a leitura do infográfico da seção *Aplicações* – capítulo 9 (Matemática, ciência e arte: a Geometria dos fractais). Os estudantes deverão também consultar outras fontes para embasamento. Sugerimos os artigos *Geometria fractal e arquitetura*, de Tânia Baier e Maycon Sedrez, disponível em <www.academia.edu/14746004/Geometria_Fractal_e_Arquitetura> (Acesso em: 22 abr. 2016) e *Padrões fractais: conectando Matemática e Arte*, de Rejane Waiandt Schuwartz Faria e Marcus Vinicius Maltempi, disponível em <redalyc.org/pdf/715/71523347003.pdf> (Acesso em: 22 abr. 2016).

Várias atividades sobre fractais geométricos podem ser propostas. Sugerimos uma atividade que apresenta: *Poeira de Cantor*, *Triângulo de Sierpinski*, *Floco de Neve de Koch* e *Tapete de Sierpinski*.

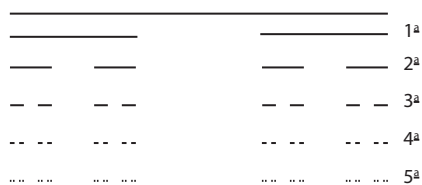
Os estudantes deverão construir painéis com os fractais geométricos produzidos nas atividades, mas não devem se limitar a estes. Na exposição, é importante que os estudantes pesquisem imagens de fractais na natureza (folha de samambaia, ramificações de galhos em determinadas árvores, nuvens, espécies de couve-flor, flores etc.) e na arte – há inúmeras imagens de belos fractais.

**Poeira de Cantor**

Cada grupo deverá desenhar as quatro figuras correspondentes às quatro primeiras etapas da construção da poeira de Cantor. Para isso, deverão seguir estas orientações:

1ª) Construir um segmento de medida **L** ($L > 0$). É recomendável não escolher uma medida muito pequena (por exemplo, $L = 1$ cm). Uma sugestão é escolher a medida $L = 12$ cm.

2ª) Dividir esse segmento em três partes iguais e retirar a parte central, repetindo o processo com os dois segmentos restantes e assim sucessivamente, como mostra a figura a seguir.

**Solução:**

1ª
2ª
3ª
4ª
5ª

Depois, os estudantes deverão preencher a tabela seguinte, valendo-se de suas observações de regularidade. É indiferente considerar o segmento original como a etapa zero ou a 1ª etapa. No entanto, se isso for padronizado, facilitará a execução da atividade (convencionamos aqui etapa zero como o ponto de partida).

| Etapa | Número de segmentos | Medida de cada segmento (cm) | Comprimento total (cm) |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| n | | | |

Orientações para o preenchimento da tabela:

- Número de segmentos:

A sequência é: (1, 2, 4, 8, ...) ou melhor $(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ...)$. Assim, na etapa **n**, temos $2^n$ segmentos.

- Medida de cada segmento (em cm):

A sequência é: $\left(12, 4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, ...\right)$; trata-se da P.G. $\left(12, \frac{12}{3}, \frac{12}{3^2}, \frac{12}{3^3}, ...\right)$.

Assim, na etapa **n**, temos que cada segmento medirá $\frac{12}{3^n}$ cm.

- Comprimento total:

Etapa 0: 12 cm

Etapa 1: $2 \cdot \left(\frac{12}{3}\right) \text{ cm} = \frac{2}{3} \cdot 12 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

Etapa 2: $4 \cdot \left(\frac{12}{3^2}\right) \text{ cm} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 12 \text{ cm} = 5{,}333... \text{ cm}$

Etapa 3: $8 \cdot \left(\frac{12}{3^3}\right) \text{ cm} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 12 \text{ cm} = 3{,}555... \text{ cm}$

⋮

Etapa **n**: $2^n \cdot \frac{12}{3^n} \text{ cm} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 12 \text{ cm}$

Por fim, os estudantes devem explicar o que acontece com o comprimento total dos segmentos à medida que **n** tende ao infinito, isto é, se considerarmos a etapa **n**, com **n** arbitrariamente grande.

Os estudantes deverão identificar, ainda que informalmente, uma importante propriedade da sequência $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$; $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, isto é, o comprimento total tende a zero.

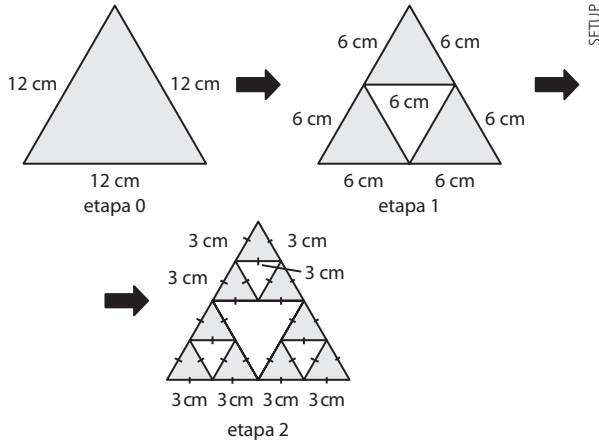
**Triângulo de Sierpinski**

Cada grupo deverá desenhar as três ou quatro figuras, correspondentes às três (quatro) primeiras etapas da construção do triângulo de Sierpinski. Para isso, deverá seguir as seguintes orientações:

1ª) Construir um triângulo equilátero de lado 12 cm (etapa 0).

2ª) Ligar os pontos médios dos três lados desse triângulo, dividindo-o em 4 triângulos equiláteros congruentes, cada um com lado 6 cm. Remover o triângulo central obtido (etapa 1).

3ª) Para cada um dos outros 3 triângulos construídos (o central foi eliminado), repetir o procedimento (etapa 2).

**Solução:**

Nesta etapa, os estudantes deverão preencher a tabela seguinte, valendo-se de suas observações de regularidade.

| Etapa | Número de triângulos | Medida do lado de cada triângulo (em cm) | Área total da figura (em cm²) |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| n | | | |

Orientações para o preenchimento da tabela:

- Número de triângulos:
  Temos a sequência $(1, 3, 9, 27, \dots)$.
  $$\downarrow\ 3^0,\ \downarrow\ 3^1,\ \downarrow\ 3^2,\ \downarrow\ 3^3$$
  Na etapa **n**, são $3^n$ triângulos.
- Medida do lado de cada triângulo (em cm):
  Observe a sequência $\left(12, 6, 3, \frac{3}{2}, \dots\right)$.
  $$\downarrow\ \frac{12}{2^0},\ \downarrow\ \frac{12}{2},\ \downarrow\ \frac{12}{2^2},\ \downarrow\ \frac{12}{2^3}$$
  Na etapa **n**, a medida do lado de cada triângulo é: $\frac{12}{2^n}$ cm.
- Área total dos triângulos em cada etapa (cm²):
  Etapa 0: um triângulo equilátero de lado 12 cm tem área igual a: $12^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm² $= 36\sqrt{3}$ cm²

  Etapa 1: três triângulos equiláteros de lado 6 cm têm área total igual a: $3 \cdot \frac{\left(\frac{12}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$ cm²

  Etapa 2: nove triângulos equiláteros de lado 3 cm têm área total igual a: $3^2 \cdot \frac{\left(\frac{12}{2^2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$ cm²

  Etapa 3: 27 triângulos equiláteros de lado $\frac{3}{2}$ cm têm área total igual a: $3^3 \cdot \frac{\left(\frac{12}{2^3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{16}$ cm²

  Observe a P.G. que representa a sequência das áreas (em centímetros quadrados):

  $$\left(\underbrace{36\sqrt{3}}_{\text{etapa 0}}, \underbrace{27\sqrt{3}}_{\text{etapa 1}}, \underbrace{\frac{81\sqrt{3}}{4}}_{\text{etapa 2}}, \underbrace{\frac{243\sqrt{3}}{16}}_{\text{etapa 3}}, \dots\right)$$

  Sua razão é $q = \frac{3}{4}$.

  Para saber a área da figura na etapa **n** é preciso determinar o termo de posição n + 1:

  $$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n \Rightarrow a_{n+1} = 36\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Por fim, os estudantes devem explicar o que acontece com a área do triângulo de Sierpinski à medida que **n** fica arbitrariamente grande (isto é, quando **n** tende ao ∞).

É preciso lembrar que, se $n \to \infty$, então $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$. Logo, a área do triângulo tende a zero.

**Floco de neve de Koch**

O professor deve dividir a classe em grupos de 3 ou 4 estudantes.

Cada grupo deverá desenhar as três primeiras figuras correspondentes às etapas iniciais da construção do floco de neve de Koch. Para isso, deverão seguir estas instruções:

1ª) Construir um triângulo equilátero de lado 3 cm.

2ª) Dividir cada lado desse triângulo em três partes iguais e, tomando como referência a parte central, construir um novo triângulo equilátero, apagando a parte central, serão obtidos 6 triângulos equiláteros congruentes (cada um com um lado "suprimido").

3ª) Repetir o procedimento obtendo a etapa 2.

Os estudantes deverão ter construído figuras iguais às que seguem:

Em seguida, eles deverão calcular o número de lados e o perímetro das figuras obtidas. Se for necessário, uma dica pode ajudar os estudantes: observe que, em cada etapa, o lado de um triângulo dá origem a quatro segmentos congruentes e a medida de cada um desses segmentos é a terça parte da medida do lado do triângulo da etapa anterior. O professor deve fazer a correção e socialização das estratégias desenvolvidas por cada grupo.

Etapa 0: número de lados é igual a 3

Perímetro: $3 \cdot (3 \text{ cm}) = 9$ cm

Etapa 1: número de lados é igual a 12 (= $4 \cdot 3$)

Perímetro: $\underbrace{3}_{\text{são 3 lados na etapa anterior}} \cdot \underbrace{4}_{\text{cada lado dividiu-se em quatro segmentos}} \cdot \underbrace{1}_{\text{medida de cada segmento}}$ cm = 12 cm

Etapa 2: número de lados é igual a 48 (= $4^2 \cdot 3$)

Perímetro: $12 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \text{ cm}\right) = 16$ cm

Depois, o professor deve perguntar qual é o número de lados e o perímetro da figura obtida na enésima etapa.

Os estudantes deverão perceber a seguinte regularidade:

| Etapa | Número de lados | Perímetro (cm) |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 9 |
| 1 | $4 \cdot 3 = 12$ | 12 |
| 2 | $4 \cdot 12 = 4^2 \cdot 3$ | 16 |

A sequência do número de lados ($3; 4 \cdot 3; 4^2 \cdot 3; ...$) é uma P.G. de razão 4; na etapa **n**, temos $4^n \cdot 3$ lados.

A sequência dos perímetros (9, 12, 16, ...) é uma P.G. de razão $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$; o termo $a_{n+1}$ fornece o perímetro da figura obtida na etapa **n**:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n = 9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

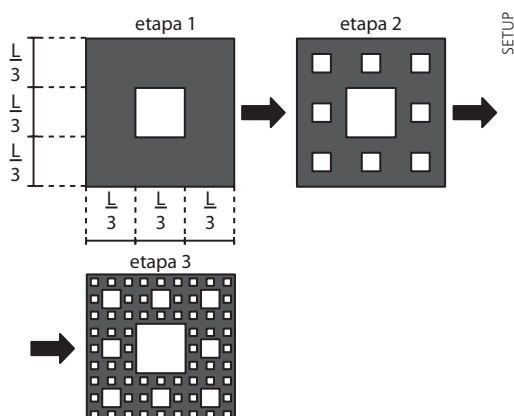
**Tapete de Sierpinski**

Cada grupo deverá desenhar o fractal conhecido como tapete de Sierpinski a partir dos seguintes passos:

1º) Tomar um quadrado cujo lado mede **L** cm ($L > 0$).

2º) Dividir cada um de seus lados em 3 partes congruentes, obtendo 9 quadrados cujos lados medem $\frac{L}{3}$ cm.

3º) Retirar o quadrado central.

4º) Repetir o procedimento em cada quadrado obtido e assim sucessivamente.

Na sequência, os estudantes deverão preencher a tabela a seguir:

| Etapa | Número de quadrados | Área total (cm²) |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| n | | |

**Solução:**

Etapa 0: quadrado original; área é igual a $L^2$ cm².

Etapa 1: temos 8 quadrados, cada um com lado medindo $\frac{L}{3}$ cm. A área total, em cm², é:

$$8 \cdot \left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{8 \cdot L^2}{9} = \frac{8}{9} \cdot L^2$$

Etapa 2: cada um dos quadrados anteriores dá origem a 8 novos quadrados, cada um com lado medindo $\frac{L}{9}$ cm, totalizando 64 quadrados, ($8 \cdot 8 = 8^2 = 64$), cada um com área $\left(\frac{L}{9}\right)^2$ cm².

A área total, em centímetros quadrados, é:

$$64 \cdot \left(\frac{L}{9}\right)^2 = \frac{64 \cdot L^2}{81} = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot L^2$$

Etapa 3: são 512 quadrados ($8^3 = 512$), cada um com $\frac{L}{27}$ cm de medida do lado.

A área total, em centímetros quadrados, é:

$$512 \cdot \left(\frac{L}{27}\right)^2 = \frac{512 \cdot L^2}{729} = \left(\frac{8}{9}\right)^3 \cdot L^2$$

Observe a sequência das áreas dos quadrados em cada etapa:

$$\left(L^2, \frac{8 \cdot L^2}{9}, \frac{64 \cdot L^2}{81}, \frac{512 \cdot L^2}{729}, ...\right)$$

Trata-se de uma P.G. decrescente, cuja razão é $\frac{8}{9}$.

Na etapa **n**, o número de quadrados é $8^n$ e a área é $\left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot L^2$ cm².

Por fim, os estudantes devem explicar o que ocorre com a área total do tapete quando **n** tende ao infinito.

Novamente, os estudantes deverão lembrar que $q^n \to 0$ se $n \to \infty$ e $|q| < 1$.

Isso significa que a área total do tapete de Sierpinski é igual a zero.

## Atividade 8: Geometria – Embalagens metálicas, custos de produção e a Matemática

### Objetivos

- Resolver uma situação-problema usando conhecimentos geométricos sobre área de superfície do cilindro.
- Relacionar conhecimentos geométricos à função.
- Utilizar planilhas eletrônicas para organizar e representar um conjunto de dados.
- Efetuar cálculos e construir gráficos em programas de planilhas eletrônicas.
- Avaliar proposta de intervenção na realidade.
- Analisar informações envolvendo conhecimentos geométricos como recurso para a construção de argumentação.

### Material

- Lápis, borracha, régua, calculadora (científica, se possível), computador com programa instalado de planilha eletrônica (se houver disponibilidade).

**Número de aulas:** 2 a 3.

### Desenvolvimento

**1ª etapa**

O professor deve dividir a turma em grupos de 2 ou 3 estudantes e ler com eles o texto a seguir.

Na indústria de alimentos existem diversos tipos de embalagens para acondicionar os produtos e preservar as suas características por mais tempo. Entre elas, existem as latas metálicas e cilíndricas.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

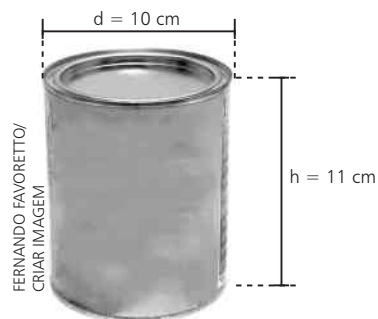
A superfície interna das latas metálicas é revestida com um verniz especial que evita o contato direto do alimento com o metal, bem como sua contaminação.

A matéria-prima para a fabricação de latas metálicas são as **folhas de flandres** (enroladas em grandes bobinas). As folhas de flandres podem ser de ferro ou aço, laminadas e normalmente revestidas com estanho.

ALAMY/FOTOARENA

Folhas de flandres sendo preparadas para a fabricação de latas.

Imagine que uma empresa, com o objetivo de reduzir custos, estuda as possibilidades de produzir outras embalagens cilíndricas e metálicas, que acondicionem a mesma quantidade de leite em pó, porém com custo de fabricação inferior ao custo de fabricação das atuais embalagens. Uma dessas embalagens tem as dimensões mostradas a seguir:

FERNANDO FAVORETTO/ CRIAR IMAGEM

Dimensões típicas de uma lata de leite em pó tradicional.

O volume **V** dessa lata pode ser calculado por:

$V = A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \cdot 11 \Rightarrow V = 275\pi \text{ cm}^3$

Considerando $\pi \simeq 3{,}14$, obtemos:

$V \simeq 863{,}50 \text{ cm}^3$

A quantidade de aço necessária para fabricar essa lata é estabelecida, aproximadamente, por meio da área total de sua superfície. Dessa forma, a área total do cilindro ($\mathbf{A_t}$) é dada por:

$A_t = 2\pi r \cdot (r + h) \Rightarrow A_t = 2\pi \cdot 5 \cdot (5 + 11) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 160\pi \text{ cm}^2 \simeq 502{,}40 \text{ cm}^2$

Para resolver o problema levantado pela empresa, é preciso verificar se, modificando as dimensões da lata, mas preservando o seu volume, é possível obter outras latas cujo custo de fabricação é menor, isto é, latas com área total ($\mathbf{A_t}$) inferior ao valor encontrado.

Ajude a resolver esse problema.

Os estudantes, divididos em grupos, deverão ter um tempo para pensar em formas de resolver o problema. A primeira conclusão a que deverão chegar é a de que qualquer outra embalagem deverá possuir o mesmo volume da atual, isto é, o volume deverá ser mantido fixo no valor de 863,50 cm³. Mas será possível obter dimensões do diâmetro (**d**) e da altura (**h**) de uma nova embalagem a fim de que o volume seja 863,50 cm³ e a área total seja inferior a 502,40 cm²? Após algumas tentativas, os estudantes perceberão as limitações e dificuldades de tentar resolver o problema atribuindo valores particulares para **d** e **h** e a necessidade de ajustar e definir um procedimento adequado para encontrar esses valores.

Se não houver um encaminhamento do problema por parte dos grupos, o professor poderá conduzir as discussões como segue:

Como $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h$, e **V** é conhecido, é possível estabelecer uma relação entre **d** e **h**, substituindo **V** por 863,50 cm³.

$863{,}50 = 3{,}14 \cdot \frac{d^2 \cdot h}{4} \Rightarrow d^2 \cdot h = 1\,100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = \frac{1\,100}{d^2}$ *

A partir de agora, fica facilitada a tarefa de conhecer as dimensões (**d** e **h**) de outros cilindros que satisfaçam (*) e verificar se, para fabricá-las, se consome mais ou menos material.

Caso o professor deseje, poderão ser fornecidos alguns valores de **d** para as equipes preencherem a tabela, como é mostrado a seguir:

| d (cm) | h (cm) | $A_t$ (cm²) |
|---|---|---|
| 10 | 11 | 502,40 |
| 8 | | |
| 5 | | |
| 15 | | |
| 12 | | |

O professor pode orientar os grupos quanto ao preenchimento da tabela para prosseguir com as discussões.

É possível também pedir aos estudantes que realizem os cálculos considerando apenas valores inteiros de **d** e **h**. Nesse caso, quando necessário, arredonde **h** para o número inteiro mais próximo fazendo o mesmo com a área total, como mostrado na tabela seguinte:

| | | | Considerando valores inteiros | |
|---|---|---|---|---|
| **d (cm)** | **h (cm)** | **$A_t$ (cm²)** | **h (cm)** | **$A_t$ (cm²)** |
| 10 | 11 | 502,40 | 11 | 502 |
| 8 | $\frac{275}{16} \simeq 17,2$ | 532,54 | 17 | 528 |
| 5 | 44 | 730,05 | 44 | 730 |
| 15 | $\frac{44}{9} \simeq 4,9$ | 584,04 | 5 | 589 |
| 12 | $\frac{275}{36} \simeq 7,6$ | 512,45 | 8 | 528 |

Após esses cálculos, os estudantes provavelmente já terão percebido que:

- Latas de mesmo volume podem ser fabricadas com quantidades diferentes de aço e, dessa forma, apresentam custos de fabricação distintos.
- Variando o diâmetro **d** e, em consequência, a altura **h**, de modo que (*) seja satisfeita, a embalagem que consome menor quantidade possível de material é aquela que a empresa utiliza atualmente, isto é, com diâmetro d = 10 cm e h = 11 cm. Mas é importante destacar aos estudantes que os cálculos foram realizados com alguns valores, o que não é suficiente para garantir que as dimensões atuais acarretam, de fato, área total mínima e, consequentemente, o custo mínimo de fabricação.

**2ª etapa** – *Construção de gráfico e planilha eletrônica*

Os estudantes, nessa etapa, deverão ter acesso a um programa de planilha eletrônica. Todas as etapas descritas a seguir serão desenvolvidas no Calc – LibreOffice. É importante ressaltar que esse recurso pode ser realizado em outras planilhas eletrônicas com algumas diferenças.

Antes de os estudantes iniciarem a atividade no computador, o professor deve pedir aos grupos que obtenham uma expressão para a área total do cilindro em função apenas da medida de seu diâmetro (**d**). Isso será possível, pois (*) mostra a relação entre **d** e **h**. Os estudantes reconhecerão a importância de se estabelecer uma fórmula para a área total que dependa apenas da medida do diâmetro **d**, na construção da tabela.

De fato, como $h = \frac{1\,100}{d^2}$ e $A_t = 2\pi r \cdot (h + r)$, temos:

$$A_t = \pi \cdot 2r \cdot \left(\frac{1\,100}{d^2} + \frac{d}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = \pi \cdot d \cdot \left(\frac{2\,200 + d^3}{2d^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = \frac{1\,100\pi}{d} + \frac{\pi}{2} \cdot d^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(d^2 + \frac{2\,200}{d}\right)$$

Considerando $\pi \simeq 3,14$, temos:

$$A_t = 1,57 \cdot \left(d^2 + \frac{2\,200}{d}\right) \quad (**)$$

Nesse momento é necessário deixar claro aos estudantes que essa etapa da atividade tem por objetivo verificar se, de fato, a lata atual de leite em pó é a que está associada ao menor custo de fabricação. Faremos a comprovação desse fato por meio de uma tabela que fornecerá para cada medida do diâmetro (**d**) a correspondente área total (**$A_t$**) e, em seguida, construiremos o gráfico de $A_t \times d$, que também nos permitirá analisar seu **ponto de mínimo**.

Para tanto, os estudantes devem seguir as orientações:

1) Monte uma tabela, utilizando as colunas **A** e **B**, variando o diâmetro **d** de 1 cm até 50 cm (utilizaremos apenas valores inteiros) conforme mostrado a seguir.
   - Na coluna **A** digite: d (cm).
   - Na coluna **B** digite: $A_t$ (cm).

COLABORADORES DO LIBREOFFICE

2) Para cada um dos 50 valores de **d** (observe que na coluna **A** os valores variam da célula A2 até a célula A51), será necessário obter o valor correspondente da área total ($\mathbf{A_t}$), mas não será preciso fazer todos os cálculos, conforme **.

O professor deve explicar aos grupos que é possível reproduzir a operação desejada por meio de comandos que fornecem diretamente os resultados procurados.

Se achar pertinente, ele pode começar com um exemplo mais simples: imagine que, hipoteticamente, precisamos calcular o dobro dos valores listados na coluna **A** acrescentando 5 unidades.

A sequência para realizar a tarefa é:

a) Selecione a célula B2 da planilha (ela deverá conter o primeiro valor procurado, obtido a partir do valor 1, que se encontra na célula A2).

b) Escreva o comando da expressão desejada no campo *fx* mostrado na reprodução parcial da planilha a seguir. O comando é:

=(2*A2)+5

c) Clique no ponto inferior direito da célula B2.

d) Arraste, com o *mouse*, até a célula B10.

e) Gradativamente aparecerão os valores desejados.

B2:B10 | =(2*A2)+5

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | d (cm) | $A_t$ (cm²) | | | | |
| 2 | 1 | 7 | | | | |
| 3 | 2 | 9 | | | | |
| 4 | 3 | 11 | | | | |
| 5 | 4 | 13 | | | | |
| 6 | 5 | 15 | | | | |
| 7 | 6 | 17 | | | | |
| 8 | 7 | 19 | | | | |
| 9 | 8 | 21 | | | | |
| 10 | 9 | 23 | | | | |
| 11 | 10 | | | | | |
| 12 | 11 | | | | | |
| 13 | 12 | | | | | |

campo de fórmulas

IMAGENS: COLABORADORES DO LIBREOFFICE

Voltando ao problema inicial, os estudantes deverão digitar o comando que corresponde à área total da lata no campo *fx* da planilha conforme **:

$$A_t = 1{,}57 \cdot \left(d^2 + \frac{2\,200}{d}\right)$$

Talvez seja necessário relembrar que:

- a operação de divisão é representada pela barra inclinada (/);
- a operação de multiplicação é representada pelo asterisco (*);
- a operação de potência é representada por ^ (da mesma forma que encontramos em algumas calculadoras científicas);
- não se usam colchetes: quando necessário, usam-se várias vezes os parênteses.

Para completar a segunda coluna da planilha, os estudantes devem selecionar a célula B2. Em seguida, digitar, no campo *fx*, o comando:

=1,57*((A2)^2+(2 200/(A2)))

B2 | =1,57*((A2)^2+(2200/A2))

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | d (cm) | $A_t$ (cm²) | | | | |
| 2 | 1 | 3456 | | | | |
| 3 | 2 | | | | | |
| 4 | 3 | | | | | |
| 5 | 4 | | | | | |
| 6 | 5 | | | | | |
| 7 | 6 | | | | | |
| 8 | 7 | | | | | |
| 9 | 8 | | | | | |
| 10 | 9 | | | | | |
| 11 | 10 | | | | | |
| 12 | 11 | | | | | |
| 13 | 12 | | | | | |
| 14 | 13 | | | | | |
| 15 | 14 | | | | | |
| 16 | 15 | | | | | |
| 17 | 16 | | | | | |
| 18 | 17 | | | | | |
| 19 | 18 | | | | | |
| 20 | 19 | | | | | |
| 21 | 20 | | | | | |
| 22 | 21 | | | | | |
| 23 | 22 | | | | | |
| 24 | 23 | | | | | |
| 25 | 24 | | | | | |
| 26 | 25 | | | | | |
| 27 | 26 | | | | | |
| 28 | 27 | | | | | |
| 29 | 28 | | | | | |
| 30 | 29 | | | | | |
| 31 | 30 | | | | | |
| 32 | 31 | | | | | |
| 33 | 32 | | | | | |
| 34 | 33 | | | | | |
| 35 | 34 | | | | | |
| 36 | 35 | | | | | |
| 37 | 36 | | | | | |
| 38 | 37 | | | | | |
| 39 | 38 | | | | | |
| 40 | 39 | | | | | |
| 41 | 40 | | | | | |
| 42 | 41 | | | | | |
| 43 | 42 | | | | | |
| 44 | 43 | | | | | |

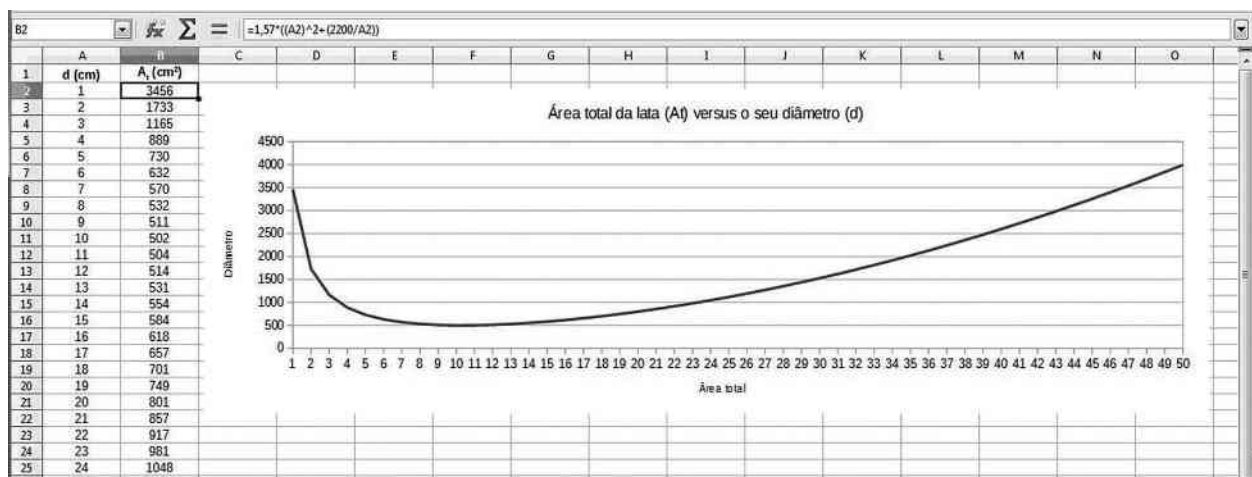
3) Clique no ponto inferior direito da célula B2 e arraste-a com o *mouse* até a célula B51. Gradativamente aparecerão os valores da área total ($\mathbf{A}_t$) para cada diâmetro (**d**), conforme mostrado na tela a seguir. É importante que os estudantes observem que o menor valor de área total (502 cm²) ocorre, de acordo com os dados da tabela, para o diâmetro d = 10 cm. Esse diâmetro, por sua vez, corresponde à altura h = 11 cm. Essas são as dimensões da lata de leite em pó que a empresa utiliza atualmente.

B2:B51 | =1,57*((A2)^2+(2200/A2))

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | d (cm) | $A_t$ (cm²) | | | | |
| 2 | 1 | 3456 | | | | |
| 3 | 2 | 1733 | | | | |
| 4 | 3 | 1165 | | | | |
| 5 | 4 | 889 | | | | |
| 6 | 5 | 730 | | | | |
| 7 | 6 | 632 | | | | |
| 8 | 7 | 570 | | | | |
| 9 | 8 | 532 | | | | |
| 10 | 9 | 511 | | | | |
| 11 | 10 | 502 | | | | |
| 12 | 11 | 504 | | | | |
| 13 | 12 | 514 | | | | |
| 14 | 13 | 531 | | | | |
| 15 | 14 | 554 | | | | |
| 16 | 15 | 584 | | | | |
| 17 | 16 | 618 | | | | |
| 18 | 17 | 657 | | | | |
| 19 | 18 | 701 | | | | |
| 20 | 19 | 749 | | | | |
| 21 | 20 | 801 | | | | |
| 22 | 21 | 857 | | | | |
| 23 | 22 | 917 | | | | |
| 24 | 23 | 981 | | | | |
| 25 | 24 | 1048 | | | | |
| 26 | 25 | 1119 | | | | |
| 27 | 26 | 1194 | | | | |
| 28 | 27 | 1272 | | | | |
| 29 | 28 | 1354 | | | | |
| 30 | 29 | 1439 | | | | |
| 31 | 30 | 1528 | | | | |
| 32 | 31 | 1620 | | | | |
| 33 | 32 | 1716 | | | | |
| 34 | 33 | 1814 | | | | |
| 35 | 34 | 1917 | | | | |
| 36 | 35 | 2022 | | | | |
| 37 | 36 | 2131 | | | | |
| 38 | 37 | 2243 | | | | |
| 39 | 38 | 2358 | | | | |
| 40 | 39 | 2477 | | | | |
| 41 | 40 | 2598 | | | | |
| 42 | 41 | 2723 | | | | |
| 43 | 42 | 2852 | | | | |
| 44 | 43 | 2983 | | | | |
| 45 | 44 | 3118 | | | | |
| 46 | 45 | 3256 | | | | |
| 47 | 46 | 3397 | | | | |
| 48 | 47 | 3542 | | | | |
| 49 | 48 | 3689 | | | | |
| 50 | 49 | 3840 | | | | |
| 51 | 50 | 3994 | | | | |
| 52 | | | | | | |

IMAGENS: COLABORADORES DO LIBREOFFICE

4) Utilizando o assistente gráfico da planilha, é possível obter o traçado do gráfico da área total em função da medida do diâmetro da lata. Títulos para os eixos e para o gráfico também podem ser inseridos como mostrado a seguir.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | d (cm) | $A_t$ (cm²) |
| 2 | 1 | 3456 |
| 3 | 2 | 1733 |
| 4 | 3 | 1165 |
| 5 | 4 | 889 |
| 6 | 5 | 730 |
| 7 | 6 | 632 |
| 8 | 7 | 570 |
| 9 | 8 | 532 |
| 10 | 9 | 511 |
| 11 | 10 | 502 |
| 12 | 11 | 504 |
| 13 | 12 | 514 |
| 14 | 13 | 531 |
| 15 | 14 | 554 |
| 16 | 15 | 584 |
| 17 | 16 | 618 |
| 18 | 17 | 657 |
| 19 | 18 | 701 |
| 20 | 19 | 749 |
| 21 | 20 | 801 |
| 22 | 21 | 857 |
| 23 | 22 | 917 |
| 24 | 23 | 981 |
| 25 | 24 | 1048 |

O professor deve comentar com os estudantes que a construção do gráfico da função é dada por $y = 1,57 \cdot \left(x^2 + \frac{2\,200}{x}\right)$, $x > 0$, bem como que a determinação de seu ponto mínimo requer conhecimentos de Matemática geralmente abordados apenas no Ensino Superior.

Ele também deve enfatizar aos grupos que o uso de programas de planilhas eletrônicas é de grande importância no mercado de trabalho e em vários ramos de atividade humana.

**Complemento para o professor**

A título de curiosidade e sem a intenção de justificar propriedades, vamos relembrar, usando elementos de cálculo diferencial e integral, a resolução do seguinte problema: seja $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{2\,200}{x}\right)$. Para qual valor de **x** a função **f** tem valor mínimo?

**Solução:**

- Vamos determinar o valor de **x** para o qual **f** é mínimo.
- Vamos pesquisar possíveis pontos de mínimo, derivando **f**:

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \left[2x + 2\,200 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] \Rightarrow$$

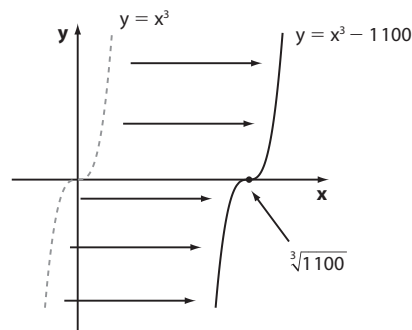
$$\Rightarrow f'(x) = \pi \cdot \left(x - \frac{1\,100}{x^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \pi \cdot \left(x - \frac{1\,100}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1\,100 \Rightarrow$$

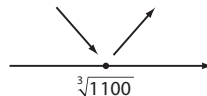
$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{1\,100} \simeq 10,32$$

- Por meio do estudo de sinal $f'(x)$ podemos analisar o crescimento/decrescimento de **f** e verificar se $x = \sqrt[3]{1\,100}$ é, de fato, ponto de mínimo:

$$f'(x) = \pi \cdot \left(x - \frac{1\,100}{x^2}\right) = \pi \cdot \left(\frac{x^3 - 1\,100}{x^2}\right)$$

Como, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$, o sinal de **f**' é dado pelo sinal de função $x^3 - 1\,100$, cujo gráfico está esboçado a seguir.

Se $x < \sqrt[3]{1\,100}$, $f'(x) < 0$ e **f** é decrescente.

Se $x > \sqrt[3]{1\,100}$, $f'(x) > 0$ e **f** é crescente.

Veja o esquema:

De fato, $x = \sqrt[3]{1\,100} \simeq 10,32$ acarreta o menor valor possível para **f** e o ponto $\left(\sqrt[3]{1\,100}, f\left(\sqrt[3]{1\,100}\right)\right)$ é o ponto de mínimo da função.

Considerando apenas valores inteiros de **x**, encontraríamos $x = 10$, como mostrado nessa atividade.

# RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

## CAPÍTULO 1 A circunferência trigonométrica

### Exercícios

**1.** **a)** $\begin{cases} \pi \text{ rad} \text{ — } 180° \\ x \text{ — } 30° \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{30° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$

**b)** 15° é $\dfrac{1}{12}$ de 180°, portanto é $\dfrac{\pi}{12}$ rad.

**c)** $\dfrac{120°}{180°} \cdot \pi \text{ rad} = \dfrac{2}{3} \cdot \pi \text{ rad} = \dfrac{2\pi}{3} \text{ rad}$

**d)** $\dfrac{210°}{180°} \cdot \pi \text{ rad} = \dfrac{7}{6} \cdot \pi \text{ rad} = \dfrac{7\pi}{6} \text{ rad}$

**e)** $3 \cdot 90° = 3 \cdot \dfrac{\pi}{2} \text{ rad} = \dfrac{3\pi}{2} \text{ rad}$

**f)** $\dfrac{300°}{180°} \cdot \pi \text{ rad} = \dfrac{5}{3} \cdot \pi \text{ rad} = \dfrac{5\pi}{3} \text{ rad}$

**g)** 20° é a nona parte de 180°, portanto é $\dfrac{\pi}{9}$ rad.

**h)** $\dfrac{150°}{180°} \cdot \pi \text{ rad} = \dfrac{5}{6} \cdot \pi \text{ rad} = \dfrac{5\pi}{6} \text{ rad}$

**i)** $315° = 7 \cdot 45° = 7 \cdot \dfrac{\pi}{4} \text{ rad} = \dfrac{7\pi}{4} \text{ rad}$

**2.** **a)** $\dfrac{180°}{3} = 60°$

**b)** $\dfrac{180°}{2} = 90°$

**c)** $\dfrac{180°}{4} = 45°$

**d)** $\dfrac{180°}{5} = 36°$

**e)** $\begin{cases} 180° \text{ — } 3{,}14 \text{ rad} \\ x \text{ — } 0{,}5 \text{ rad} \end{cases} \Rightarrow x \simeq 28{,}66°$

**f)** $\dfrac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$

**g)** $2 \cdot \dfrac{180°}{9} = 40°$

**h)** $\dfrac{11}{6} \cdot 180° = 330°$

**i)** $\begin{cases} 3{,}14 \text{ rad} \text{ — } 180° \\ 3 \text{ rad} \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x \simeq 172°$

**3.** $\dfrac{2\pi r}{2} = 188{,}4 \Rightarrow 3{,}14 \cdot r = 188{,}4 \Rightarrow r = 60$ m

**4.** 1º modo:
O comprimento da circunferência que contém o arco $\overset{\frown}{AB}$ é $2 \cdot \pi \cdot 8$ cm $= 16\pi$ cm; como a medida do arco é 120°, seu comprimento é $\dfrac{1}{3} \cdot 16\pi \text{ cm} = \dfrac{16\pi}{3} \text{ cm} \simeq 16{,}75$ cm.
2º modo:
120° correspondem a $\dfrac{2\pi}{3}$ rad; daí $\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = \dfrac{16\pi}{3}$ cm.

**5.** Seja **u** a distância entre duas marcações sucessivas em $\overline{AB}$.
Temos:

$\overset{\frown}{AMB} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 6u = 6\pi u$

$\overset{\frown}{ADC} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2u = 2\pi u$

$\overset{\frown}{CEB} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 4u = 4\pi u$

O caminho ADCEB tem comprimento $2\pi u + 4\pi u = 6\pi u$.

Assim, concluímos que ambos têm o mesmo comprimento.

**6.** **a)** Se o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 60°, sua medida em radianos é $\dfrac{\pi}{3}$.
O mesmo raciocínio se aplica ao arco $\overset{\frown}{CD}$.

**b)** Para o arco $\overset{\frown}{AB}$ temos: $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\ell_{(\overset{\frown}{AB})}}{R_2} \Rightarrow \ell_{(\overset{\frown}{AB})} = \dfrac{\pi \cdot R_2}{3}$

Para o arco $\overset{\frown}{CD}$ temos: $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\ell_{(\overset{\frown}{CD})}}{R_1} \Rightarrow \ell_{(\overset{\frown}{CD})} = \dfrac{\pi \cdot R_1}{3}$

$$\frac{\ell_{(\overset{\frown}{AB})}}{\ell_{(\overset{\frown}{CD})}} = \frac{\frac{\pi \cdot R_2}{3}}{\frac{\pi \cdot R_1}{3}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2}{\frac{3R_2}{2}} = \frac{2}{3}$$

**7.** $\dfrac{180°}{15°} = 12$; assim, a medida de 15° corresponde a $\dfrac{\pi}{12}$ rad.
Daí, como $\alpha = \dfrac{\ell}{r} \Rightarrow \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\ell}{15} \Rightarrow \dfrac{3{,}14}{12} = \dfrac{\ell}{15} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ell = 3{,}925$ cm.

**8.** Em uma volta, o andarilho percorre a distância de:
$2\pi \cdot 40 = 80\pi = 80 \cdot 3{,}14 = 251{,}2$ (251,2 m)
O número de voltas é, portanto, $\dfrac{7\,536}{251{,}2} = 30$.

**9.** **a)** $60° = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad} \Rightarrow \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{18}{r} \Rightarrow r = \dfrac{54}{\pi} \simeq 17{,}19$
Isto é, $r \simeq 17{,}19$ cm.

**b)** Se o arco mede 1 rad, por definição, seu comprimento é igual ao raio; logo, 18 cm.

**10.** $AB = BC = 6 \Rightarrow \text{med}(B\hat{C}A) = 30°$;
$\text{med}(A\hat{B}C) = 120°$; $\text{med}(A\hat{B}D) = 60°$

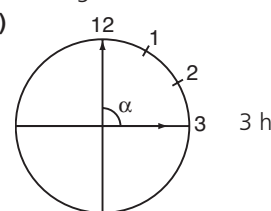
**a)** $\dfrac{\pi}{3}$ rad

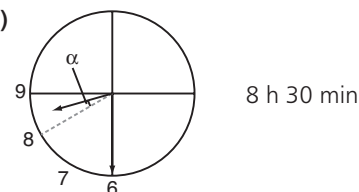
**b)** $\dfrac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 6 \text{ cm} = 2\pi$ cm

**11.** $\begin{cases} \pi \text{ — } 180° \\ x \text{ — } 72° \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{5}$

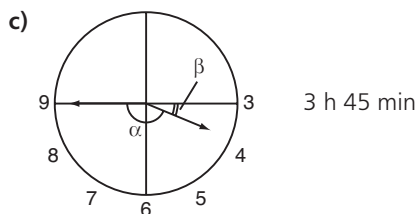
$\alpha = \dfrac{\ell}{r} \Rightarrow r = \dfrac{\ell}{\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{157}{\frac{2\pi}{5}} = 125$, ou seja, $r = 125$ m

**12.** **a)**

O ângulo $\alpha$ mede $3 \cdot 30° = 90°$.

**b)**

Como em 60 minutos o ponteiro menor (das horas) percorre 30°, em 30 minutos ele percorrerá 15°.
Assim, $\alpha = 15°$.
O ângulo pedido mede $2 \cdot 30° + 15° = 75°$.

c)

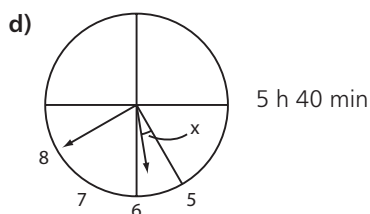
3 h 45 min

O ângulo pedido mede $\alpha$; para determinar $\beta$, podemos fazer a seguinte proporção, para o ponteiro das horas:

$$\begin{cases} 60 \text{ min} — 30° \\ 45 \text{ min} — \beta \end{cases} \Rightarrow \beta = 22°\,30'$$

Como $\alpha + \beta = 180°$, temos:

$\alpha = 180° - 22°\,30' = 157°\,30'$

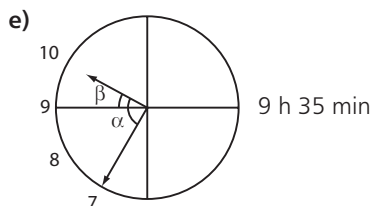
d)

5 h 40 min

Para o ponteiro menor, temos:

$$\begin{cases} 60 \text{ min} — 30° \\ 40 \text{ min} — x \end{cases} \Rightarrow x = 20°$$

O ângulo pedido mede $(30° - x) + 2 \cdot 30°$, isto é, $10° + 60° = 70°$.

e)

9 h 35 min

$\alpha = 60° + \beta$

Cálculo de $\beta$:

$$\begin{cases} 30° — 60 \text{ min} \\ \beta — 35 \text{ min} \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{35 \cdot 30}{60} = 17{,}5$$

$\alpha = 60° + 17°\,30' \Rightarrow \alpha = 77°\,30'$

**13.** O ponteiro dos minutos percorre 360° em 60 min; em 20 min descreverá um arco de medida $\frac{360°}{3} = 120°$. É preciso, portanto, determinar o comprimento de um arco de 120° contido em uma circunferência de raio 12 cm. Temos:

$$\begin{cases} 2\pi \cdot 12 — 360° \\ \ell — 120° \end{cases} \Rightarrow \ell = 8\pi \text{ cm}$$

Usando a aproximação dada:

$\ell = 8 \cdot 3{,}1 \Rightarrow \ell = 24{,}8$ cm

**14.** $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

Como $AB = BC = x$, temos $2x^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x = 10$ cm

O raio de cada circunferência mede 5 cm.

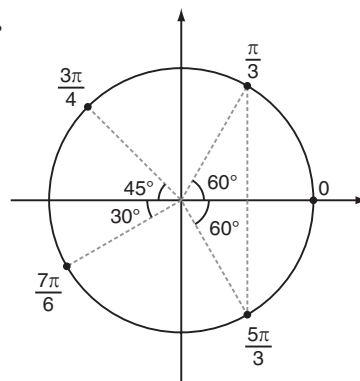
Comprimento do arco $\overset{\frown}{EH}$: $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 5 \text{ cm} = \frac{5\pi}{2}$ cm

Analogamente, os arcos $\overset{\frown}{HG}$, $\overset{\frown}{GF}$ e $\overset{\frown}{FE}$ também têm comprimento $\frac{5\pi}{2}$ cm.

Assim, o comprimento do trajeto, em cm, é:

$$\underbrace{10}_{AB} + \underbrace{10}_{BC} + \underbrace{10}_{CD} + \underbrace{5}_{DE} + \underbrace{4 \cdot \frac{5\pi}{2}}_{EHGFE} + \underbrace{5}_{EA} =$$

$= (40 + 10\pi) = 10(4 + \pi)$

**15.**

**16.** Primeiro quadrante: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4}{3}$.

Segundo quadrante: $\frac{2\pi}{3}, 2, \frac{3\pi}{5}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{12}, \sqrt{7}$.

Terceiro quadrante: $\frac{4\pi}{3}, \frac{15\pi}{11}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}$.

Quarto quadrante: $\frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{8}, 5$.

**17.** **P**: $\frac{\pi}{4}$

**Q**: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

**R**: $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

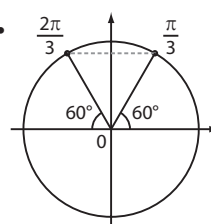
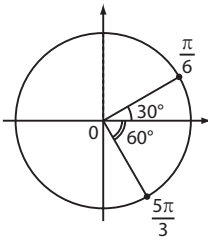
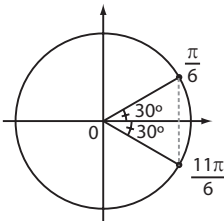
**18.** **A**: $x = 0$; **B**: $x = \frac{\pi}{2}$; **C**: $x = \pi$; **D**: $x = \frac{3\pi}{2}$

**19.** Como o triângulo é equilátero, $\text{med}(\overset{\frown}{AC}) = \text{med}(\overset{\frown}{AB}) =$

$= \text{med}(\overset{\frown}{BC}) = \frac{360°}{3} = 120° = \frac{2\pi}{3}$ rad

Como **A** é imagem de $\frac{\pi}{2}$, **B** é imagem de $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$

e **C** é imagem de $\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi + 4\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

**20.**

Simetria em relação ao eixo vertical.

**21.** a)

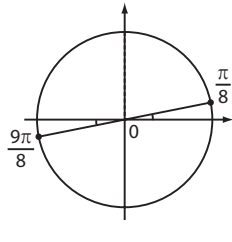
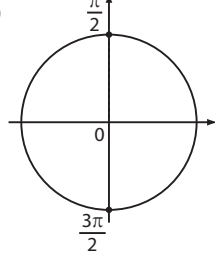
Não há simetria.

c)

Simetria em relação ao centro da circunferência.

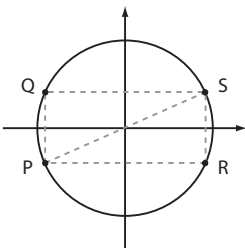
b)

Simetria em relação ao eixo horizontal.

d)

Simetria em relação ao eixo horizontal (ou em relação ao centro da circunferência).

**22.** a) Observemos que $\frac{11\pi}{10} = \frac{10\pi}{10} + \frac{\pi}{10} = \pi + \frac{\pi}{10}$ (em graus: 180° + 18° = 198°).

Assim, **P** pertence ao 3º quadrante.

b)

**Q**: $\pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$

**S**: $\frac{\pi}{10}$

**R**: $2\pi - \frac{\pi}{10} = \frac{19\pi}{10}$

**23.** a) $\text{med}(\widehat{AB}) = \text{med}(\widehat{BC}) = \ldots = \text{med}(\widehat{FA}) =$

$= \frac{360°}{6} = 60° \left(\text{ou } \frac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$

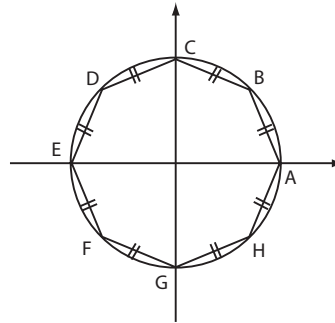
**A**: 0 | **D**: $\pi$

**B**: $\frac{\pi}{3}$ | **E**: $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

**C**: $\frac{2\pi}{3}$ | **F**: $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

b) Cada um dos triângulos da figura é equilátero; veja o triângulo AOB: AO = BO = 1 (raio); como med(AÔB) = 60° e AOB é isósceles, segue que med(BÂO) = med(AB̂O) = 60°. Logo, AOB é equilátero.

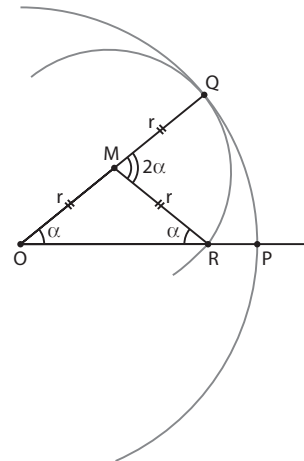
- O perímetro do hexágono é $6 \cdot 1 = 6$ u.c.
- A área do hexágono é igual à área de seis triângulos equiláteros congruentes entre si, ou seja, $6 \cdot \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.a.

**24.** Observe que $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$; assim, cada um dos arcos assinalados abaixo mede $\frac{\pi}{4}$.

Temos,

**A**: 0; **B**: $\frac{\pi}{4}$; **C**: $\frac{\pi}{2}$;

**D**: $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$; **E**: $\pi$; **F**: $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$;

**G**: $\frac{3\pi}{2}$; **H**: $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

## Desafio

- O arco $\widehat{PQ}$ está contido na circunferência de centro **O** e raio 2r, e seu comprimento é 5 cm e sua medida é $\alpha$ radianos.

  Então: $\alpha = \frac{5}{2r} \Rightarrow \alpha \cdot 2r = 5$ (*)

- O arco $\widehat{QR}$ está contido na circunferência de centro **M** e raio **r** e sua medida é $2\alpha$ radianos.

  Então: $2\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \ell = r \cdot 2\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \ell = 5$ cm

# CAPÍTULO 2 Razões trigonométricas na circunferência

## Exercícios

**1.** $y = \dfrac{0 + 1 - (-1)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$

**2.** a) $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -\text{sen } \frac{\pi}{2} = -1$

b) $\text{sen } \pi = 0$

**c)** $\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

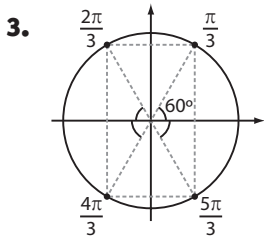
**d)** $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

**e)** $\text{sen } 225° = -\text{sen } 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**f)** $\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**g)** $\text{sen } 2\pi = 0$

**h)** $\text{sen } 330° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$

**3.**

$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \text{sen } \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } \frac{4\pi}{3} = \text{sen } \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

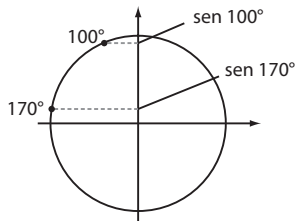
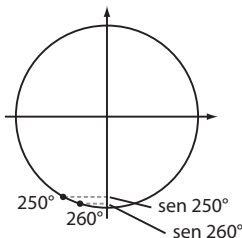
**4.** $\text{sen } \frac{2\pi}{3} = \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } \frac{5\pi}{4} = \text{sen } \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } \frac{4\pi}{3} = \text{sen } \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \text{sen } \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**5. a)** $\text{sen } 75° < \text{sen } 85°$

**b)** $\text{sen } 100° > \text{sen } 170°$

**c)** $\text{sen } 250° > \text{sen } 260°$

**d)** $\text{sen } 300° > \text{sen } 290°$

**6. a)** $\text{sen } 130° = \text{sen } 50° = 0{,}76604$

**b)** $\text{sen } 230° = -\text{sen } 50° = -0{,}76604$

**c)** $\text{sen } 320° = -\text{sen } 40° = -0{,}64279$

**d)** $\text{sen } \frac{\pi}{5} = \text{sen } 36° = 0{,}58779$

**e)** $\text{sen } \frac{3\pi}{5} = \text{sen } 108° = \text{sen } 72° = 0{,}95106$

**7. a)** 3° tem imagem no 1º Q; seno é positivo.

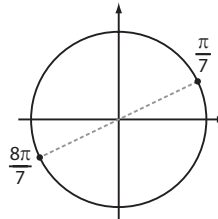
**b)** $3 < 3{,}14$; sen 3 é positivo, pois 3 tem imagem no 2º Q.

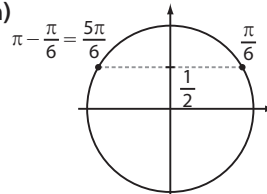
**c)** $5 > 4{,}71$ $\left(\text{ou } \frac{3\pi}{2}, \text{ aproximadamente}\right)$. Logo, 5 tem imagem no 4º Q e sen 5 é negativo.

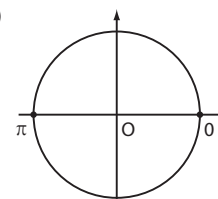
**d)** 100° tem imagem no 2º Q; seno é positivo.

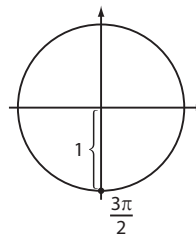
**e)** 200° tem imagem no 3º Q; seno é negativo.

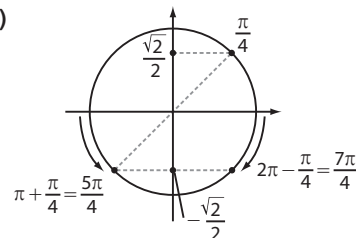
**8. a)** $\frac{\pi}{7}$ tem imagem no 1º quadrante; $\text{sen } \frac{\pi}{7} = a > 0$.

**b)** Observe que $\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$:

$\text{sen } \frac{8\pi}{7} = -\text{sen } \frac{\pi}{7} = -a$

**9. a)**

$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

**b)**

$S = \{0, \pi\}$

**c)**

$S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

**d)**

$S = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

**e)** Como, para todo $x \in [0, 2\pi]$, $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$, a equação sen x = 2 não apresenta solução.

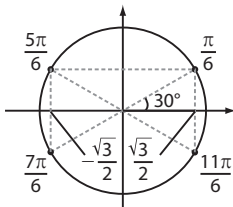
**f)** $4 \text{ sen}^2 x = 3 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

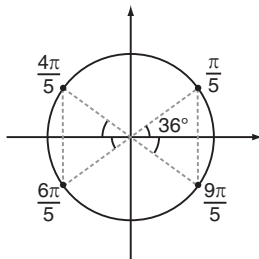
**10.** A calculadora estava configurada em RAD e não em DEG (o modo DEG fornece o valor do seno de um ângulo medido em graus).
Observe que x = 4 tem imagem no 3º quadrante $\left(\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}\right)$ e sen 4 < 0; já o arco de medida 4° tem imagem no 1º quadrante e, portanto, sen 4° > 0.

**11. a)** $y = \frac{0 - (-1)}{\frac{1}{2} \cdot 1 + 0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

**b)** $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**12.**

$\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**13.**

$\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{9\pi}{5} > 0$

$\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{6\pi}{5} < 0$

**14. a)** $\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**b)** $\cos 90° = 0$

**c)** $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

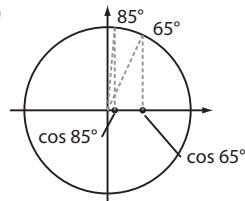
**d)** $\cos \pi = -1$

**e)** $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

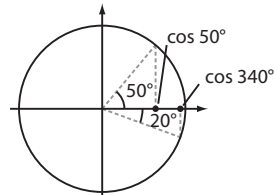
**f)** $\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

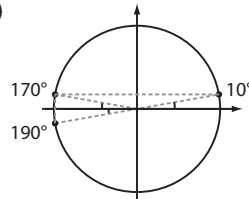
**g)** $\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

**h)** $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$

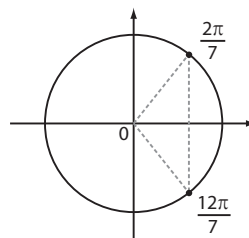
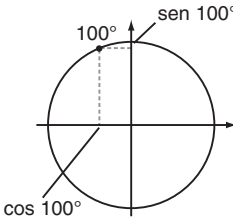
**15. a)**

$\cos 65° > \cos 85°$

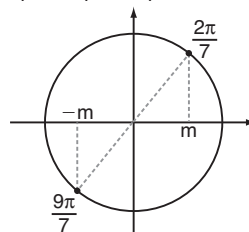
**b)** $\begin{cases} \cos 89° > 0 \\ \cos 91° < 0 \end{cases} \Rightarrow \cos 91° < \cos 89°$

**c)**

$\cos 50° < \cos 340°$

**d)**

$\cos 190° = \cos 170°$

**16.** $k = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1$
$k = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$k = 2 \Rightarrow \cos \pi = -1$
$k = 3 \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
A soma é: $1 + 0 + (-1) + 0 = 0$

**17. a)** Observe que $\frac{12\pi}{7} = 2\pi - \frac{2\pi}{7}$

Logo, $\cos\frac{12\pi}{7} > 0$, isto é, $m > 0$.

**b)** $\frac{9\pi}{7} = \frac{7\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} = \pi + \frac{2\pi}{7}$

Logo, $\cos\frac{9\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7} = -m$.

**18. a)** $0 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{2}$ **(F)**

$\cos 90° - \cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$

**b)** $\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ **(V)**

**c)** Como $\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$, os números reais 1 e 2 têm imagens, respectivamente, no 1º e no 2º quadrantes. Daí $\cos 1 > 0$ e $\cos 2 < 0$, de onde concluímos que $\cos 2 < \cos 1$; **(V)**

**d)**

Como $|\text{sen}\,100°| > |\cos 100°|$, segue que $\text{sen}\,100° + \cos 100° > 0$. Observe que $\text{sen}\,100° > 0$ e $\cos 100° < 0$; **(F)**

**e)** $\frac{3\pi}{2}\,(\simeq 4{,}71) < 6 < 2\pi\,(\simeq 6{,}28)$, assim o número real 6 tem imagem no 4º quadrante e $\cos 6 > 0$; **(F)**

**f)** O raio da circunferência trigonométrica é unitário; **(F)**

**19.** $OA = 1$

$OB = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

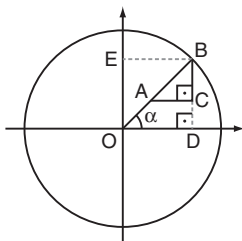
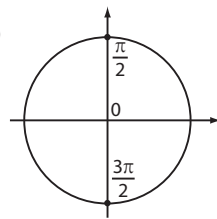
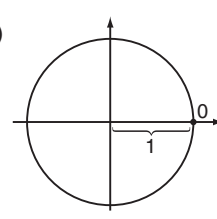
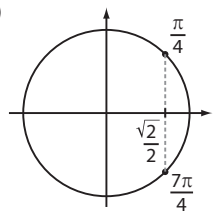
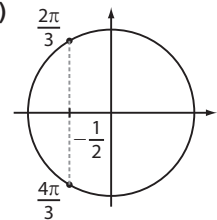
$AB = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Perímetro: $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ u.c.

Área: $\frac{OB \cdot AB}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ u.a.

**20.** $OB = 1$; $AB = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$BD = OE = \text{sen}\,\alpha$

$OD = \cos\alpha$

$\triangle ABC \sim \triangle OBD \Rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{AC}{OD} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{0{,}5}{1} = \frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{BC}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow \begin{cases} AC = \frac{1}{2}\cos\alpha \\ BC = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$

A área do triângulo ABC é:

$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\cos\alpha \cdot \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{8}$

**21. a)**

$S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

**c)**

$S = \{0\}$

**b)**

$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

**d)**

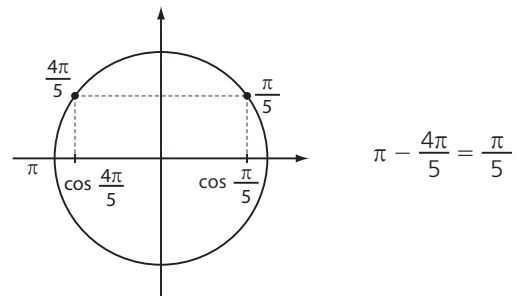
$S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

**e)** $3\cos x + 6 = 0 \Rightarrow \cos x = -2$ e, como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, segue $S = \varnothing$.

**f)** $\cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

**22.** Como $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, $\frac{4\pi}{5}$ tem imagem no 2º quadrante.

$\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$

Assim, Juliana deverá obter o valor de $\cos\frac{\pi}{5}$ na calculadora:

MODE → RAD

cos → ( → π → ÷ → 5 →

→ ) → = → 0,809

Logo, $\cos\frac{4\pi}{5} = -0{,}809$.

**23. a)** $\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

**b)** $\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

c) $\text{sen } \frac{2\pi}{3} = \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2};$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

**24.** $\text{sen}^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \xRightarrow{x \in 4^{\underline{o}} Q} \text{sen } x = -\frac{4}{5}$

**25.** $\text{sen}^2 \alpha = \frac{1}{9}$, $\cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$ $\Rightarrow \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \neq 1$; não.

**26.** $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

Como $x \in 3^{\underline{o}}$ Q, $\cos x < 0$; $\cos x = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$

**27.** a) $\cos^2 74° = 1 - \text{sen}^2 74° = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2 =$

$= 1 - \frac{576}{625} = \frac{49}{625} \Rightarrow \cos 74° = \frac{7}{25}$

b) $\text{sen } 16° = \cos 74°$, pois $16° + 74° = 90°$.

Assim, $\text{sen } 16° = \frac{7}{25}$.

c) $\cos 16° = \text{sen } 74° = \frac{24}{25}$

d) $\text{sen } 254° = -\text{sen } 74°$, pois $180° + 74° = 254°$

Logo, $\text{sen } 254° = -\frac{24}{25}$.

e) $\cos 164° = -\cos (180° - 164°) = -\cos 16°$

Logo, $\cos 164° = -\frac{24}{25}$.

**28.** $\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

**29.** $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{m}{2}\right)^2 + (m - 1)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5m^2}{4} - 2m = 0 \Rightarrow m\left(\frac{5m}{4} - 2\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 0$ ou $m = \frac{8}{5}$

Observe que, para esses valores de **m**, $-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$.

**30.** Sim. $\text{sen } 20° = \cos 70°$, pois $20°$ e $70°$ são ângulos complementares, $\text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 70° = \cos^2 70° + \text{sen}^2 70° = 1$

**31.** $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-3 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 10 \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$\xRightarrow{\alpha \in 2^{\underline{o}} Q} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ e $\text{sen } \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Assim, $y = \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

**32.** a) $\text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

b) $\text{tg } 180° = \text{tg } 0° = 0$

c) $\text{tg } 210° = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) Não existe tg 90°.

e) $\text{tg } 240° = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

**33.** a) Não existe $\text{tg } \frac{3\pi}{2}$

b) $\text{tg } 0 = 0$

c) $\text{tg } \frac{5\pi}{3} = -\text{tg } \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

d) $\text{tg } \frac{3\pi}{4} = \text{tg } \frac{7\pi}{4} = -1$

e) $\text{tg } \frac{11\pi}{6} = -\text{tg } \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**34.** $y = \frac{2 \text{ sen } 30° - 4 \cos 30° + \text{tg } 60°}{\cos 120° - \text{sen } 60°} =$

$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-1 - \sqrt{3}} =$

$= \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}}{-1 + \sqrt{3}} = \frac{-2(1 - \sqrt{3})^2}{1 - 3} =$

$= 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$

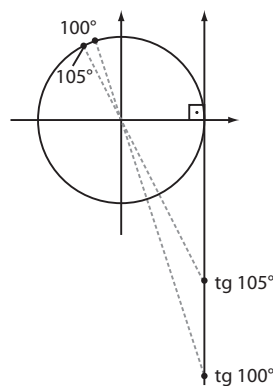
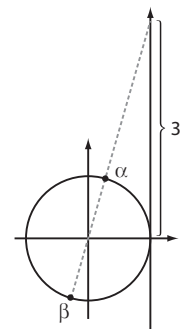
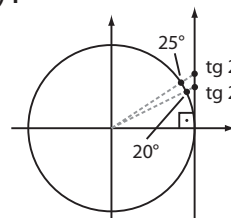
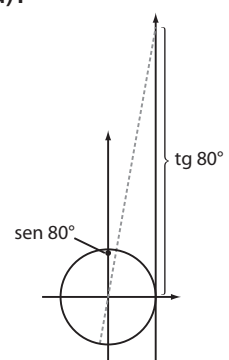
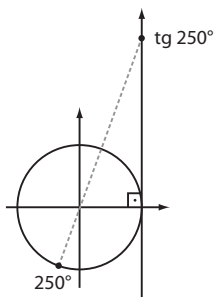
**35.** a) $\text{tg } 200° > 0$

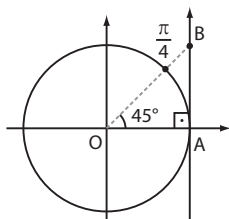
b) $\text{tg } 310° < 0$

c) $\text{tg } 4 > 0$

d) $\text{tg } 2 < 0$

e) $\text{tg } 1 > 0$

**36.** a) V

c) V

b) F

d) F

**e)** V

**f)** F; tg $2\pi = 0$

**37.**

- $\triangle AOB$ é isósceles, pois med($A\hat{O}B$) = med($A\hat{B}O$) = 45°. Logo, OA = OB = 1 (note que $\overline{OA}$ é o raio da circunferência trigonométrica).
- $\text{tg}\,\frac{\pi}{4}$ é a medida algébrica de $\overline{AB}$, que é 1. Logo, $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$.

**38.** **a)** tg 158° = tg (180° − 22°) = −tg 22° = −0,4
**b)** tg 202° = tg (180° + 22°) = tg 22° = 0,4
**c)** tg 338° = tg (360° − 22°) = −tg 22° = −0,4

**39.** $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \xRightarrow{\alpha \in 2^{\circ}\,Q}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

**40.** $\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$

Como $\alpha \in 4^{\circ}$ quadrante, $\text{sen}\,\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = -2\sqrt{6}$

**41.** $\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = -4 \Rightarrow \text{sen}\,x = -4\cos x;$

$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 16\cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{17} \xRightarrow{x \in 2^{\circ}\,Q} \cos x = -\frac{\sqrt{17}}{17}$ e

$\text{sen}\,x = -4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right) = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

**a)** $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

**b)** $-\frac{\sqrt{17}}{17}$

**42.** **a)** $\frac{\text{sen}\,58^{\circ}}{\cos 58^{\circ}} = \frac{8}{5} \Rightarrow \text{sen}\,58^{\circ} = \frac{8 \cdot \cos 58^{\circ}}{5}$

Sabendo que $\text{sen}^2\,58^{\circ} + \cos^2 58^{\circ} = 1$, temos:

$\left(\frac{8 \cdot \cos 58^{\circ}}{5}\right)^2 + \cos^2 58^{\circ} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{64}{25}\cos^2 58^{\circ} + \cos^2 58^{\circ} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 89\cos^2 58^{\circ} = 25 \Rightarrow \cos 58^{\circ} = \frac{5}{\sqrt{89}} = \frac{5\sqrt{89}}{89}$

Daí $\text{sen}\,58^{\circ} = \frac{8}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}\sqrt{89}}{89} = \frac{8\sqrt{89}}{89}$

**b)** $\text{sen}\,32^{\circ} = \cos 58^{\circ} = \frac{5\sqrt{89}}{89}$

**c)** $\text{tg}\,302^{\circ} = \text{tg}\,(360^{\circ} - 58^{\circ}) = -\text{tg}\,58^{\circ} = -\frac{8}{5}$

**d)** $\text{tg}\,122^{\circ} = \text{tg}\,302^{\circ} = -\frac{8}{5}$

## Desafio

**a)** $\cos^2 x = \text{sen}^2\,x \Rightarrow \cos x = \pm\text{sen}\,x \Rightarrow$

$\Rightarrow$
- $\cos x = \text{sen}\,x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- ou
- $\cos x = -\text{sen}\,x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

**b)** Como $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2\,x$, podemos escrever:

$1 - \text{sen}^2\,x + 2 - 3\,\text{sen}^2\,x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4\,\text{sen}^2\,x + 3 = 0 \Rightarrow \text{sen}^2\,x = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$
- $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$
- ou
- $\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

# CAPÍTULO 3 Trigonometria em triângulos quaisquer

## Exercícios

**1.**

$\frac{8}{\text{sen}\,45^{\circ}} = \frac{x}{\text{sen}\,60^{\circ}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{8\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x = 4\sqrt{6}$ cm

**2.** $\text{med}(\hat{C}) = 180° - 140° - 15° = 25°$

$\dfrac{10}{\text{sen } 140°} = \dfrac{BC}{\text{sen } 15°}$;

como sen 140° = sen 40° = 0,64279, temos:

$\dfrac{10}{0{,}64279} = \dfrac{BC}{0{,}25882} \Rightarrow BC \simeq 4{,}03 \text{ cm}$

$\dfrac{AB}{\text{sen } 25°} = \dfrac{10}{0{,}64279} \Rightarrow \dfrac{AB}{0{,}42262} = \dfrac{10}{0{,}64279} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \simeq 6{,}57 \text{ cm}$

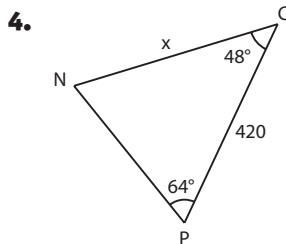
**3.** $\dfrac{6}{\text{sen } 30°} = \dfrac{y}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \dfrac{6}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow y = 6\sqrt{2} \text{ cm}$

$\text{med}(\hat{X}) = 180° - (45° + 30°) = 105°$

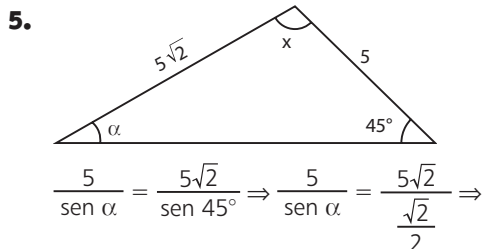
Temos: $\dfrac{x}{\text{sen } 105°} = \dfrac{6}{\text{sen } 30°}$

Como sen 105° = sen (180° − 105°) = sen 75°, temos:

$\dfrac{x}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \dfrac{6}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \dfrac{4x}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 12 \Rightarrow$

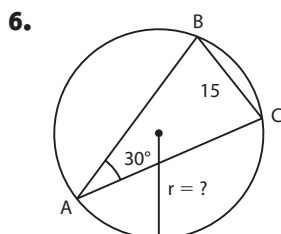
$\Rightarrow x = 3\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) \text{ cm}$

$\text{med}(C\hat{N}P) = 180° - (48° + 64°) = 68°$

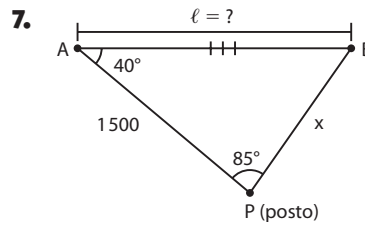
$\dfrac{x}{\text{sen } 64°} = \dfrac{420}{\text{sen } 68°} \Rightarrow \dfrac{x}{0{,}89879} = \dfrac{420}{0{,}92718} \Rightarrow x \simeq 407 \text{ m}$

**5.**

$\dfrac{5}{\text{sen } \alpha} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \dfrac{5}{\text{sen } \alpha} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{5}{\text{sen } \alpha} = 10 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$ (Observe que $\alpha$ está oposto ao lado de medida 5 e 45° está oposto ao lado de medida $5\sqrt{2}$; isso mostra que $\alpha < 45° \Rightarrow \alpha = 30°$.)

Daí x = 180° − 30° − 45° = 105°

**6.**

$\dfrac{15}{\text{sen } 30°} = 2r \Rightarrow \dfrac{15}{\frac{1}{2}} = 2r \Rightarrow r = 15 \text{ cm}$

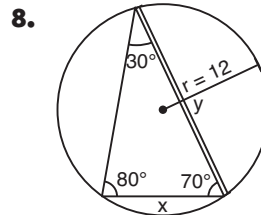
**7.**

$\text{med}(A\hat{B}P) = 180° - 40° - 85° = 55°$

**a)** $\dfrac{1500}{\text{sen } 55°} = \dfrac{\ell}{\text{sen } 85°} \Rightarrow \dfrac{1500}{0{,}82} = \dfrac{\ell}{0{,}99} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell \simeq 1810{,}97$ (aproximadamente 1 811 m)

**b)** $\dfrac{x}{\text{sen } 40°} = \dfrac{1500}{\text{sen } 55°} \Rightarrow \dfrac{x}{0{,}64} = \dfrac{1500}{0{,}82} \Rightarrow$

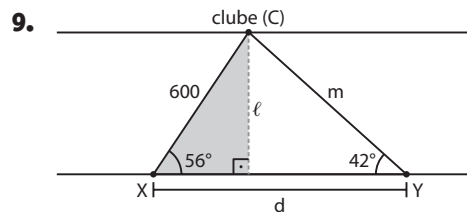
$\Rightarrow x \simeq 1170{,}73$ (aproximadamente 1 171 m)

**8.**

**a)** **x** é a medida de seu lado menor (opõe-se ao ângulo de 30°).

$\dfrac{x}{\text{sen } 30°} = 2r \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{1}{2}} = 2r \Rightarrow x = 12 \text{ m}$

**b)** **y** é a medida de seu lado maior (opõe-se ao ângulo de 80°).

$\dfrac{y}{\text{sen } 80°} = 2r \Rightarrow \dfrac{y}{0{,}98481} = 2 \cdot 12 \Rightarrow y \simeq 23{,}6 \text{ m}$

**9.**

**a)** $\dfrac{m}{\text{sen } 56°} = \dfrac{600}{\text{sen } 42°} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{m}{0{,}83} = \dfrac{600}{0{,}67} \Rightarrow m \simeq 743{,}28 \text{ m}$

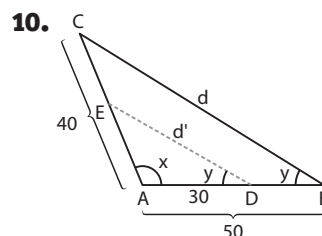
**b)** $\text{med}(X\hat{C}Y) = 180° - (56° + 42°) = 82° \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{d}{\text{sen } 82°} = \dfrac{600}{\text{sen } 42°} \Rightarrow \dfrac{d}{0{,}99} = \dfrac{600}{0{,}67} \Rightarrow$

$\Rightarrow d \simeq 886{,}57 \text{ m}$

**c)** Do triângulo retângulo sombreado, temos:

$\text{sen } 56° = \dfrac{\ell}{600} \Rightarrow 0{,}83 = \dfrac{\ell}{600} \Rightarrow \ell = 498 \text{ m}$

**10.**

**a)** $\triangle ABC$: $\dfrac{d}{\text{sen } x} = \dfrac{40}{\text{sen } y} \Rightarrow \dfrac{d}{\frac{3}{4}} = \dfrac{40}{\frac{3}{7}} \Rightarrow d = 70$ km

**b)** $\triangle EAD \sim \triangle CAB$

$\dfrac{ED}{CB} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow \dfrac{d'}{d} = \dfrac{30}{50} \Rightarrow \dfrac{d'}{70} = \dfrac{30}{50} \Rightarrow d' = 42$ km

**11.** $\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ (observe que $90° < \alpha < 180°$)

Daí, pela lei dos senos, temos:

$\dfrac{4}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{8}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\beta = \dfrac{1}{2} \cdot \text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$

**12. a)** $x^2 = 10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 100 + 256 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 356 - 160 \Rightarrow x^2 = 196 \Rightarrow x = 14$ m

**b)** $x^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 7^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7 \cdot \cos 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 18 + 49 - 42\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = 67 - 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ cm

**c)** $x^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; daí:

$x^2 = 4 + 3 - 4\sqrt{3} \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 7 + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{13}$ cm

**13.** $x^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 2 + 9 - 6\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 11 - 6 \Rightarrow x = \sqrt{5}$

O perímetro do $\triangle RST$ é: $\left(\sqrt{2} + 3 + \sqrt{5}\right)$ cm

**14.** Seja **x** a medida de $\overline{BC}$:

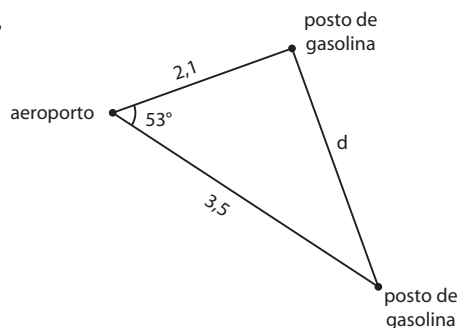
$\left(2\sqrt{7}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + x^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot x \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow 28 = 12 + x^2 - 4\sqrt{3} \cdot x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 8$ ou $x = -2$ (não serve)

Logo, BC = 8 cm

**15.**

aeroporto; posto de gasolina; posto de gasolina; 2,1; 3,5; 53°; d

$d^2 = 2{,}1^2 + 3{,}5^2 - 2 \cdot 2{,}1 \cdot 3{,}5 \cdot \cos 53° \Rightarrow$

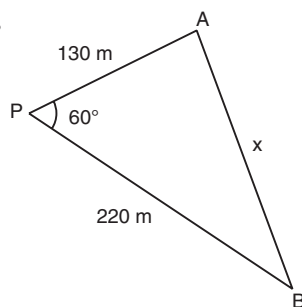
$\Rightarrow d^2 = 4{,}41 + 12{,}25 - 14{,}7 \cdot \cos 53° \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 = 4{,}41 + 12{,}25 - 14{,}7 \cdot 0{,}6 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 = 16{,}66 - 8{,}82 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 = 7{,}84 \Rightarrow d = 2{,}8$ km

**16.**

A; P; B; 130 m; 220 m; 60°; x

$x^2 = 220^2 + 130^2 - 2 \cdot 220 \cdot 130 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 48\,400 + 16\,900 - 28\,600 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 36\,700 \Rightarrow$

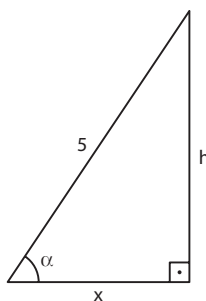
$\Rightarrow x \simeq 191{,}6$ m

**17. a)** $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 45 = 125 - 100\cos\alpha \Rightarrow 100\cos\alpha = 80 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

**b)** $\cos\alpha = \dfrac{x}{5} \Rightarrow \dfrac{4}{5} = \dfrac{x}{5} \Rightarrow x = 4$

$h^2 = 5^2 - x^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow h = 3$ cm

**c)** $A = \dfrac{BC \cdot h}{2} = \dfrac{10 \cdot 3}{2} = 15 \Rightarrow A = 15\ \text{cm}^2$

**18.** Pela lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 4 + 3 - 4\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 7 - 2 \cdot 3 = 1 \Rightarrow x = 1$

Pela lei dos senos, temos:

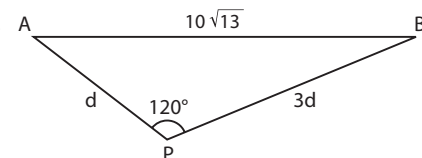
$\dfrac{x}{\text{sen } 30°} = \dfrac{\sqrt{3}}{\text{sen } y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\text{sen } y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 60°$

e $\text{med}(\hat{C}) = 180° - 60° - 30° = 90°$

O triângulo ABC é retângulo em **C**.

**19.**

$\left(10\sqrt{13}\right)^2 = d^2 + (3d)^2 - 2 \cdot d \cdot 3d \cdot \cos 120° \Rightarrow$

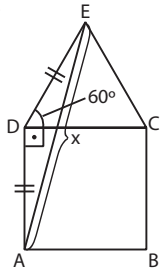
$\Rightarrow 13 \cdot 100 = d^2 + 9d^2 - 6d^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1300 = 10d^2 + 3d^2 \Rightarrow 13d^2 = 1300 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 = 100 \Rightarrow d = 10$ km

PB = 30 km

$\begin{cases} 1 \text{ h} — 50 \text{ km} \\ x — 30 \text{ km} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{5} \text{ h} = \frac{3}{5} \cdot 60 \text{ min} = 36 \text{ min}$

**20.**

med(AD̂E) = 90° + 60° = 150°

Daí, pela lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 150°$

Sabemos que $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x^2 = 36 + 36 - 72 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 72 + 36\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 36\left(2 + \sqrt{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ cm

**21.** AB = R + 0,6R = 1,6R

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow (1,6R)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2,56R^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2,56\cancel{R^2} = \cancel{R^2}(2 - 2 \cos \alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2,56 = 2 - 2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -0,28 = -\frac{28}{100} = -\frac{7}{25}$

$\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\, \alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\, \alpha = \frac{576}{625} \Rightarrow \text{sen}\, \alpha = \frac{24}{25} \left(\text{note que } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$

Por fim, $\text{tg}\, \alpha = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$.

**22.** **a)** $A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \text{sen } 45° = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 1,5 \text{ cm}^2$

**b)** $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 135° = 8 \cdot \text{sen } 45° = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= 4\sqrt{2} \Rightarrow A = 4\sqrt{2} \text{ cm}^2$

**c)** $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 = 17,5 \Rightarrow A = 17,5 \text{ cm}^2$

**d)** $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \text{sen } 60° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 5\sqrt{3} \text{ cm}^2$

**23.** **a)** $2^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 = 25 - 24 \cos \alpha \Rightarrow 24 \cos \alpha = 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$

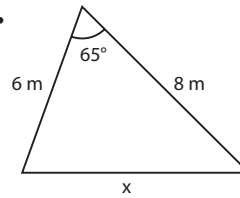
**b)** $\text{sen}^2\, \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\, \alpha = 1 - \left(\frac{21}{24}\right)^2 = 1 - \frac{441}{576} = \frac{135}{576} \xRightarrow{\alpha \text{ agudo}}$

$\Rightarrow \text{sen}\, \alpha = \frac{3\sqrt{15}}{24} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

**c)** $A = \frac{3 \cdot 4 \cdot \text{sen}\, \alpha}{2} = 6 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{24} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2$

**24.**

$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \text{sen } 65° = 24 \cdot 0,9 = 21,6 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 21,6 \text{ m}^2$

$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos 65°$ (*); temos:

$\cos^2 65° = 1 - \text{sen}^2\, 65° = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 65° = \frac{\sqrt{19}}{10} = \frac{4,4}{10} = 0,44$

Daí em (*):

$x^2 = 36 + 64 - 96 \cdot 0,44 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 100 - 42,24 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 57,76 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 7,6$; o terceiro lado mede 7,6 m.

**25.** **a)** $10\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 5$ cm

OB = OC = 5 cm ⇒ △BOC é isósceles de base $\overline{BC}$.

Como $\overline{AC}$ é diâmetro, o triângulo ABC é retângulo em $\hat{B}$.

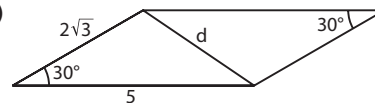
$\text{med}(O\hat{B}C) = 90° - 75° = 15° \Rightarrow \text{med}(O\hat{C}B) = 15° \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{med}(B\hat{O}C) = 180° - 15° - 15° = 150°$

Daí, a área do △BOC é: $A = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \text{sen } 150° =$

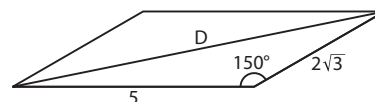
$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{4} \Rightarrow A = \frac{25}{4} \text{ cm}^2$

**b)** $\text{med}(A\hat{B}C) = 90°$, pois o △ABC está inscrito na semicircunferência de diâmetro $\overline{AC}$.

**26.** **a)**

$d^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 5^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 = 12 + 25 - 20\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 = 37 - 30 = 7 \Rightarrow$

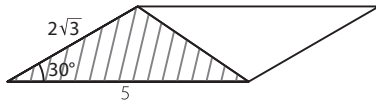
$\Rightarrow d = \sqrt{7}$ cm

$D^2 = 5^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow D^2 = 25 + 12 - 20\sqrt{3} \cdot (-\cos 30°) \Rightarrow$

$\Rightarrow D^2 = 37 - 20\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow D^2 = 37 + 30 = 67 \Rightarrow$

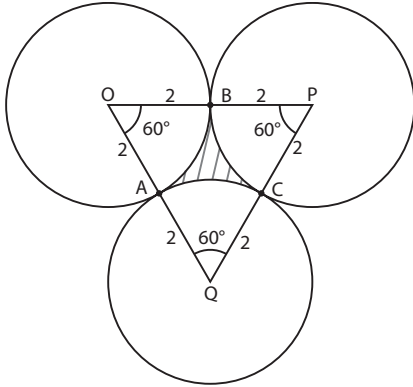
$\Rightarrow D = \sqrt{67}$ cm

**b)** A área do triângulo hachurado é:

$A = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 \cdot \text{sen } 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 5\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$

A área do paralelogramo é $2 \cdot A = 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

Isto é, a área é $2A = 5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

**27.**

**a)** $A_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\triangle AOB} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2$

**b)** O triângulo OPQ é equilátero e seu lado mede 4 cm; sua área é: $A_{\triangle OPQ} \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow A_{\triangle OPQ} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

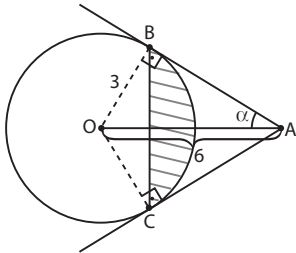
A área de um setor circular de 60° contido num círculo de raio 2 cm é: $A_{setor} = \frac{\pi \cdot 2^2}{6} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow A_{setor} = \frac{2\pi}{3}\ \text{cm}^2$

A área da região hachurada é: $A = A_{\triangle OPQ} - 3 \cdot A_{setor} =$

$= 4\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = \left(4\sqrt{3} - 2\pi\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \left(4\sqrt{3} - 2\pi\right)\ \text{cm}^2$

**28.**

$\triangle$AOB:

$\text{sen } \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha \text{ agudo}} \alpha = 30°$

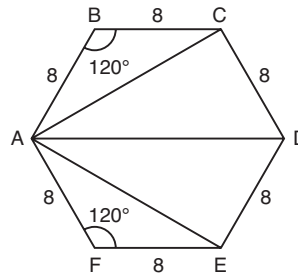
$\text{med}\left(A\hat{O}B\right) = 180° - 90° - 30° = 60°$

No $\triangle$BOC, temos que $\text{med}\left(B\hat{O}C\right) = 2 \cdot 60° = 120°$ (observe que são congruentes os triângulos ABO e ACO).

A área do setor de 120° no círculo de raio 3 cm é $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3\ \text{cm})^2 = 3\pi\ \text{cm}^2$

Como a área do $\triangle$BOC é $\frac{1}{2} \cdot (3\ \text{cm}) \cdot (3\ \text{cm}) \cdot \text{sen } 120° =$

$= \frac{9\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$, a área hachurada é $\left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)\ \text{cm}^2$.

## Desafio

O lado do hexágono mede $\frac{48\ \text{cm}}{6} = 8$ cm.

$\triangle$ABC:

$\text{med}\left(A\hat{B}C\right) = 120°$

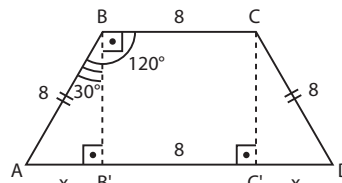
$(AC)^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AC)^2 = 128 - 128 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (AC)^2 = 128 + 64 = 192 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 8\sqrt{3}$ cm

$\triangle ABC \equiv \triangle AFE \Rightarrow AE = 8\sqrt{3}$ cm

Trapézio ABCD é isósceles

$\triangle ABB' \Rightarrow \text{sen } 30° = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 4$ cm

Assim, AD = (4 + 8 + 4) cm = 16 cm

A soma pedida é:

$AC + AE + AD = 8\sqrt{3}\ \text{cm} + 8\sqrt{3}\ \text{cm} + 16\ \text{cm} =$

$= \left(16\sqrt{3} + 16\right)\ \text{cm} = 16 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)\ \text{cm}$

Portanto, a soma pedida é $16\left(\sqrt{3} + 1\right)$ cm.

CAPÍTULO 4

# Funções trigonométricas

## Exercícios

**1.** 1º quadrante: $\frac{17\pi}{4}\left(\frac{17\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}\right); \frac{41\pi}{5}\left(\frac{41\pi}{5} = 8\pi + \frac{\pi}{5}\right);$

$-\frac{11\pi}{3}\left(-\frac{11\pi}{3} = -2\pi - \frac{5\pi}{3}\right).$

2º quadrante: $-\frac{5\pi}{4}; \frac{26\pi}{3}\left(\frac{26\pi}{3} = 8\pi + \frac{2\pi}{3}\right);$

$-\frac{19\pi}{6}\left(-\frac{19\pi}{6} = -2\pi - \frac{7\pi}{6}\right).$

3º quadrante: $-\frac{3\pi}{4}; \frac{22\pi}{3}\left(\frac{22\pi}{3} = 6\pi + \frac{4\pi}{3}\right);$

$-\frac{49\pi}{10}\left(-\frac{49\pi}{10} = -4\pi - \frac{9\pi}{10}\right)$; 10.

4º quadrante: $-0{,}5$ (observe que $-\frac{\pi}{2} < -0{,}5 < 0$); $\frac{15\pi}{4}\left(\frac{15\pi}{4} = 2\pi + \frac{7\pi}{4}\right)$.

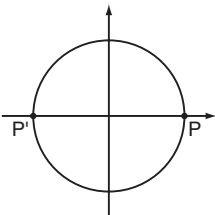
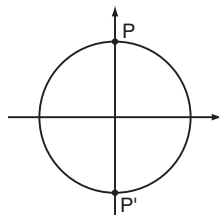
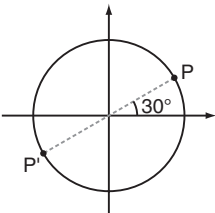
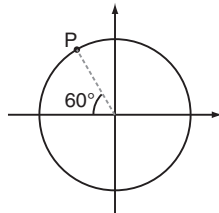
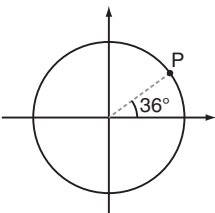
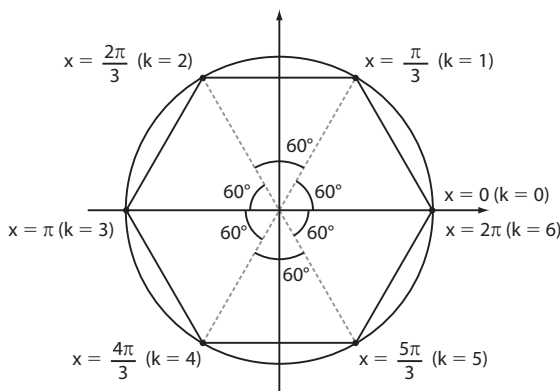
**2.** **A**: $40\pi$ $(40\pi = 20 \cdot 2\pi)$; $-14\pi(-14\pi = 7 \cdot (-2\pi))$; $800\pi$ $(800\pi = 400 \cdot 2\pi)$.

**B**: $\frac{17\pi}{2}\left(\frac{17\pi}{2} = 8\pi + \frac{\pi}{2}\right)$; $-\frac{11\pi}{2}\left(-\frac{11\pi}{2} = -4\pi - \frac{3\pi}{2}\right)$.

**C**: $13\pi$; $-21\pi$ e $-7\pi$.

**D**: $-\frac{5\pi}{2}\left(-\frac{5\pi}{2} = -2\pi - \frac{\pi}{2}\right)$; $\frac{7\pi}{2}\left(\frac{7\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$;

$-\frac{25\pi}{2}\left(-\frac{25\pi}{2} = -12\pi - \frac{\pi}{2}\right)$.

**3.** a)

d)

b)

e)

c)

**4.**

a) Hexágono.

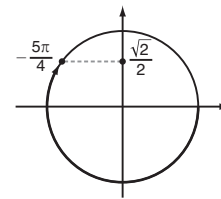
b) Na circunferência trigonométrica, o lado de cada triângulo mede 1 u.c. (medida do raio).

Área do hexágono: $A = 6 \cdot \ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.a.

Perímetro: P = 6 u.c.

**5.** a) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = -1 < 0$

b) $\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

c) $\text{sen}\,\frac{10\pi}{3} = \text{sen}\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

d) $\text{sen}\,850° = \text{sen}\,(2 \cdot 360° + 130°) = \text{sen}\,130° > 0$

e) $\text{sen}\,3\,816° = \text{sen}\,(10 \cdot 360° + 216°) = \text{sen}\,216° < 0$

f) $\text{sen}\,\frac{67\pi}{8} = \text{sen}\left(8\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \text{sen}\,\frac{3\pi}{8} > 0$, pois $\frac{3\pi}{8}$ tem imagem no 1º Q.

**6.** a) $\text{sen}\,4\pi = \text{sen}\,0 = 0$

b) $\text{sen}\,\frac{17\pi}{2} = \text{sen}\left(8\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$

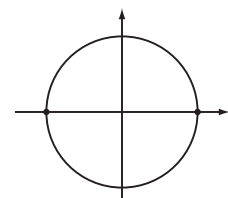
c) $\text{sen}\,\frac{19\pi}{3} = \text{sen}\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

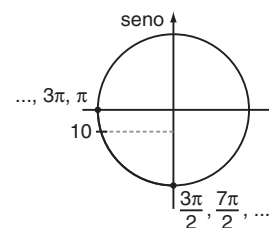
d) $\text{sen}\,1\,290° = \text{sen}\,(3 \cdot 360° + 210°) = \text{sen}\,210° = -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2}$

e) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,\frac{5\pi}{3} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

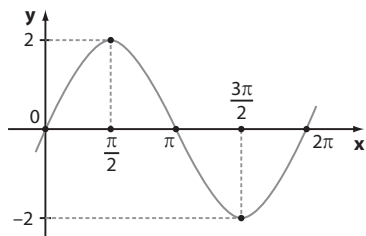
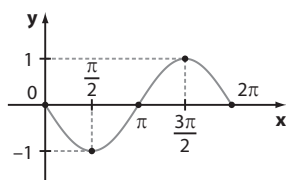
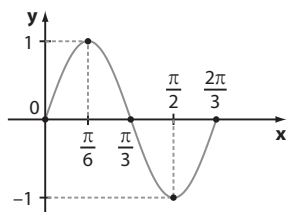
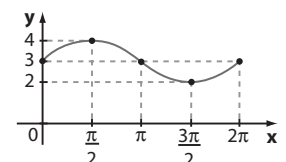
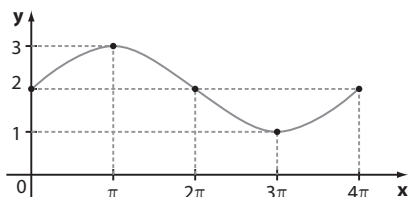
f) $\text{sen}\,\frac{29\pi}{4} = \text{sen}\left(6\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \text{sen}\,\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

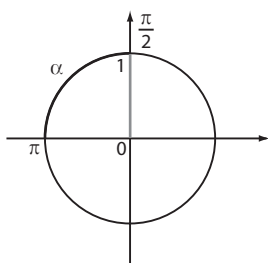
**7.** a) $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right) = \text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(V)**

b) $k = 0 \Rightarrow \text{sen}\,0 = 0$
$k = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\pi = 0$
$k = 2 \Rightarrow \text{sen}\,2\pi = 0$
$k = 3 \Rightarrow \text{sen}\,3\pi = 0$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ **(V)**

c) $\text{sen}\,1\,000° = \text{sen}\,(2 \cdot 360° + 280°) = \text{sen}\,280° < 0$ (280° tem imagem no 4º Q) **(F)**

d) Observe que o número real 10 é maior que $3\pi$ (aproximadamente 9,42) e menor que $\frac{7\pi}{2}$ (aproximadamente 10,99).

Desse modo, o número real 10 tem imagem no 3º quadrante e, assim, sen 10 < 0. **(V)**

e) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{9}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{9}$ **(F)**

**8.** **a)** $p = 2\pi$; $\text{Im} = [-2, 2]$.

**b)** $p = 2\pi$; $\text{Im} = [-1, 1]$.

**c)** $p = \frac{2\pi}{3}$; $\text{Im} = [-1, 1]$.

**d)** $p = 2\pi$; $\text{Im} = [2, 4]$.

**e)** $p = 4\pi$; $\text{Im} = [1, 3]$.

**9.** Devemos ter $-1 \leqslant \text{sen}\,\alpha \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{t+1}{2} \leqslant 1$; multiplicando por 2:
$-2 \leqslant t + 1 \leqslant 2$
Somando $(-1)$, temos:
$-3 \leqslant t \leqslant 1$
$\{t \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant t \leqslant 1\}$

**10.**

$\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi \Rightarrow 0 \leqslant \text{sen}\,\alpha \leqslant 1$; daí:
$0 \leqslant 2m - 3 \leqslant 1 \Rightarrow 3 \leqslant 2m \leqslant 4 \Rightarrow \frac{3}{2} \leqslant m \leqslant 2$
$\left\{m \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \leqslant m \leqslant 2\right\}$

**11.** **a)** $p = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$

**b)** $f_{máx.} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$

**12.** **a)** $t = 0 \Rightarrow h(0) = 6 + 4 \cdot \text{sen}\,0 = 6 + 0 = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow h(0) = 6$ m

**b)** $h(9) = 6 + 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{9\pi}{12}\right) = 6 + 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$
$= 6 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 + 2 \cdot 1{,}4 \Rightarrow h(9) = 8{,}8$ m

**c)** O menor valor possível de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$, $t \in [0, 270]$ é $-1$.
Assim, $h_{mín.} = 6 + 4 \cdot (-1) = 2 \Rightarrow h_{mín.} = 2$ m

**d)** O período de **f** é $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{12}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$.
Logo, são necessários 24 s para a roda-gigante dar uma volta completa.

**e)** $n = \frac{270}{24} = 11{,}25$
Assim, são 11 voltas completas.

**13.** **a)** $\cos 11\pi = \cos(10\pi + \pi) = \cos\pi = -1$

**b)** $\cos 10\pi = \cos(5 \cdot 2\pi) = \cos 0 = 1$

**c)** $\cos\frac{13\pi}{2} = \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

**d)** $\cos\frac{27\pi}{2} = \cos\left(12\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$

**e)** $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

**f)** $\cos(-7\pi) = \cos 7\pi = \cos\pi = -1$

**14.** **a)** $\cos 1\,560° = \cos(\underbrace{1\,440°}_{360° \cdot 4} + 120°) = \cos 120° =$
$= -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

**b)** $\cos 1\,035° = \cos(720° + 315°) = \cos 315° =$
$= \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**c)** $\cos\frac{19\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{7\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} =$
$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**d)** $\cos\frac{22\pi}{3} = \cos\left(6\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} =$
$= -\frac{1}{2}$

**e)** $\cos(-270°) = \cos 90° = 0$

**f)** $\cos\frac{43\pi}{4} = \cos\left(10\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} =$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**15.** $\cos\frac{9\pi}{2} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

$\text{sen}\,\dfrac{9\pi}{2} = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} = 1;$

$\cos\dfrac{17\pi}{4} = \cos\left(4\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

$\text{sen}\,\dfrac{17\pi}{4} = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

$$y = \dfrac{0 - 1}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$$

**16.** $x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow -1 \leqslant \cos x \leqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant \dfrac{2m}{5} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5 \leqslant 2m \leqslant 0 \Rightarrow -\dfrac{5}{2} \leqslant m \leqslant 0$

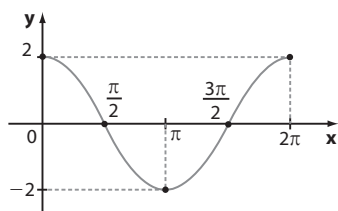
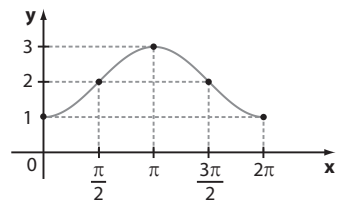
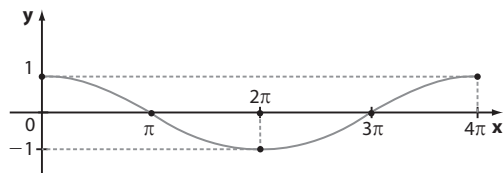
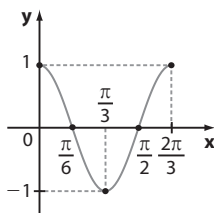
$\left\{m \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{5}{2} \leqslant m \leqslant 0\right\}$

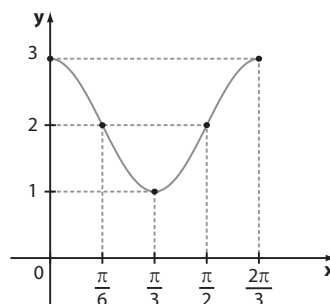
**17.** $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \dfrac{3m}{2} - \dfrac{1}{3} \leqslant 1 \Rightarrow$

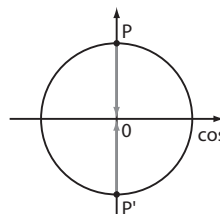
$\Rightarrow -\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{3m}{2} \leqslant \dfrac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{4}{3} \leqslant 3m \leqslant \dfrac{8}{3} \Rightarrow -\dfrac{4}{9} \leqslant m \leqslant \dfrac{8}{9}$

O único número inteiro pertencente ao intervalo $\left[-\dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{9}\right]$ é o zero.

**18. a)** $p = 2\pi$; $Im = [-2, 2]$.

**b)** $p = 2\pi$; $Im = [1, 3]$.

**c)** $p = 4\pi$; $Im = [-1, 1]$.

**d)** $p = \dfrac{2\pi}{3}$; $Im = [-1, 1]$.

**e)** $p = \dfrac{2\pi}{3}$; $Im = [1, 3]$.

**19. a)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(F)**

**b)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ **(V)**

**c)** $f_{mín.} = 2 \cdot (-1) = -2$ **(F)**

**d)** $f(x) = x \cdot (-1) = -x$ é uma função linear ($y = ax$, caso particular da função afim) e, portanto, não é periódica. **(F)**

**e)** $p = \dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{\pi}{8}\right|} = 16$ **(V)**

**f)** $\cos\left(\dfrac{-3\pi}{20}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{20} > 0$, pois $\dfrac{3\pi}{20}$ tem imagem no 1º quadrante. **(V)**

**20. a)** $2020 \Rightarrow f(0) = 400 + 18 \cdot \cos 0 = 418$ (418 milhões de dólares).

$2025 \Rightarrow f(5) = 400 + 18 \cdot \cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) =$

$= 400 + 18 \cdot \dfrac{1}{2} = 409$ (409 milhões de dólares).

$2030 \Rightarrow f(10) = 400 + 18 \cdot \cos\left(\dfrac{10\pi}{3}\right) =$

$= 400 + 18 \cdot \cos\dfrac{4\pi}{3} = 400 + 18 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) =$

$= 400 - 9 = 391$ (391 milhões de dólares).

**b)** O menor valor possível de $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$ é $-1$;

$x \in \{0, 1, \ldots, 20\}$.

$f_{mín.} = 400 + 18 \cdot (-1) = 400 - 18 = 382$ (382 milhões de dólares).

Devemos ter:

$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right) = \underbrace{\cos(\pi + k \cdot 2\pi)}_{-1}$; $k \in \mathbb{Z}$; isto é,

$\dfrac{\pi}{3}x = \pi + k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 2k)$; $k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 0) = 3$ (Ano de 2023)

$k = 1 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 2) = 9$ (Ano de 2029)

$k = 2 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 4) = 15$ (Ano de 2035)

$k = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot (1 + 6) = 21$ (Ano de 2041) $\rightarrow$ não convém!

Assim, em 3 vezes, ou seja, nos anos de 2023, 2029 e 2035, **f** atinge seu menor valor.

Outro modo de resolver esse problema é impor as igualdades:

$\frac{\pi}{3} \cdot x = \pi \Rightarrow x = 3$

$\frac{\pi}{3} \cdot x = 3\pi \Rightarrow x = 9$

$\frac{\pi}{3} \cdot x = 5\pi \Rightarrow x = 15$

$\frac{\pi}{3} \cdot x = 7\pi \Rightarrow x = 21 \rightarrow$ não convém!

**21.** **a)** $D = \mathbb{R}$; $Im = [-1, 1]$ e $p = \frac{2\pi}{3}$.

**b)** $D = \mathbb{R}$; $Im = [-3, 3]$, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 3 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 3$; $p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$.

**c)** $D = \mathbb{R}$; $Im = [-3, 1]$, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$-1 \leqslant \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 \leqslant 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 2 \Rightarrow$

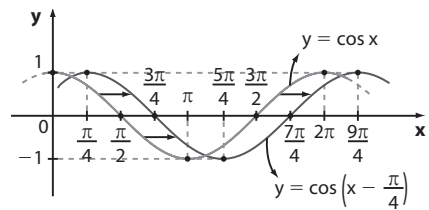
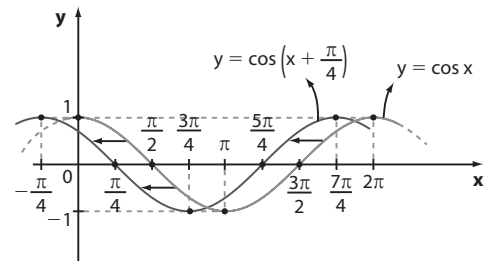
$\Rightarrow -3 \leqslant -1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1$;

$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

**d)** $f(x) = x + \cos\frac{\pi}{5}$ é uma função do 1º grau, e, portanto não é periódica.

$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$.

**e)** $D = \mathbb{R}$; $Im = [-4, 4]$; $p = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

**22.** **a)** Basta transladar $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita, o gráfico de $y = \cos x$. Assim, por exemplo, se o par $(0, 1)$ pertence ao gráfico de $y = \cos x$, então o par $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ pertence ao gráfico de $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; se o par $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pertence ao gráfico de $y = \cos x$, então o par $\left(\underbrace{\frac{3\pi}{4}}_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}, 0\right)$ pertence ao gráfico de $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e assim por diante.

**b)** Basta transladar $\frac{\pi}{4}$ unidades para a esquerda o gráfico de $y = \cos x$. Assim, por exemplo, se o par $(0, 1)$ pertence ao gráfico $y = \cos x$, então o par $\left(-\frac{\pi}{4}, 1\right)$ pertence ao gráfico de $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; se o par $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pertence ao gráfico de $y = \cos x$, então o par $\left(\underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}, 0\right)$ pertence ao gráfico de $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ e assim por diante.

**23.** $r_{máximo} = \frac{5865}{1 + 0{,}15 \cdot 1} = \frac{5865}{1{,}15} = 5100 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_{máximo} = 5100$ km (apogeu)

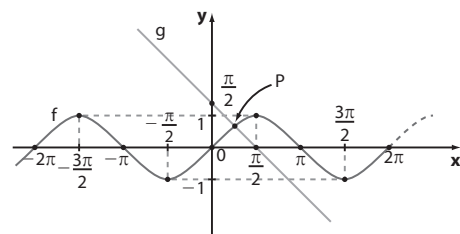
$r_{mínimo} = \frac{5865}{1 + 0{,}15 \cdot (-1)} = \frac{5865}{0{,}85} = 6900$ km $\Rightarrow$

$\Rightarrow r_{mínimo} = 6900$ km (perigeu)

$S = 5100 + 6900 = 12000$

Alternativa *b*.

## Desafio

É preciso determinar os pontos de interseção (se houver), dos gráficos de **f** e **g**.

Lembre que $Im(f) = [-1, 1]$ e que **g** é uma função afim decrescente cuja reta correspondente passa pelos pontos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Os gráficos intersectam-se unicamente no ponto **P**.

Desse modo, a equação $f(x) = g(x)$ apresenta uma única solução real.

CAPÍTULO 5

# Matrizes

## Exercícios

**1.** **a)** $3 \times 2$ **b)** $1 \times 4$ **c)** $2 \times 2$ **d)** $3 \times 3$ **e)** $3 \times 1$ **f)** $3 \times 4$

**2.** **a)** 4 **b)** ∄ **c)** 1 **d)** 1

**3.** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

**4.** $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1+1 & 2+1+2 \\ 2+2+1 & 2+2+2 \\ 2+3+1 & 2+3+2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

**5.** $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$

$c_{11} = 1 + 1 - 1 = 1$ $c_{12} = 1 + 1 - 2 = 0$
$c_{13} = 1 + 1 - 3 = -1$ $c_{14} = 1 + 1 - 4 = -2$
$c_{21} = 1 + 2 - 1 = 2$ $c_{22} = 1 + 2 - 2 = 1$
$c_{23} = 1 + 2 - 3 = 0$ $c_{24} = 1 + 2 - 4 = -1$

Assim, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

A soma pedida é: $1 + 2 + 1 + (-1) + (-2) + (-1) = 0$

**6.** **a)** $A^t = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

**b)** $B^t = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

**c)** $C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$

**d)** $D^t = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

**e)** $E^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0{,}5 & 3 \\ -2 & 11 & 7 & 4{,}1 \end{pmatrix}$

**f)** $F^t = [\ 5 \ \ 7 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 3\ ]$

**g)** $G^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

**7.** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 2+6 \\ 4+3 & 4+6 \\ 6+3 & 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

**8.** $a_{46} = (-1)^{4+6} \cdot \dfrac{2 \cdot 6}{4} = (-1)^{10} \cdot 3 = 3$

**9.** $A = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$;

diagonal principal: 1, 4 e 9; diagonal secundária: 3, 4 e 3.

**10.** **a)** $a_{21} = 1\,485$

**b)** $2\,040 - 1\,850 = 190$

**c)** 1 bola: $1\,320 + 1\,850 = 3\,170$
$3\,170 \cdot$ R\$ 3,00 = R\$ 9 510,00
2 bolas: $1\,485 + 2\,040 = 3\,525$
$3\,525 \cdot$ R\$ 5,00 = R\$ 17 625,00
A arrecadação no bimestre foi de 27 135 reais ($9\,510 + 17\,625 = 27\,135$).

**11.** **a)** **X** e **Y**: $d_{12} = d_{21} = 15$ km
**Z** e **X**: $d_{13} = d_{31} = 27$ km
**Y** e **Z**: $d_{23} = d_{32} = 46$ km

**b)** $D^t = D$

**12.** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**13.** **a)** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \pi & \text{sen } 2\pi \\ \cos 2\pi & \cos 2\pi \\ \cos 3\pi & \cos 3\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

**b)** $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

**14.** **a)** Como $q_{34} = 0$ e $q_{43} = 1$, concluímos que o placar do jogo foi Canadá $0 \times 1$ México.

**b)** $q_{12} = 0$ e $q_{21} = 1 \Rightarrow$ Argentina $0 \times 1$ Brasil
$q_{13} = 2$ e $q_{31} = 3 \Rightarrow$ Argentina $2 \times 3$ Canadá
$q_{14} = 2$ e $q_{41} = 1 \Rightarrow$ Argentina $2 \times 1$ México
$q_{23} = 3$ e $q_{32} = 3 \Rightarrow$ Brasil $3 \times 3$ Canadá
$q_{24} = 2$ e $q_{42} = 2 \Rightarrow$ Brasil $2 \times 2$ México

Pontuação final:
Argentina: 3 pontos (1 vitória e 2 derrotas)
Brasil: 5 pontos (1 vitória e 2 empates)
Canadá: 4 pontos (1 vitória, 1 empate e 1 derrota)
México: 4 pontos (1 vitória, 1 empate e 1 derrota)
Menor pontuação: Argentina, com 3 pontos.

**15.** **a)** $m = 3$ e $n = 4$.

**b)** $q_{23} = 875 \Rightarrow$ Em 100 g de queijo mozarela encontramos 875 mg de cálcio.
$q_{31} = 35{,}6 \Rightarrow$ Em 100 g de queijo parmesão encontramos 35,6 g de proteínas.

**c)** Queijo mozarela: 1 kg (1 000 g) por semana $\Rightarrow$ $\Rightarrow 10 \cdot (80 \text{ mg}) = 800$ mg de colesterol por semana.
Queijo minas frescal: 1 kg (1 000 g) por semana $\Rightarrow$ $\Rightarrow 10 \cdot (62 \text{ mg}) = 620$ mg de colesterol por semana.
Por semana, a diferença de colesterol ingerida é de 180 mg.
Em 52 semanas, a ingestão será de 9 360 mg a menos de colesterol.

**d)** Mais que a metade, pois $\dfrac{1{,}7}{3{,}2} > \dfrac{1{,}7}{3{,}4} = \dfrac{1}{2}$.

**16. a)** Traço A = $(-1) + (-5) = -6$;

Traço B = $1 + 5 + 3 = 9$;

Traço C = $c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44}$;

$c_{11} = 3 \cdot 1 + 1 - 1 = 3$

$c_{22} = 3 \cdot 2 + 2 - 1 = 7$

$c_{33} = 3 \cdot 3 + 3 - 1 = 11$

$c_{44} = 3 \cdot 4 + 4 - 1 = 15$

Assim, o traço de **C** é igual a: $3 + 7 + 11 + 15 = 36$.

**b)** Traço M = $\text{sen}\ \theta + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \text{sen}\ \theta$.

$\frac{1}{2} + \text{sen}\ \theta = 1 \Rightarrow \text{sen}\ \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$

**17.** $a = 2$, $b = 1$, $c = 6$ e $d = 4$.

**18.** $\begin{cases} x + y = 7 & (*) \\ z = 2 \\ z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2 \\ x - y = 1 & (**) \end{cases}$ → $z = 2$

Adicionando (*) e (**) temos:

$2x = 8 \Rightarrow x = 4$ e $y = 3$

**19. a)** $\begin{cases} m - 1 = 3 \Rightarrow m = 4 \\ 2m = 0 \Rightarrow m = 0 \\ 1 - m = -3 \Rightarrow m = 4 \\ m = 4 \end{cases}$ não existe $m \in \mathbb{R}$ que satisfaça simultaneamente

**b)** $\begin{cases} 9 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 3 \\ -3 = m \end{cases} \Rightarrow m = -3$

**20.** Devemos ter $\begin{cases} p + q = 6 \\ 2p - q = 3 \end{cases} \Rightarrow p = q = 3$

**21.** $\begin{bmatrix} a + 3 & d \\ b + 2 & 5 - e \\ c + 1 & 2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3 \\ b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \\ c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1 \\ d = 0 \\ 5 - e = 0 \Rightarrow e = 5 \\ 2f = 0 \Rightarrow f = 0 \end{cases}$

**22. a)** $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; **A** é simétrica.

$B^t = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$; **B** não é simétrica.

$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $C^t = C$; **C** é simétrica.

**b)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & y \\ x & -2 & 5 \\ 3 & z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x & 3 \\ 2 & -2 & z \\ y & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2, y = 3$ e $z = 5$

$x + 2y - z = 2 + 6 - 5 = 3$

**23. a)** $\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

**c)** $(-5 \quad -1 \quad -8 \quad -3)$

**d)** $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

**24. a)** $c_{78} = a_{78} + b_{78}$

$\left.\begin{matrix} a_{78} = 2 \cdot 7 - 8 = 6 \\ b_{78} = 7 + 8 = 15 \end{matrix}\right] \Rightarrow c_{78} = 6 + 15 = 21$

$c_{95} = a_{95} + b_{95}$

$\left.\begin{matrix} a_{95} = 2 \cdot 9 - 5 = 13 \\ b_{95} = 9 + 5 = 14 \end{matrix}\right] \Rightarrow c_{95} = 13 + 14 = 27$

**b)** $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$c_{ij} = (2i - j) + (i + j) = 3i$

**25. a)** $X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

**b)** $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 18 \\ -5 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

**c)** $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$

**26. a)**

| | P | M | B | H | F |
|---|---|---|---|---|---|
| aluno **A** → | 3 | 3 | 0 | 5 | 5 |
| aluno **B** → | 1 | 1 | 3 | 4 | 2 |
| aluno **C** → | 8 | 5 | 5 | 4 | 5 |

**b)** **C**; **C**; **A**.

**27. a)** $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; $A = -A^t$

$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B^t = B$

Apenas **A** é antissimétrica.

**b)** Devemos ter:

$\begin{pmatrix} 0 & m \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ m & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -m & -3 \end{pmatrix}$

Como $3 \neq -3$, $\nexists m \in \mathbb{R}$ que satisfaça a condição.

**28.** **X** deve ter o mesmo formato de **A**;

façamos $X = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$

$(X + A)^t = B \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right)^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} p + 4 & q + 2 \\ r - 1 & s \\ t + 5 & u + 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} p + 4 & r - 1 & t + 5 \\ q + 2 & s & u + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, de onde:

$p + 4 = 1 \Rightarrow p = -3$; $\quad r - 1 = -2 \Rightarrow r = -1$;

$t + 5 = 4 \Rightarrow t = -1$; $q + 2 = 5 \Rightarrow q = 3$;

$s = 6$; $\quad u + 1 = 0 \Rightarrow u = -1$

$X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

**29.** a) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -12 & 20 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 6 & -10 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

**30.** a) $3A + B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 15 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 2 & 21 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}$

b) $A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -3 & 18 \\ 27 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -13 \\ -27 & -17 \end{pmatrix}$

c) $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -3 & 27 \\ -6 & 18 & 24 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 13 & -1 & 27 \\ 2 & 28 & 38 \end{pmatrix}$

**31.** $2 \cdot X = \begin{pmatrix} 18 & -2 & 2 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

**32.** $2A + B = X + 2C \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

**33.** $2 \cdot X^t + A = B \Rightarrow 2 \cdot X^t = B - A \Rightarrow X^t = \frac{1}{2} \cdot (B - A)$, isto é:

$X^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow X^t = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

**34.** a) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 7 \\ -10 & 9 & 6 & -19 \end{bmatrix}$

c) $2 \times \underline{2 \quad 3} \times 2 \rightarrow$ Não existe o produto.

d) $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 0 & 17 \\ 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

f) $3 \times \underline{1 \quad 1} \times 3 \rightarrow$ Temos: $\begin{pmatrix} 12 & -4 & 16 \\ 18 & -6 & 24 \\ 30 & -10 & 40 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

g) $2 \times \underline{1 \quad 2} \times 1 \rightarrow$ Não existe o produto.

h) $\begin{pmatrix} 10 & -4 & 3 \\ 13 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

**35.** a) $\underset{3 \times 2}{\underset{\downarrow}{A}} \cdot \underset{2 \times 2}{\underset{\downarrow}{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\underset{2 \times 2}{\underset{\downarrow}{B}} \cdot \underset{3 \times 2}{\underset{\downarrow}{A}} \rightarrow$ Não existe o produto.

c) $\underset{3 \times 2}{\underset{\downarrow}{A}} \cdot \underset{2 \times 1}{\underset{\downarrow}{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

d) $\underset{2 \times 2}{\underset{\downarrow}{B^t}} \cdot \underset{2 \times 1}{\underset{\downarrow}{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\underset{2 \times 2}{\underset{\downarrow}{B}} \cdot \underset{2 \times 3}{\underset{\downarrow}{A^t}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

**36.** $A \cdot B$ é $3 \times 2$, pois **A** é $3 \times 3$ e **B** é $3 \times 2$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$

$c_{22} = 0 \cdot 8 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot (-3) = 9 - 6 = 3$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$

$c_{31} = 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 7 = 17$

c) Não existe esse elemento, pois a matriz $C = A \cdot B$ é $3 \times 2$.

**37.** Para calcular o elemento $\mathbf{c}_{43}$ da matriz $A \cdot B$, devemos obter os elementos da linha 4 da matriz **A** e os elementos da coluna 3 da matriz **B**. Temos:

$a_{41} = 4 + 1 = 5$ $\quad$ $b_{13} = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$a_{42} = 4 + 2 = 6$ $\quad$ e $\quad$ $b_{23} = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

$a_{43} = 4 + 3 = 7$ $\quad$ $b_{33} = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

Portanto: $c_{43} = 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 \Rightarrow c_{43} = 22$

**38.** $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 5x \\ 4y + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 8 - 5x = -2 \Rightarrow x = 2 \\ 4y + 15 = -1 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$

**39.** a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 2 \\ 20 & 33 & 12 \\ 5 & 18 & 34 \end{pmatrix}$

**40.** a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$

c) $A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

d) $A^{35} = ?$

Observe que $A^5 = A^4 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$

$A^6 = A^5 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

Enfim, $A^n = \begin{cases} A, \text{ se } \mathbf{n} \text{ é ímpar.} \\ I_2, \text{ se } \mathbf{n} \text{ é par.} \end{cases}$

Daí $A^{35} = A$

**e)** $A^{106} = I_2$, pois **n** é par.

**41.** $A \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & m \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & m \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 + 2m & -5m \\ -10 & 2m + 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 22 & -15 \\ -10 & m + 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 16 + 2m = 22 \\ -5m = -15 \\ 2m + 1 = m + 4 \end{cases} \Rightarrow m = 3$

**42.**
- A pontuação final do aluno **A** é:
  $4 \cdot 7 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 5 = 99$
- A pontuação final do aluno **B** é:
  $9 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 91$
- A pontuação final do aluno **C** é:
  $7 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 10 \cdot 5 = 147$

A multiplicação matricial é:

$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 91 \\ 147 \end{pmatrix}$

**43.** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + 7b & a + 3b \\ 2c + 7d & c + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

Então:

$\begin{cases} 2a + 7b = 6 \\ a + 3b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \text{ e } b = 2$

$\begin{cases} 2c + 7d = 5 \\ c + 3d = -7 \end{cases} \Rightarrow c = -64 \text{ e } d = 19$

$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -64 & 19 \end{pmatrix}$

**44. a)**
- Número de sanduíches de "carne louca" vendidos:
  $18 + 22 + 28 = 68$
- Valor arrecadado com a venda dessas 68 unidades:
  $68 \cdot 6$ reais $= 408$ reais
- 777 reais − 408 reais = 369 reais
- Número de sanduíches *hot-dog* vendidos:
  $369 \div 4{,}50 = 82$
- Valor desconhecido da tabela: $82 - 22 - 36 = 24$

**b)** $\begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 36 & 22 \\ 24 & 28 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 4{,}50 \\ 6{,}00 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 207 \\ 294 \\ 276 \end{bmatrix}$ ← total da barraca I; ← total da barraca II; ← total da barraca III

**45.** $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & x \\ y & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 - 2x \\ 5y - 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{4 \times 1}$;

devemos ter:

$\begin{cases} 15 - 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{15}{2} \\ \text{e} \\ 5y - 2 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2}{5} \end{cases}$

**46.** Devemos ter: $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -x & 5x \\ y - 3 & 2y + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & x + 6 \\ 5y & -x + 15 \end{pmatrix}$

Daí:

$\begin{cases} -x = 2y & (1) \\ 5x = x + 6 & (2) \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \\ y - 3 = 5y & (3) \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4} \\ 2y + \cancel{15} = -x + \cancel{15} & (4) \text{ é equivalente a } (1) \end{cases}$

(2) e (3) satisfazem (1): de fato, $x = -2y =$

$= -2 \cdot \left(\dfrac{-3}{4}\right) = \dfrac{3}{2}$

**47.** Seja $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ a matriz procurada.

Devemos ter: $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2y & x \\ -2w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & w \\ -2x & -2y \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2y = z \\ x = w \\ -2w = -2x \Leftrightarrow x = w \\ z = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = w \end{cases}$; a forma

geral da matriz procurada é $\begin{bmatrix} x & y \\ -2y & x \end{bmatrix}$; $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

1º exemplo: $x = 1$ e $y = 1$; a matriz é $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2º exemplo: $x = 2$ e $y = 0$; a matriz é $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3º exemplo: $x = -1$ e $y = -1$; a matriz é $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

**48. a)**
- Bicarbonato: $2{,}3 \cdot 6\,000 + 2{,}5 \cdot 4\,000 =$
  $= 13\,800 + 10\,000 = 23\,800$ (23 800 g, ou seja, 23,8 kg)
- Carbonato: $0{,}5 \cdot 6\,000 + 0{,}5 \cdot 4\,000 =$
  $= 3\,000 + 2\,000 = 5\,000$ (5 000 g, ou seja, 5 kg)
- Ácido: $2{,}2 \cdot 6\,000 + 2 \cdot 4\,000 =$
  $= 13\,200 + 8\,000 = 21\,200$ g (21 200 g, ou seja, 21,2 kg)

**b)** $\begin{pmatrix} 2{,}3 & 2{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 2{,}2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix}$

**c)** Sejam $\begin{cases} \mathbf{x}\text{: nº de envelopes na versão } \mathbf{T} \\ \mathbf{y}\text{: nº de envelopes na versão } \mathbf{E} \end{cases}$

Temos: $\begin{cases} x + y = 15000 \\ 2{,}3x + 2{,}5y = 35600 \end{cases} \Rightarrow x = 9500 \text{ e } y = 5500$

Logo, são 9500 envelopes na versão **T** e 5500 na versão **E**.

**49. a)** Seja $X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p - 3q = 0 \\ 2p + 5q = -11 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow q = -1 \text{ e } p = -3$

$X = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

**b)** Seja $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 20 & 35 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 13p + 4r & 13q + 4s \\ -5p & -5q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 20 & 35 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 13p + 4r = 0 \\ -5p = 20 \end{cases} \Rightarrow p = -4 \text{ e } r = 13$

$\text{e} \begin{cases} 13q + 4s = 9 \\ -5q = 35 \end{cases} \Rightarrow q = -7 \text{ e } s = 25$

$X = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 13 & 25 \end{pmatrix}$

**50.** 1ª semana:
$2{,}7 \cdot 2{,}35 + 2{,}43 \cdot 3{,}40 + 3{,}45 \cdot 1{,}7 + 4{,}155 \cdot 2{,}6 =$
$= 6{,}345 + 8{,}262 + 5{,}865 + 10{,}803 \simeq 31{,}28$
(Aproximadamente 31,28 reais.)
2ª semana:
$1{,}64 \cdot 2{,}35 + 3{,}12 \cdot 3{,}40 + 3{,}39 \cdot 1{,}7 + 3{,}7 \cdot 2{,}6 =$
$= 3{,}854 + 10{,}608 + 5{,}763 + 9{,}62 \simeq 29{,}85$ (Aproximadamente 29,85 reais.)

$$\begin{pmatrix} 2{,}7 & 2{,}43 & 3{,}45 & 4{,}155 \\ 1{,}64 & 3{,}12 & 3{,}39 & 3{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}35 \\ 3{,}40 \\ 1{,}70 \\ 2{,}60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31{,}28 \\ 29{,}86 \end{pmatrix}$$

**51. a)** $$\begin{bmatrix} 177 & 16 & 98 & 43 & 14 \\ 26 & 5 & 82 & 10 & 6 \end{bmatrix}_{2\times5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{5\times3} = \begin{bmatrix} 346 & 297 & 553 \\ 130 & 197 & 167 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

**b)** $c_{12} = 297$: 297 mg é a quantidade total de cálcio encontrada na receita II.

**c)** $c_{23} = 167$: 167 mg é a quantidade total de magnésio encontrada na receita III.

**52.** $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Logo, a matriz é inversa da matriz dada.

**53.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \text{ e } \begin{cases} b + 2d = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow d = -\frac{1}{2}$

A inversa é: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**54.** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 6c & 3b + 6d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 6c = 1 \\ 2a + 4c = 0 \end{cases}$ (I) e $\begin{cases} 3b + 6d = 0 \\ 2b + 4d = 1 \end{cases}$ (II)

$\Downarrow$

$\begin{cases} -\cancel{6a} - \cancel{12c} = -2 \\ \cancel{6a} + \cancel{12c} = 0 \end{cases}$ (+)
$0 = -2$ (falso)

O sistema (I) não admite solução, e o mesmo ocorre com o sistema (II). Logo, não existe a matriz inversa.

**55.** Devemos ter $A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow A \cdot A = I_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 + x \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 + x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$

**56.**
- Inversa de **A**: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } c = -1$

$\text{e} \begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -2 \text{ e } d = 3$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

- Inversa de **B**: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} g & h \\ -3e + 4g & -3f + 4h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, onde: $g = 1$;

$e = \frac{4}{3}$; $h = 0$ e $f = -\frac{1}{3}$.

Daí: $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**a)** $A^{-1} + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

**b)** $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$

**c)** $B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & \frac{7}{3} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

**57.** $\begin{pmatrix} y & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & x-4 \\ x-5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} xy - 3x + 15 & xy - 4y - 3 \\ -2x + x^2 - 5x & -2x + 8 + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} xy - 3x + 15 = 1 & (1) \\ xy - 4y - 3 = 0 & (2) \\ x^2 - 7x = 0 & (3) \\ -x + 8 = 1 & (4) \end{cases}$

De (3) temos: $x = 0$ ou $x = 7$
De (4) temos: $x = 7$
$\Rightarrow x = 7$

Em (1): $7y - 3 \cdot 7 + 15 = 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = 1$

**58.** $A + A^{-1} = I_2 \Rightarrow A^{-1} = I_2 - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & -x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1-x & x \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Como $A \cdot A^{-1} = I_2$, temos:

$\begin{bmatrix} x & -x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-x & x \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x - x^2 + x & x^2 - x \\ 1-x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x - x^2 & x^2 - x \\ 1-x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 1 & (1) \\ x^2 - x = 0 & (2) \\ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 & (3) \\ x = 1 & (4) \end{cases}$

De (1) temos: $-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

De (2) obtemos: $x = 0$ ou $x = 1$

O único valor de **x** que satisfaz simultaneamente todas as condições é $x = 1$.

**59. a)** $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5a + 3c & 5b + 3d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 5a + 3c = 1 \\ 3a + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2$ e $c = -3$

e $\begin{cases} 5b + 3d = 0 \\ 3b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -3$ e $d = 5$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

**b)** Como **A** é inversível, temos que:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I_2} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -5 & -16 \\ 12 & 28 \end{pmatrix}$

**60.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a + 2g & b + 2h & c + 2i \\ 3d & 3e & 3f \\ 2a + g & 2b + h & 2c + i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 2g = 1 \\ 3d = 0 \\ 2a + g = 0 \end{cases} \Rightarrow d = 0$ e $\begin{cases} a + 2g = 1 \\ 2a + g = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \frac{2}{3}$ e $a = -\frac{1}{3}$

$\begin{cases} b + 2h = 0 \\ 3e = 1 \\ 2b + h = 0 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{1}{3}$ e $\begin{cases} b + 2h = 0 \\ 2b + h = 0 \end{cases} \Rightarrow b = h = 0$

$\begin{cases} c + 2i = 0 \\ 3f = 0 \\ 2c + i = 1 \end{cases} \Rightarrow f = 0$ e $\begin{cases} c + 2i = 0 \\ 2c + i = 1 \end{cases} \Rightarrow i = -\frac{1}{3}$ e $c = \frac{2}{3}$

Assim, $X^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

**61.** De $(X \cdot B)^{-1} = A$ (a inversa de $X \cdot B$ é a matriz **A**), temos:

$(X \cdot B) \cdot A = I_2$; $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

$X \cdot B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -2p - q \\ r & -2r - s \end{pmatrix}$

$(X \cdot B) \cdot A = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} p & -2p - q \\ r & -2r - s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4p + q & -5p - 3q \\ 4r + s & -5r - 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4p + q = 1 \\ -5p - 3q = 0 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{3}{7}$ e $q = -\frac{5}{7}$

e $\begin{cases} 4r + s = 0 \\ -5r - 3s = 1 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{1}{7}$ e $s = -\frac{4}{7}$

Assim, $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$

### Desafio

**a)** Se **A** é ortogonal, $A^{-1} = A^t$;
temos: $A \cdot A^{-1} = I_3 \Rightarrow A \cdot A^t = I_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & y \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z) \\ x & \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z) & x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 & ① \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z) = 0 \Rightarrow y = -z & ② \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & ③ \end{cases}$$

Substituindo ① e ② em ③, temos:

$0^2 + (-z)^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 2z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;

- Se $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$, em ②, temos que $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e uma possível solução é $x = 0$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Se $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, em ②, obtemos $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e a solução é $x = 0$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**b)** Suponhamos que $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ fosse ortogonal.

Teríamos: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & y \\ x & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\text{é a transposta da matriz dada}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 + x^2 & \sqrt{2}(x + y) \\ \sqrt{2}(x + y) & y^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 + x^2 = 1 & ① \\ \sqrt{2} \cdot (x + y) = 0 & ② \\ 2 + y^2 = 1 & ③ \end{cases}$$

De ①, temos: $x^2 = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

De ③, temos: $y^2 = -1 \Rightarrow y \notin \mathbb{R}$

## CAPÍTULO 6 Sistemas lineares

### Exercícios

**1.** São lineares as equações representadas nos itens *a*, *c*, *f* e *h*.

**2.** **a)** $2 \cdot 2 - (-3) = 4 + 3 = 7$; $(2, -3)$ é solução.
**b)** $2 \cdot 2 - 7 = 4 - 7 = -3 \neq 7$; $(2, 7)$ não é solução.
**c)** $2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$; $(5, 3)$ é solução.

**3.** **a)** $-1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 + 6 - 4 = 1$;
$(-1, 3, -1)$ é solução.
**b)** $0 + 2 \cdot (-4) + 4 \cdot (-1) = 0 - 8 - 4 = -12 \neq 1$;
$(0, -4, -1)$ não é solução.
**c)** $1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 1 + 2 + 4 = 7 \neq 1$;
$(1, 1, 1)$ não é solução.
**d)** $0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$; $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$ é solução.

**4.** $3 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + m = 1 \Rightarrow 3 + 6 + m = 1 \Rightarrow m = -8$

**5.** **a)** $80x + 120y = 25\,200$ ou $8x + 12y = 2\,520$ ou $2x + 3y = 630$
**b)** Se $x = 45$, então: $90 + 3y = 630 \Rightarrow y = 180$ e o par $(45, 180)$ é solução da equação linear; sim, é possível.
Se $x = 65$, temos: $130 + 3y = 630 \Rightarrow y = \frac{500}{3} \notin \mathbb{N}$; não é possível.
**c)** Se $y = 3x$, então: $2x + 3 \cdot 3x = 630 \Rightarrow 11x = 630 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \notin \mathbb{N}$; não é possível.
Se $y = \frac{x}{2}$ temos: $2x + 3 \cdot \frac{x}{2} = 630 \Rightarrow x = 180$ e $y = 90$; o par $(180, 90)$ é solução da equação linear; sim.

**6.** $3 \cdot m - 11 \cdot (2m + 1) = 4 \Rightarrow 3m - 22m - 11 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = -\frac{15}{19}$

**7.** **a)** $x_1 = 0 \Rightarrow 4 \cdot 0 + 3x_2 = -5 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{3}$;
$\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ é solução.
$x_2 = 1 \Rightarrow 4x_1 + 3 \cdot 1 = -5 \Rightarrow 4x_1 = -8 \Rightarrow x_1 = -2$;
$(-2, 1)$ é solução.
**b)** $x = 0$ e $y = 1 \Rightarrow 0 + 1 - z = 0 \Rightarrow z = 1$;
$(0, 1, 1)$ é solução.
$x = 1$ e $z = 2 \Rightarrow 1 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$;
$(1, 1, 2)$ é solução.
**c)** $(0, 2)$; $(1, 1)$; $(-5, 7)$; $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$, ...
**d)** $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 5x_3 = 16 \Rightarrow x_3 = \frac{16}{5}$;
$\left(0, 0, \frac{16}{5}\right)$ é solução.
$x_1 = x_2 = 2 \Rightarrow 2 + 4 + 5x_3 = 16 \Rightarrow x_3 = 2$;
$(2, 2, 2)$ é solução.

**8.** Sejam $\begin{cases} \textbf{x} \text{ o número de moedas de R\$ 1,00} \\ \textbf{y} \text{ o número de notas de R\$ 5,00} \end{cases}$

$x + 5y = 35 \Rightarrow y = \frac{35 - x}{5}$

Para que **y** resulte inteiro, o numerador deve ser múltiplo de 5, então atribuímos a **x** os valores 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35, obtendo, respectivamente, os resultados: (0, 7); (5, 6); (10, 5); (15, 4); (20, 3); (25, 2); (30,1) e (35, 0), ou seja, poderá fazer o pagamento de 8 formas diferentes.

**9.** **a)** **x**: número de moedas de R$ 1,00
**y**: número de notas de R$ 2,00
$x + 2y = 35 \Rightarrow y = \frac{35 - x}{2}$

Para que **y** resulte inteiro, o numerador tem que ser par.
Logo, $x \in \{1, 3, 5, 7, ..., 33, 35\}$.
Existem 18 possibilidades distintas.

**b)** **x**: número de notas de R$ 2,00
**y**: número de notas de R$ 5,00
**z**: número de notas de R$ 10,00

$$2x + \underbrace{5y + 10z}_{\text{múltiplo de 5}} = 35$$

2x deve ser múltiplo de 5 (e **x** deve ser natural).
Podemos ter:

- $2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y + 2z = 7$

| x | y | z |
|---|---|---|
| 0 | 7 | 0 |
| 0 | 5 | 1 |
| 0 | 3 | 2 |
| 0 | 1 | 3 |

- $2x = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y + 2z = 5$

| x | y | z |
|---|---|---|
| 5 | 1 | 2 |
| 5 | 3 | 1 |
| 5 | 5 | 0 |

- $2x = 20 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y + 2z = 3$

| x | y | z |
|---|---|---|
| 10 | 1 | 1 |
| 10 | 3 | 0 |

- $2x = 30 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow y + 2z = 1$

| x | y | z |
|---|---|---|
| 15 | 1 | 0 |

Temos, ao todo, 10 possibilidades.

**10.** Sejam $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e **x** e **y** as incógnitas:

**a)** $ax + by = c$ (*)

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 1 = c \\ -2a - 3b = c \end{cases} \Rightarrow a + b = -2a - 3b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a = -4b \Rightarrow a = -\frac{4b}{3}$$

Escolhendo-se, por exemplo, $b = 3$, temos: $a = -4$ e, na 1ª equação, obtemos $-4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = c \Rightarrow c = -1$.

Em (*), temos: $-4x + 3y = -1$

Escolhendo-se $b = 6$, obtemos $a = -8$ e $c = -2$ e a equação é: $-8x + 6y = -2$; em geral, sendo $k \in \mathbb{R}^*$, segue a equação: $k \cdot (-4x + 3y) = -k$.

**b)** $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \Rightarrow \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ é solução.

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ é solução.

$x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right)$ é solução.

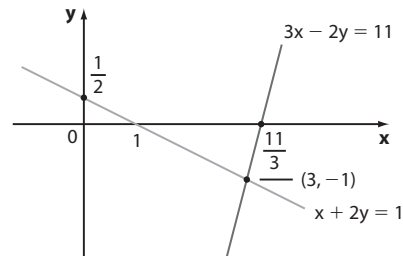
**11. a)**

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases} \oplus$$

$$4x = 12$$

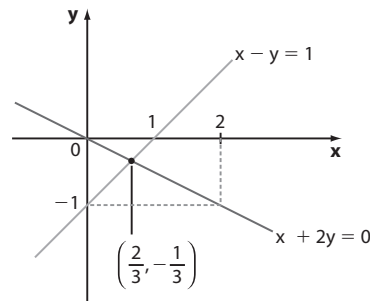
$$x = 3 \Rightarrow y = -1$$

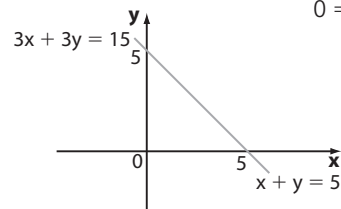
$S = \{(3, -1)\}$; S.P.D.

**b)**

$$\begin{cases} x - y = 1 \quad \cdot (2) \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \oplus$$

$$3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

$S = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$; S.P.D.

**c)**

$$\begin{cases} x + y = 5 \quad \cdot (-3) \\ 3x + 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -15 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases} \oplus$$

$$0 = 0$$

As duas equações são equivalentes e o sistema se reduz a $x + y = 5$.

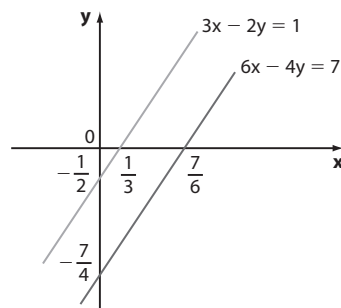
Fazendo $x = 5 - y$, qualquer par ordenado da forma $(5 - y, y)$, em que $y \in \mathbb{R}$, é solução. Tomando $y = 5 - x$, temos que qualquer par ordenado da forma $(x, 5 - x)$, em que $x \in \mathbb{R}$, também é solução.

$S = \{(5 - y, y); y \in \mathbb{R}\}$;
ou $S = \{(x, 5 - x); x \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

**d)**

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \quad \cdot (-2) \\ 6x - 4y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 4y = -2 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases} \oplus$$

$$0 = 5 \text{ (Falso)}$$

S.I.; $S = \varnothing$

**12.** **x**: número de unidades de 2 L
**y**: número de unidades de 1,5 L $\begin{cases} x + y = 72 & \cdot(-2) \\ 2x + 1{,}5y = 129 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2x} - 2y = -144 \\ \cancel{2x} + 1{,}5y = 129 \end{cases} \oplus$

$-0{,}5y = -15 \Rightarrow y = 30$ e $x = 42$

Foram compradas 30 unidades de 1,5 L.

**13.** **c**: preço do café
**p**: preço do minipão de queijo

$\Rightarrow \begin{cases} 2c + 5p = 14{,}20 & \cdot(-3) \\ 3c + 7p = 20{,}60 & \cdot(2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -6c - 15p = -42{,}60 \\ 6c + 14p = 41{,}20 \end{cases} \Rightarrow -p = -1{,}40 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 1{,}40$ e $c = 3{,}60$

$4c + 10p = 4 \cdot 3{,}60 + 10 \cdot 1{,}40 = 14{,}40 + 14 = 28{,}40$
(28,40 reais)

**14.** $\begin{cases} M - 40 = L + 40 \\ L - 30 = \dfrac{M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M - L = 80 \\ -M + 2L = 60 \end{cases}$

Adicionando as duas equações, temos:
$L = 140$ e $M = 220 \Rightarrow$
$\Rightarrow L + M = 140 + 220 = 360$ (360 reais)

**15.** **a)** $13 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = 65 - 14 = 51$ (51 pontos)

**b)** **x**: números de acertos
**y**: números de erros

$\begin{cases} x + y = 20 \\ 5x - 2y = 23 \end{cases} \Rightarrow x = 9$ e $y = 11$

Amanda errou 11 questões.

**c)** $\begin{cases} x + y = 20 & \cdot(2) \\ 5x - 2y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \cancel{2y} = 40 \\ 5x - \cancel{2y} = 17 \end{cases} \oplus$

$7x = 57 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$

Não é possível.

**16.** Se as retas não se intersectam, o sistema não tem solução.

$\begin{cases} x + y = m \\ 2x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ x + y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Se $m \neq \dfrac{5}{2}$, as equações do sistema ficam incompatíveis e ele não apresenta solução.

**17.** (3, 5) é solução do sistema $\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = m \end{cases}$

Daí, na 2ª equação, temos: $2 \cdot 3 + 5 = m \Rightarrow m = 11$

**18.** Para que a solução gráfica do sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ mx + ny = -6 \end{cases}$ seja formada por infinitos pontos, as retas correspondentes às equações dadas devem ser coincidentes.

Multiplicando a 1ª equação por (−2), obtemos:

$\begin{cases} -4x + 2y = -6 \\ mx + ny = -6 \end{cases} \Rightarrow m = -4$ e $n = 2$

**19.** **a)** $\begin{cases} 3 + (-2) = 1 \text{ (V)} \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0 \text{ (V)} \end{cases} \Rightarrow (3, -2)$ é solução.

$\begin{cases} -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3} = 1 \text{ (V)} \\ 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 3 \cdot \dfrac{4}{3} = 0 \text{ (F)} \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ não é solução.

**b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**20.** **a)** (2, 1, 3) não satisfaz a 3ª equação:
$-2 + 1 + 2 \cdot 3 = -2 + 7 = 5 \neq -5$
Logo, (2, 1, 3) não é solução.

**b)** 1ª equação: $2 - \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} = 0$ **(V)**

2ª equação: $2 + \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{3} = 2 + 2 = 4$ **(V)**

3ª equação: $-2 - \dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{3} = -2 - 3 = -5$ **(V)**

Logo, $\left(2, -\dfrac{7}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ é solução.

**c)** (−1, 1, 0) não é solução, pois não satisfaz a 2ª equação: $-1 - 1 + 0 = -2 \neq 4$

**21.** **a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

**b)** $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

**c)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -7 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

**d)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -13 \\ -1 & 1 & 10 & 4 \end{bmatrix}$

**22.** **a)** $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 5x + 7y - 2z = 11 \\ x - y + 3z = 13 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 4y + 3z = 11 \\ -3x - 3y - 3z = 10 \end{cases}$

**23.** **a)** (2, −1, 3) satisfaz as duas primeiras equações; na 3ª equação, temos: $2 \cdot 2 + m \cdot (-1) - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 - m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1$

**b)** Na 1ª equação, temos: $5 + m = 8 \Rightarrow m = 3$;
(5, 3) satisfaz a 2ª equação.

**c)** Na 1ª equação, temos: $m + 0 - (-2) = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow m + 2 = 5 \Rightarrow m = 3$; (3, 0, −2) satisfaz a 2ª equação.

**24.** **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

**b)** (−5, 4, 2) é solução, pois:
$-5 + 8 + 2 = 5$
$-10 + 12 - 2 = 0$
(1, 1, 1) não satisfaz a 1ª equação: $1 + 2 + 1 = 4 \neq 5$

**c)** 1ª equação:
$-15 + 5z + 2 \cdot (10 - 3z) + z =$
$= -15 + \cancel{5z} + 20 - \cancel{6z} + \cancel{z} = 5$
2ª equação:
$2 \cdot (-15 + 5z) + 3 \cdot (10 - 3z) - z =$
$= \cancel{-30} + 10z + \cancel{30} - 9z - z = 0$

**d)** Pelo item *c*, temos:
$p = -15 + 5 \cdot (-2) \Rightarrow$
$\Rightarrow p = -15 - 10 = -25$

**25.** *a* e *c* estão escalonados.

**26. a)** $y = 7 \Rightarrow 3x + 14 = 5 \Rightarrow x = -3;$
$S = \{(-3, 7)\}$; S.P.D.

**b)** $z = -4 \Rightarrow y - 4 = -1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 3 - 4 = 2 \Rightarrow x = 3$; $S = \{(3, 3, -4)\}$; S.P.D.

**c)** 2ª equação: $y = 2 + 3z$
1ª equação: $x - (2 + 3z) + 2z = 5 \Rightarrow x = 7 + z$
Se $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, a solução é dada por:
$S = \{(7 + \alpha, 2 + 3\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

**d)** $w = 2 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 6$
A solução é $S = \{(6, 0, 3, 2)\}$; S.P.D.

**e)** A terceira equação não é satisfeita qualquer que seja **z** real, pois o 1º membro é sempre nulo. $S = \varnothing$; S.I.

**27.** 3ª equação: $3 \cdot (-2) = \gamma \Rightarrow \gamma = -6$
2ª equação: $2 \cdot 2 + (-2) = \beta \Rightarrow \beta = 2$
1ª equação: $-1 + 2 - (-2) = \alpha \Rightarrow \alpha = 3$

**28. a)** A equação linear $x - y = 8$ "traduz" o problema.

**b)** (10, 2); (8, 0); (0, −8); (12, 4); ...

**c)** S.P.I.; $x = 8 + y$; se $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, a solução é dada por $S = \{(8 + \alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

**29.** Como (1, −1, 0) é solução, na 2ª equação obtemos:
$-1 - 2 \cdot 0 = m \Rightarrow m = -1$. Temos:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

Da 2ª equação, $y = -1 + 2z$
Na 1ª equação: $x - (-1 + 2z) + z = 2 \Rightarrow x + 1 - z = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 1 + z$
Para um valor real qualquer $\alpha$ atribuído a **z**, segue a solução:
$S = \{(1 + \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

**30. a)**
$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 & \leftarrow (-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ -7y - 5z = -31 & \leftarrow (-3) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ -7y - 5z = -31 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 & \leftarrow 7 \cdot (2^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Daí, $z = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 1$; $S = \{(1, 3, 2)\}$; S.P.D.

**b)**
$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -z = 3 \\ -y + 3z = -3 \end{cases}$$

Como $z = -3$, obtemos, na 3ª equação:
$-y + 3 \cdot (-3) = -3 \Rightarrow y = -6$, e, na 1ª equação:
$x + 6 + 6 = 1 \Rightarrow x = -11$; $S = \{(-11, -6, -3)\}$; S.P.D.

**c)**
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -4y - 2z = -2 & \leftarrow (-3) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ -12y - 6z = -20 & \leftarrow (-5) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 2y + z = 1 \\ 6y + 3z = 10 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 2y + z = 1 \\ 0 = 7 & \leftarrow (-3) \cdot (2^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

**(F)**; $S = \varnothing$; S. I.

**d)**
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - z = -1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 3z = -5 & \leftarrow (-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ -2y - 3z = -5 & \leftarrow (-3) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

Na 2ª equação: $y = \dfrac{5 - 3z}{2}$

1ª equação: $x + \dfrac{5 - 3z}{2} + z = 2 \Rightarrow$

$2x + 5 - 3z + 2z = 4 \Rightarrow 2x = -1 + z \Rightarrow$

$x = \dfrac{-1 + z}{2}$; $S = \left\{\left(\dfrac{-1 + \alpha}{2}, \dfrac{5 - 3\alpha}{2}, \alpha\right); \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; S.P.I.

**31. a)**
$$\begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ 11y - 5z = 8 & \leftarrow (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ -22y + 10z = -16 & \leftarrow (-3) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ 11y - 5z = 8 \\ 11y - 5z = 8 & \leftarrow \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ 11y - 5z = 8 \end{cases}$$

Assim, para $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$S = \left\{ \left( \frac{-7\alpha + 13}{11}, \frac{8 + 5\alpha}{11}, \alpha \right); \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

**b)** $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 3 \\ -y + z = 1 \\ y + z = -3 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y = 3 \\ -y + z = 1 \\ 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow z = -1,\ y = -2 \text{ e } x = 5;$

$S = \{(5, -2, -1)\}$

**c)** $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 3z = 1 \\ 3x - 2z = 3 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -3y + 7z = 1 & \leftarrow (1^{a} \text{ eq.}) + (-2) \cdot (2^{a} \text{ eq.}) \\ 3y - 7z = -3 & \leftarrow (1^{a} \text{ eq.}) \cdot (-3) + (3^{a} \text{ eq.}) \cdot 2 \end{cases}$

$\sim \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -3y + 7z = 1 \\ -3y + 7z = 3 \end{cases}$ equações incompatíveis;

$S = \varnothing$

**d)** $\begin{cases} a - b - c = -1 \\ a - b + c = 1 \\ a + b - c = 1 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} a - b - c = -1 & \Rightarrow a = 1 \\ 2c = 2 & \leftarrow (-1) \cdot (1^{a} \text{ eq.}) + (2^{a} \text{ eq.}) \Rightarrow c = 1 \\ 2b = 2 & \leftarrow (-1) \cdot (1^{a} \text{ eq.}) + (3^{a} \text{ eq.}) \Rightarrow b = 1 \end{cases}$

$S = \{(1, 1, 1)\}$;

**32.** Sejam **x**, **y** e **z**, respectivamente, os preços unitários do quibe, esfirra e suco.

$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 32 \\ 3x + 6y + 3z = 44{,}70 \\ 2x + 10y + 3z = 49 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 2x + 5y + 2z = 32 \\ -3y = -6{,}60 \\ 5y + z = 17 \end{cases}$

Da 2ª equação, temos $y = 2{,}20$

Na 3ª equação temos: $5 \cdot 2{,}20 + z = 17 \Rightarrow z = 6$

Na 1ª equação: $2x + 5 \cdot 2{,}20 + 2 \cdot 6 = 32 \Rightarrow x = 4{,}50$

Logo, os preços unitários do quibe, da esfirra e do suco são, respectivamente, R$ 4,50, R$ 2,20 e R$ 6,00.

**33.** Sejam **x**, **y** e **z** os preços, em reais, da calça, da camisa e do par de meias, respectivamente.

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 287 \\ 2x + 5y + 7z = 674 \\ 2x + 3y + 4z = 462 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 287 \\ y + z = 100 \\ -y - 2z = -112 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 287 \\ y + z = 100 \\ -z = -12 \Rightarrow z = 12 \Rightarrow y = 88 \Rightarrow x = 75 \end{cases}$

Cada camisa custou R$ 88,00.

**34.** **x**: número de acertos

**y**: número de erros

$\begin{cases} x + y = 25 \\ 500 + 200x - 150y = 600 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 25 \\ 20x - 15y = 10 \end{cases}$

$x = 11$ e $y = 14$

Logo, errou 14 questões.

**35. a)** $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y = 10 \\ -2y = -6 & \leftarrow (-1) \cdot (1^{a} \text{ eq.}) + (2^{a} \text{ eq.}) \\ -7y = -21 & \leftarrow (-2) \cdot (1^{a} \text{ eq.}) + (3^{a} \text{ eq.}) \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y = 10 \\ y = 3 \Rightarrow x = 7;\ S = \{(7, 3)\} \\ y = 3 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ 4y = 8 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} -x - z = -5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 5 - z$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, a solução é dada por $S = \{(5 - \alpha, 2, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

**c)** $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 3x + 7y = 11 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y = 3 \\ -2y = -2 & \leftarrow (-1) \cdot (1^{a} \text{ eq.}) + (2^{a} \text{ eq.}) \\ 4y = 2 & \leftarrow (-3) \cdot (1^{a} \text{ eq.}) + (3^{a} \text{ eq.}) \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 1 \Rightarrow S = \varnothing \\ y = 0{,}5 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 3x - y = 9 \\ x + y = 1 \\ 5x + 7y = -10 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x - 2y = 8 \\ 5y = -15 \\ 3y = -7 \\ 17y = -50 \end{cases}$ equações incompatíveis; $S = \varnothing$

**e)** $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x + 3y = 16 \\ 2x + 5y = 27 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y = 11 \\ y = 5 \leftarrow (-1) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \Rightarrow x = 1 \\ y = 5 \leftarrow (-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$

$S = \{(1, 5)\}$

**f)** $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - z + w = -4 \\ y - z - w = -2 \\ x - z + 2w = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -2y - 3z + w = -12 \\ y - z - w = -2 \\ -y - 2z + 2w = -6 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -2y - 3z + w = -12 \\ -5z - w = -16 \\ z - 3w = 0 \end{cases} \sim$

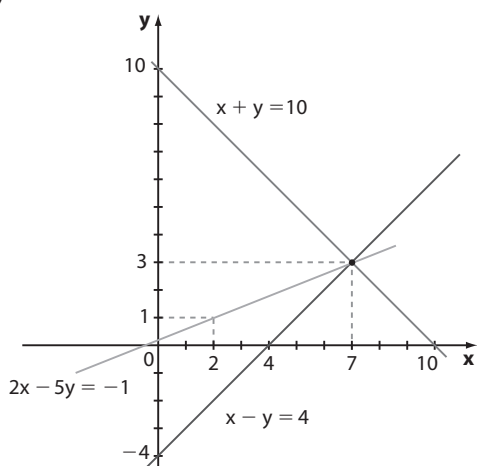
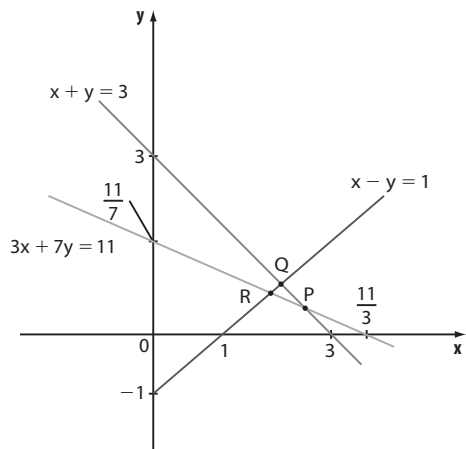
$\sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -2y - 3z + w = -12 \\ -5z - w = -16 \\ -16w = -16 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow w = 1; -5z - 1 = -16 \Rightarrow z = 3;$

$-2y - 9 + 1 = -12 \Rightarrow y = 2;$

$x + 2 + 3 = 4 \Rightarrow x = -1$

$S = \{(-1, 2, 3, 1)\}$

**36. a)**

**c)**

**37.** Sejam **a**, **b** e **c** as quantias de Ana, Bia e Carol, respectivamente. Temos:

$\begin{cases} a + b + c = 340 \\ a - 10 = 2b \\ \frac{3}{5}a = c - 9 \end{cases}$

$\left(\text{observe que 40\% de } \mathbf{a} \text{ é igual a } \frac{2}{5}a \text{ e o que sobra é } \frac{3}{5}a\right)$

$\begin{cases} a + b + c = 340 \\ a - 2b = 10 \\ 3a - 5c = -45 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c = 340 \\ -3b - c = -330 \\ -3b - 8c = -1\,065 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} a + b + c = 340 \\ 3b + c = 330 \Rightarrow \\ -7c = -735 \end{cases}$

$\Rightarrow c = 105$; na 2ª equação temos $b = 75$ e na 1ª equação obtemos $a = 160$.

**38.** $\begin{cases} 4c + 3l + 6b = 37{,}20 \\ 2c + 2l + 3b = 20{,}60 \end{cases} \sim \begin{cases} 4c + 3l + 6b = 37{,}20 \\ -l = -4 \end{cases}$

$(1^a \text{ eq.}) + (-2) \cdot (2^a \text{ eq.})$

O sistema é indeterminado, com $l = 4$;

$4c = 37{,}20 - 6b - 12 \Rightarrow 4c = 25{,}20 - 6b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2c + 3b = 12{,}60$ (*)

**a)** R$ 4,00

**b)** Não é possível determinar.

**c)** Por (*), $2c + 3b = 12{,}60$; então: $12{,}60 + 5 \cdot 4{,}00 = 12{,}60 + 20{,}00 = 32{,}60$ (32,60 reais)

**d)** Não é possível determinar.

**39.** Sejam **x**, **y** e **z** os preços dos ingressos para arquibancada, numerada descoberta e numerada coberta, respectivamente.

(I) $z = x + y$

(II) $\left.\begin{matrix} 60\% \cdot 40\,000 = 24\,000 \\ 25\% \cdot 40\,000 = 10\,000 \\ 15\% \cdot 40\,000 = 6\,000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 24\,000x + 10\,000y + 6\,000z = 4\,320\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24x + 10y + 6z = 4\,320$

(III) $\frac{y}{z} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5y - 3z = 0$

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ 24x + 10y + 6z = 4\,320 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ -14y + 30z = 4\,320 \leftarrow (-24) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ 108z = 21\,600 \leftarrow (14) \cdot (2^a \text{ eq.}) + (5) \cdot (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 200$, $y = 120$ e $x = 80$

Logo, os preços da arquibancada, numerada descoberta e numerada coberta são R$ 80,00, R$ 120,00 e R$ 200,00, respectivamente.

**40.** Sejam $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ e $\mathbf{c_3}$ as quantidades de colchões do tipo $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ e $\mathbf{c_3}$ produzidas. Temos:

$$\begin{cases} 96 \cdot c_1 + 144 \cdot c_2 + 240 \cdot c_3 = 19\,200 \ (\div 48) \\ 96 \cdot c_1 + 48 \cdot c_2 + 24 \cdot c_3 = 10\,080 \ (\div 24) \\ 96 \cdot c_1 + 96 \cdot c_2 + 24 \cdot c_3 = 12\,480 \ (\div 24) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 400 \\ 4c_1 + 2c_2 + c_3 = 420 \\ 4c_1 + 4c_2 + c_3 = 520 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 400 \\ -4c_2 - 9c_3 = -380 \\ -2c_2 - 9c_3 = -280 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 400 \\ -4c_2 - 9c_3 = -380 \\ 9c_3 = 180 \end{cases} \Rightarrow c_3 = 20$$

Na 2ª equação: $-4c_2 - 180 = -380 \Rightarrow c_2 = 50$
Na 1ª equação: $2c_1 + 3 \cdot 50 + 5 \cdot 20 = 400 \Rightarrow c_1 = 75$
A soma pedida é $75 + 50 + 20 = 145$.

**41.** **a)** $4 - 6 = -2$
**b)** $14 - 27 = -13$
**c)** $2 - (-2) = 4$
**d)** $6$
**e)** $4 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$
**f)** $-a^2 - a^2 = -2a^2$
**g)** $1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 = -1$
**h)** $\operatorname{sen}^2 8° + \cos^2 8° = 1$

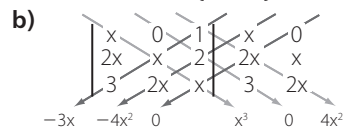
**42.** **a)** $-4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -8 - 3 = -11$
**b)** $1 \cdot 3 - 0 \cdot (-1) = 3$
**c)** $A + B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$; $\det (A + B) = -15$
**d)** $A - B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; $\det (A - B) = 5 - 6 = -1$
**e)** $A + 2B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$;
$\det (A + 2B) = -16 + 3 = -13$
**f)** $A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$;
$\det (A \cdot B) = -42 + 9 = -33$
**g)** $A + I_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det (A + I_2) = -12$

**43.** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = 2 - (-10) = 12$

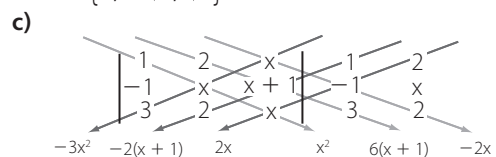
**44.** **a)** $0 + 10 - 1 - 2 + 15 + 0 = 22$
**b)** $7 + 4 + 0 - 14 + 0 + 5 = 2$
**c)** $0 - 15 + 0 + 18 + 0 - 4 = -1$
**d)** $-15$

**45.** **a)** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^2 & (-1)^2 & (-2)^2 \\ 1^2 & 0^2 & (-1)^2 \\ 2^2 & 1^2 & 0^2 \end{bmatrix} =$

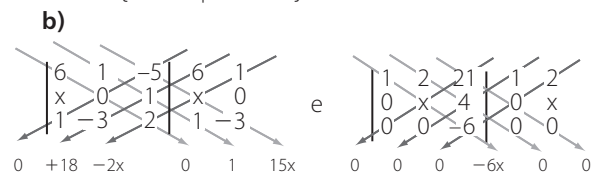
$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\det A = 0 + 4 + 4 - 0 - 0 - 0 = 8$

**b)** $A^t = A$; assim $\det A^t = \det A = 8$

**46.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$;

$\det A = 1$ e $\det B = -4$

$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\det (A + B) = 0$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\det (A \cdot B) = 10 + 4 - 6 - 12 = -4$

**47.** **a)** $x(x - 2) - (-3) \cdot (x + 2) = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 3x + 6 = 8 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -2 \Rightarrow S = \{1, -2\}$

**b)**

Logo, a equação é:
$-3x - 4x^2 + x^3 + 4x^2 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x^2 - 3 = 0$, isto é, $x = \pm\sqrt{3}$
$S = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

**c)**

Obtemos, assim, a equação:
$-3x^2 - 2(x + 1) + 2x + x^2 + 6(x + 1) - 2x = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$
$S = \{1\}$

**48.** **a)** $3x - 4(x + 2) \leqslant x \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x - 4x - 8 \leqslant x \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x \leqslant 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \geqslant -4 \Rightarrow$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -4\}$

**b)** $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -5 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 21 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

$0 \quad +18 \quad -2x \quad 0 \quad 1 \quad 15x$ e $0 \quad 0 \quad 0 \quad -6x \quad 0 \quad 0$

Logo, obtemos a desigualdade:
$18 - 2x + 1 + 15x > -6x \Rightarrow 19x > -19 \Rightarrow x > -1$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

**49.** $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 2$

**a)** Devemos ter $D \neq 0$, isto é, $m \neq 2$.

**b)** A condição $D = 0$, ou seja, $m = 2$, é necessária, porém não suficiente.

Se $m = 2$:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ equações incompatíveis}$$

Assim, não existe $m \in \mathbb{R}$ para o qual o sistema possui infinitas soluções.

**c)** $m = 2$, pelo item anterior.

**50.** $2b - 3 \cdot (a - 1) = 14 \Rightarrow 2b - 3a = 11$

$12b - 2a - 16 - 2b = 0 \Rightarrow 10b - 2a = 16$

$$\begin{cases} 2b - 3a = 11 \\ 10b - 2a = 16 \end{cases} \Rightarrow a = -3 \text{ e } b = 1$$

**51. a)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - k & 0 \\ -3 & 5 - k \end{bmatrix}$

**b)** $\begin{vmatrix} 2 - k & 0 \\ -3 & 5 - k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - k) \cdot (5 - k) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 2$ ou $k = 5$

**52.** O sistema é: $\begin{cases} x + ky = -1 \\ (k + 1)x + 2y = 0 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k + 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - k(k + 1) = 2 - k^2 - k$

Devemos ter $D \neq 0$, isto é:

$-k^2 - k + 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 1$ e $k \neq -2$

**53. a)** $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -y = 0 \quad \leftarrow (-3) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 0$ e $x = 0$; $S = \{(0, 0)\} \Rightarrow$ S.P.D.

**b)** $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 7x - 14y = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \quad \leftarrow \left(\frac{1}{7}\right) \cdot (2^a \text{ eq.}) \end{cases}$

Obtemos equações equivalentes e para $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema se reduz à equação linear $-x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$; $S = \{(2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ S.P.I.

**c)** $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 11y - 3z = 0 \quad \leftarrow (1^a \text{ eq.}) + (-2) \cdot (2^a \text{ eq.}) \\ 7y + z = 0 \quad \leftarrow (1^a \text{ eq.}) \cdot 3 + (3^a \text{ eq.}) \cdot (-2) \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 11y - 3z = 0 \\ -32z = 0 \leftarrow 7 \cdot (2^a \text{ eq.}) + (-11) \cdot (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$; $S = \{(0, 0, 0)\}$; S.P.D.

**d)** $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \leftarrow (-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ -5y + 5z = 0 \leftarrow (-4) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$

$2^a$ equação: $y = z$

$1^a$ equação: $x + 2z - z = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow x = -z$

Assim, para um valor $\alpha$ real qualquer de **z**, obtemos:

$S = \{(-\alpha, \alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

**54. a)** $m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

**b)** $\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 6x - y + 15z = 0 \end{cases} \sim$

$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 5y - 9z = 0 \leftarrow (-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ 5y - 9z = 0 \leftarrow (-6) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 5y - 9z = 0 \end{cases}$

De $5y - 9z = 0$, temos $y = \frac{9z}{5}$ e, na $1^a$ equação: $x = \frac{-11z}{5}$. Se $z = \alpha$, escrevemos:

$S = \left\{\left(\frac{-11\alpha}{5}, \frac{9\alpha}{5}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ ou ainda, para um valor real $\alpha$ qualquer de **z**, podemos escrever, alternativamente, $S = \{(-11\alpha, 9\alpha, 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

**55.** $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ (m + 1) \cdot y = 0 \end{cases}$

Se na $2^a$ equação o coeficiente de **y** se anular, isto é, se $m = -1$, o sistema admitirá infinitas soluções.

Assim, se $m \neq -1$, teremos, como única solução, o par ordenado $(0, 0)$.

**56.** Como o sistema é homogêneo, a condição $D = 0$ é suficiente para garantir que o sistema seja indeterminado (e assim, admite soluções próprias).

**a)** $D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m + 8 = 0 \Rightarrow m = -8$

**b)** Se $m = -8$, obtemos $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -4x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -2y$; solução geral: $S = \{(-2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

Algumas soluções próprias:

$\alpha = 1 \Rightarrow (-2, 1)$

$\alpha = 3 \Rightarrow (-6, 3)$

$\alpha = -4 \Rightarrow (8, -4)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

## Desafio

**x**: número de cédulas de R$ 20,00
**y**: número de cédulas de R$ 50,00
**z**: número de cédulas de R$ 100,00

$$\begin{cases} x + y + z = 96 \\ 20x + 50y + 100z = 5\,200 \\ y = \dfrac{x+z}{2}, \text{ pois } (x, y, z) \text{ é P.A.} \end{cases} \sim$$

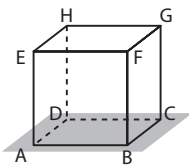
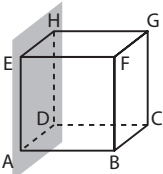
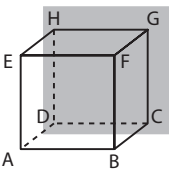
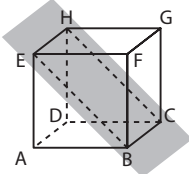
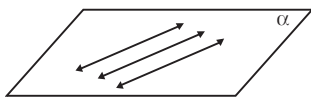
$$\sim \begin{cases} x + y + z = 96 \\ 20x + 50y + 100z = 5\,200 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 96 \\ 30y + 80z = 3\,280 \\ -3y = -96 \end{cases}$$

De: $-3y = -96$, temos $y = 32$
Na 2ª equação: $30 \cdot 32 + 80z = 3\,280 \Rightarrow z = 29$
Na 1ª equação: $x = 96 - 32 - 29 = 35$
A P.A. é (35, 32, 29); sua razão é $-3$.

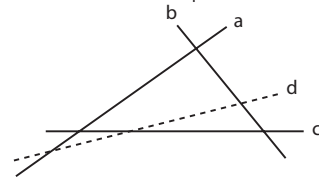
# Geometria Espacial de Posição

## Exercícios

**1.** **a)**

**b)**

**c)**

**d)**

**2.** Um único plano, se as três forem coplanares. (Veja figura abaixo.)

Se não houver um único plano que as contenha, duas a duas elas determinam um único plano. No total, são três planos: imagine que as retas sejam $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$. Temos: $\alpha = (r_1, r_2)$, $\beta = (r_1, r_3)$ e $\gamma = (r_2, r_3)$

**3.** Se os 4 pontos estão em um mesmo plano, determinam um único plano.
Se os 4 pontos não estão em um mesmo plano, agrupando-os de 3 em 3 obtemos 4 planos distintos.
Se os 4 pontos estão em uma mesma reta, existem infinitos planos que os contêm; assim, nenhum deles fica determinado (de maneira única).

**4.** Sejam **a**, **b**, **c** e **d** as retas. As retas **a**, **b** e **c**, sendo duas a duas concorrentes, são as retas suportes dos lados de um triângulo; portanto, são coplanares. A reta **d**, sendo concorrente com as três anteriores, estará também contida nesse plano.
Logo, é determinado um único plano.

**5.** Três pontos (representados pelos pés das mesas) não colineares determinam um único plano (o plano do chão), mas quatro pontos podem determinar mais de um plano, "provocando", desse modo, o balanço da mesa.

**6.** **a)** **V**
**b)** **V**
**c)** **V**
**d)** **V**
**e)** **F**

**7.** **a)** $\alpha$ e $\beta$; $\alpha$ e $\gamma$; $\alpha$ e $\delta$.
**b)** $\beta$ e $\gamma$ (paralelos coincidentes).
$\beta$ e $\delta$; $\gamma$ e $\delta$ (paralelos distintos).

**8.** **a)** **F** (A reta pode estar contida no plano.)
**b)** **V**
**c)** **V**
**d)** **F**
**e)** **V**

**9.** **a)** Paralelos.
**b)** Secantes.
**c)** Secantes.
**d)** Secantes.
**e)** Paralelos coincidentes.

**10.** Vamos apresentar, para cada item, duas respostas possíveis.
**a)** plano $\underbrace{(CDE)}_{\text{plano do assento}}$ e plano $\underbrace{(GHI)}_{\text{solo}}$; plano (ABC) e plano (EFG).
**b)** plano $\underbrace{(ABC)}_{\text{plano do encosto}}$ e plano $\underbrace{(CDE)}_{\text{plano do assento}}$. A interseção é $\overleftrightarrow{CD}$;
plano (CDE) e plano (EFG). A interseção é $\overleftrightarrow{EF}$.

**c)** $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\overline{EG}$ e $\overline{FJ}$.

**d)** $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. O plano determinado por elas é $\underbrace{(ABC)}_{\text{plano do encosto}}$.

$\overline{EF}$ e $\overline{CF}$. O plano determinado por elas é $\underbrace{(CDE)}_{\text{plano do assento}}$.

**e)** $\overline{AD}$ é secante ao plano (CDE)

O traço de $\overline{AD}$ no plano é o ponto **D**.

$\overline{EG}$ é secante ao plano (GHI)

O traço de $\overline{EG}$ no plano é o ponto **G**.

**f)** $\overline{AB}$ é paralela ao plano $\underbrace{(CDE)}_{\text{assento}}$.

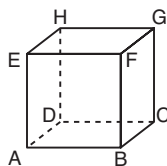
$\overline{ED}$ é paralela ao plano $\underbrace{(GHI)}_{\text{solo}}$.

**11.** **a) V**
**b) V**
**c) V**
**d) F**; são secantes.
**e) F**; a reta é secante ao plano.

**12.** **a) V**
**b) V**
**c) F**, pois, se forem reversas, não haverá plano que as contenha.
**d) V**
**e) F**; podem ser reversas.
**f) V**
**g) V**
**h) V**

**13.** **a)** Concorrentes.
**b)** Reversas.
**c)** Paralelas distintas.
**d)** Secantes.
**e)** Paralelas.
**f)** Reversas.

**14.** **a) V**
**b) V**
**c) F**
**d) V**
**e) F**
**f) V**
**g) V**

**15.** **a) V**
**b) F**, pois elas podem ser ortogonais.
**c) V**
**d) F**; no cubo ABCDEFGH, as retas $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ são perpendiculares à reta $\overline{EF}$, porém as retas $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ são paralelas entre si.

**e) F**; no cubo do item anterior, $\overline{AE}$ é perpendicular a $\overline{AD}$; $\overline{CD}$ é perpendicular a $\overline{AD}$ e as retas $\overline{AE}$ e $\overline{CD}$ são reversas ortogonais.

**16.** **a) F**; são paralelas distintas.
**b) V**
**c) V**, pois são paralelas distintas.
**d) F**; são reversas.
**e) V**

**17.** **a)** $\overline{AE}$ e $\overline{AB}$ são concorrentes e estão contidas no plano (ABE); $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ são concorrentes e estão contidas no plano (ABC) etc.
**b)** $\overline{AB}$ // $\overline{EF}$, pois $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ estão contidas no plano (ABE); $\overline{EF}$ // $\overline{GH}$, pois $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ estão contidas no plano (EFG) etc.
**c)** $\overline{AB} \perp \overline{FG}$, $\overline{DC}$ // $\overline{AB}$ e $\overline{DC} \perp \overline{FG}$.
$\overline{EF} \perp \overline{CG}$, $\overline{AB}$ // $\overline{EF}$ e $\overline{AB} \perp \overline{CG}$ etc.
**d)** $\overline{AE}$ // plano (BCG), $\overline{AD}$ // plano (BCG), mas $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ são concorrentes; $\overline{AB}$ // plano (EFG), $\overline{BC}$ // plano (EFG), mas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são concorrentes etc.

**18.** **a) V**
**b) V**
**c) F**; a reta pode estar contida no plano.
**d) V**
**e) F**; uma reta perpendicular à reta dada pode ser paralela ao plano.
**f) V**

**19.** **a)** $\overline{AM}$ é perpendicular aos planos (ABC) e (MNP).
**b)** $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$, $\overline{DQ}$, $\overline{ER}$ e $\overline{FS}$
**c)** O plano (CDQ) é paralelo ao plano (AMS).
**d)** Planos: (MNP), (ABC), (ABM), (CDQ), (AMS) e (EDQ).

**20.** **a)** A reta **r**.
**b)** A reta **s**.
**c)** A reta **t**.
**d)** 90°

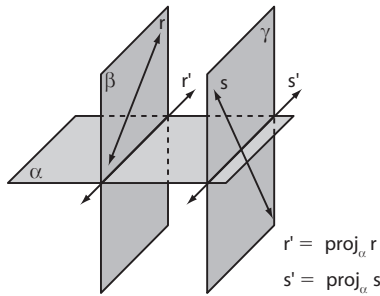
**21.** **a)** Sim; o traço de $\overline{FG}$ no plano (ABE) é o ponto **F**. Os planos (BFG) e (EFG) contêm $\overline{FG}$, e $\overline{FG}$ é perpendicular ao plano (ABE). Assim, pela definição, os planos (BFG) e (ABE) são perpendiculares, bem como os planos (EFG) e (ABE) também são perpendiculares.
**b)** Sim; observe, por exemplo, que o plano (ABC) contém a reta $\overline{BC}$, que é perpendicular ao plano (CDG).
O traço de um no outro é a reta $\overline{CD}$.
**c)** Sim; o plano (BDF) contém a reta $\overline{DH}$, que é perpendicular ao plano (ABC). Logo, os planos são perpendiculares.
O traço é a reta $\overline{BD}$.

**22.** **a) F**; os planos podem ser oblíquos.
**b) V**
**c) F**; uma reta de um plano pode ser paralela ao outro plano.
**d) F**; são infinitos planos.

**e)** **F**; os planos podem ser paralelos.
**f)** **F**; os planos podem ser perpendiculares.
**g)** **V**

**23. a)** Planos: (ABC), (EFG), (CDI), (EFK).
**b)** Sim; reta $\overleftrightarrow{EF}$; oblíquos.
**c)** Secantes.

**24. a)** **V**
**b)** **F**; a projeção pode ser um ponto.
**c)** **F**; a projeção pode ser um ponto.
**d)** **V**
**e)** **F**; se um deles for perpendicular ao plano, sua projeção é um ponto.
**f)** **V**
**g)** **F**

**25. a)** **F**; elas podem estar em planos paralelos e ser reversas.

**b)** **V**
**c)** **V**
**d)** **F**; os "lados" de um ângulo são semirretas.
**e)** **V**

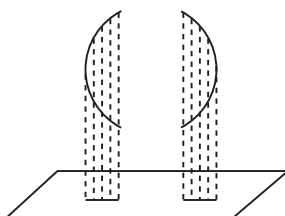
**26. a)** 3 cm
**b)** 7 cm
**c)** 2 cm
**d)** 7 cm
**e)** 3 cm
**f)** 3 cm
**g)** 7 cm

## Desafio

No movimento de subida e descida, as extremidades **A** e **B** realizam trajetórias de arcos de circunferência.
O centro de cada uma dessas circunferências é o pivô-ponto central da gangorra. Ao projetarmos essas trajetórias ortogonalmente sobre o plano do chão, obtemos dois segmentos de reta, como é mostrado a seguir:

Alternativa *b*.

CAPÍTULO 8

# Poliedros

## Exercícios

**1. a)** $a = 2{,}5 \text{ cm} = \frac{5}{2} \text{ cm}$

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$

$A_t = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot (2{,}5)^2 \Rightarrow A_t = 37{,}5 \text{ cm}^2$

$V = a^3 = (2{,}5 \text{ cm})^3 = 15{,}625 \text{ cm}^3$

**b)** $a = b = 2 \text{ cm};\ c = 2{,}5 \text{ cm}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2{,}5^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{57}}{2} \text{ cm}$

$\left.\begin{array}{l} A_b = a \cdot b \Rightarrow A_b = (2 \text{ cm}) \cdot (2 \text{ cm}) = 4 \text{ cm}^2 \\ A_\ell = 4 \cdot a \cdot c \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot (2 \text{ cm}) \cdot (2{,}5) \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 8 \text{ cm}^2 + 20 \text{ cm}^2 = 28 \text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot c \Rightarrow V = (4 \text{ cm}^2) \cdot (2{,}5 \text{ cm}) = 10 \text{ cm}^3$

**c)** $a = 3 \text{ cm};\ b = 1{,}5 \text{ cm};\ c = 2 \text{ cm}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow d = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2 + 2^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{61}}{2} \text{ cm}$

$A_b = a \cdot b \Rightarrow A_b = (3 \text{ cm}) \cdot (1{,}5 \text{ cm}) = 4{,}5 \text{ cm}^2$

$A_\ell = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 2 \cdot (3 \text{ cm}) \cdot (2 \text{ cm}) + 2 \cdot (1{,}5 \text{ cm}) \cdot (2 \text{ cm}) =$

$= 18 \text{ cm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 2 \cdot 4{,}5 \text{ cm}^2 + 18 \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^2$

$V = a \cdot b \cdot c = A_b \cdot c \Rightarrow V = (4{,}5 \text{ cm}^2) \cdot (2 \text{ cm}) = 9 \text{ cm}^3$

**2.** $a = 4 \text{ dm};\ b = 7 \text{ dm};\ d = 3\sqrt{10} \text{ dm}$

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{10}\right)^2 = 4^2 + 7^2 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 5 \text{ dm}$

$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = (4 \text{ dm}) \cdot (7 \text{ dm}) \cdot (5 \text{ dm}) = 140 \text{ dm}^3$

**3.** $12 \cdot a = 48 \text{ cm} \Rightarrow a = 4 \text{ cm}$

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow d = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

$A_t = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_t = 6 \cdot (4 \text{ cm})^2 = 96 \text{ cm}^2$

$V = a^3 \Rightarrow V = (4 \text{ cm})^3 = 64 \text{ cm}^3$

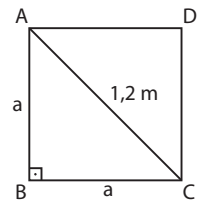
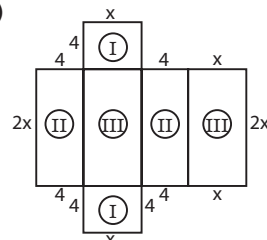
**4.** $\triangle ABC$ retângulo

$a^2 + a^2 = (1{,}2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \frac{72}{100} \Rightarrow a = 0{,}6\sqrt{2} \text{ m}$

$A_t = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_t = 6 \cdot \frac{72}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 4{,}32 \text{ m}^2$

$V = a^3 \Rightarrow V = \left(0{,}6\sqrt{2}\right)^3 \Rightarrow V = 0{,}432\sqrt{2} \text{ m}^3$

**5. a)**

$A_t = 364\text{ cm}^2 \Rightarrow 2 \cdot A_I + 2 \cdot A_{II} + 2 \cdot A_{III} = 364\text{ cm}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot 4x + 2 \cdot 4 \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 2x = 364 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 6x - 91 = 0 \Rightarrow x = 7\text{ cm}$

**b)** $x = 4\text{ cm}$
$V = x \cdot 2x \cdot 4 \Rightarrow V = (4\text{ cm}) \cdot (8\text{ cm}) \cdot (4\text{ cm}) = 128\text{ cm}^3$

**c)** $x = 6\text{ cm}$
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 + x^2 + (2x)^2 = 5x^2 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow d^2 = 5 \cdot 6^2 + 16 \Rightarrow d = 14\text{ cm}$

**6.** $\begin{cases} \textbf{a}, \textbf{b}, \textbf{c}\text{: medidas das dimensões do paralelepípedo (em cm)} \\ \text{Volume do paralelepípedo: } V = 192\text{ cm}^3 \end{cases}$

$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow abc = 192\text{ cm}^3$ (*)
Considerando $a \cdot b = 32\text{ cm}^2$ e $a \cdot c = 24\text{ cm}^2$, temos, de (*):

$\left.\begin{matrix} 32 \cdot c = 192\text{ cm} \Rightarrow c = 6\text{ cm} \\ 24 \cdot b = 192\text{ cm} \Rightarrow b = 8\text{ cm} \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \cdot c = 48\text{ cm}^2$

$\mathbf{A_t}$: área total do paralelepípedo
$A_t = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 64\text{ cm}^2 + 48\text{ cm}^2 + 96\text{ cm}^2 = 208\text{ cm}^2$

**7.** $\mathbf{V_p}$: volume do paralelepípedo
$V_p = (20\text{ cm}) \cdot (30\text{ cm}) \cdot (45\text{ cm}) = 27\,000\text{ cm}^3$
$\mathbf{V_c}$: volume do cubo de x cm de aresta $\Rightarrow V_c = x^3\text{ cm}^3$

**a)** Como $V_c = V_p$, temos $x^3 = 27\,000\text{ cm}^3 \Rightarrow x = 30\text{ cm}$

**b)** $d = x\sqrt{3} \Rightarrow d = 30\sqrt{3}\text{ cm}$

**c)** Área total do paralelepípedo:
$A_{Tp} = 2 \cdot 20 \cdot 30 + 2 \cdot 20 \cdot 45 + 2 \cdot 30 \cdot 45 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{Tp} = 5\,700\text{ cm}^2$
Área total do cubo:
$A_{Tc} = 6 \cdot 30^2 \Rightarrow A_{Tc} = 5\,400\text{ cm}^2$
Assim, $\dfrac{A_{Tp}}{A_{Tc}} = \dfrac{5\,700\text{ cm}^2}{5\,400\text{ cm}^2} = \dfrac{19}{18}$

**8.** **a)** $\left.\begin{matrix} A_t = 6a^2 \\ A'_t = 6 \cdot (2a)^2 = 4 \cdot (6a^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'_t = 4 \cdot A_t$

$\left.\begin{matrix} V = a^3 \\ V' = (2a)^3 = 8a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V' = 8 \cdot V$

**b)** $\left.\begin{matrix} A_t = 6 \cdot a^2 \\ A'_t = 6\left(\dfrac{1}{3}a\right)^2 = \dfrac{1}{9} \cdot (6a^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'_t = \dfrac{1}{9} \cdot A_t$

$\left.\begin{matrix} V = a^3 \\ V' = \left(\dfrac{1}{3}a\right)^3 = \dfrac{1}{27} \cdot a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V' = \dfrac{1}{27} \cdot V$

**c)** $\left.\begin{matrix} A_t = 6a^2 \\ A'_t = 6\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(6a^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'_t = \dfrac{1}{4} A_t$

$\left.\begin{matrix} V = a^3 \\ V' = \left(\dfrac{a}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8} \cdot a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V' = \dfrac{1}{8} \cdot V$

**d)** $\left.\begin{matrix} A_t = 6a^2 \\ A'_t = 6\,(ka)^2 = k^2 \cdot (6a^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'_t = k^2 \cdot A_t$

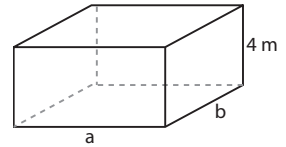
$\left.\begin{matrix} V = a^3 \\ V' = (ka)^3 = k^3 \cdot a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V' = k^3 \cdot V$

**9.** Reservatório original: $\begin{cases} \text{medida da aresta da base: x dm} \\ \text{medida da altura: } h_1 = 8\text{ dm} \\ \text{volume: } V_1 = 8x^2\text{ dm}^3 \end{cases}$

Novo reservatório:
$\begin{cases} \text{medida da aresta da base: } (x + 0{,}2x)\text{ dm} = 1{,}2x\text{ dm} \\ \text{medida da altura: } h_2 = (8 + 0{,}2 \cdot 8)\text{ dm} = 9{,}6\text{ dm} \\ V_2 = (1{,}2x)^2 \cdot 9{,}6\text{ dm}^3 = 13{,}824\,x^2\text{ dm}^3 \end{cases}$
Como $1\text{ L} = 1\text{ dm}^3$ e $V_2 = 3\,110{,}4\text{ L}$, então $V_2 = 3\,110{,}4\text{ dm}^3$
Logo: $13{,}824x^2 = 3\,110{,}4 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = 15$

**10.** $h = 4\text{ m};\ 2a + 2b = 40\text{ m} \Rightarrow a + b = 20\text{ m}$

$\left.\begin{matrix} V = A_b \cdot h = a \cdot b \cdot 4 \\ V = 384\,000\text{ L} = 384\text{ m}^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4ab = 384 \Rightarrow ab = 96$

$\begin{cases} a + b = 20 \\ ab = 96 \end{cases} \Rightarrow a = 12\text{ m e } b = 8\text{ m}$

**11.** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{15}{6} \Rightarrow x = 5\text{ m e } y = 10\text{ m}$

**a)** $A_t = 2 \cdot (5 \cdot 10) + 2 \cdot (5 \cdot 15) + 2 \cdot (10 \cdot 15) \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 550\text{ m}^2$

**b)** $V_1 = (2\text{ m}) \cdot (4\text{ m}) \cdot (6\text{ m}) = 48\text{ m}^3$
$V_2 = (5\text{ m}) \cdot (10\text{ m}) \cdot (15\text{ m}) = 750\text{ m}^3$
Porcentagem de acréscimo:
$\dfrac{V_2 - V_1}{V_1} = \dfrac{750 - 48}{48} = 14{,}625 = 1\,462{,}5\%$

**12.** Considerando a P.A. $(x - 3, x, x + 3)$, as medidas das arestas do paralelepípedo são: $a = (x - 3)$ cm, $b = x$ cm e $c = (x + 3)$ cm.
$A_t = 846\text{ cm}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x \cdot (x - 3) + 2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) + 2x \cdot (x + 3) = 846 \underset{x > 0}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow x = 12\text{ cm}$
Assim, obtemos: $a = 9$ cm, $b = 12$ cm e $c = 15$ cm

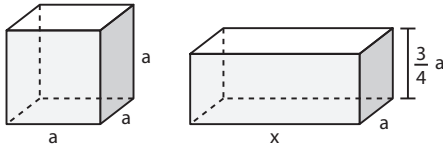
**a)** Medida da diagonal:
$d = \sqrt{9^2 + 12^2 + 15^2} \Rightarrow d = 15\sqrt{2}\text{ cm}$

**b)** Volume:
$V = (9 \cdot 12 \cdot 15)\text{ cm}^3 \Rightarrow V = 1\,620\text{ cm}^3$

**13.** 1 bloco $\begin{cases} \text{medidas das arestas das bases:} \\ a = 12\text{ cm e } b = 21\text{ cm} \\ \text{altura: } h = \dfrac{1}{11}(2a + 2b) \Rightarrow \\ \Rightarrow h = \dfrac{24 + 42}{11} \Rightarrow h = 6\text{ cm} \end{cases}$

**V**: volume de 1 bloco
$V = a \cdot b \cdot h \Rightarrow V = 12 \cdot 21 \cdot 6 \Rightarrow V = 1\,512\text{ cm}^3$
$\mathbf{V_1}$: volume de 1 cubinho de 3 cm de aresta
$V_1 = (3\text{ cm})^3 = 27\text{ cm}^3$
**n**: número de cubinhos de 1 bloco $\Rightarrow n = \dfrac{V}{V_1} = \dfrac{1\,512}{27} = 56$
**C**: custo dos 20 blocos $\Rightarrow C = 20 \cdot 15\text{ reais} = 300\text{ reais}$
**P**: preço de venda dos $(20 \cdot 56)$ cubinhos $=$
$= 1\,120$ cubinhos
$P = 1\,120 \cdot 0{,}80\text{ reais} = 896\text{ reais}$
**L**: lucro obtido $\Rightarrow L = P - C = 896 - 300 \Rightarrow L = \text{R\$ } 596{,}00$

**14.** **a**: medida da aresta do cubo.

**x**, **a** e $\frac{3}{4}$a: medidas das arestas do paralelepípedo.

$$\begin{cases} \mathbf{V_1}\text{: volume do cubo} \Rightarrow V_1 = a^3 \\ \mathbf{V_2}\text{: volume do paralelepípedo} \Rightarrow \\ \Rightarrow V_2 = x \cdot a \cdot \frac{3}{4}a = \frac{3}{4} \cdot xa^2 \end{cases}$$

$V_1 = V_2 \Rightarrow a^3 = \frac{3}{4} \cdot xa^2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}a$ (1)

$$\begin{cases} \mathbf{A_1}\text{: área total do cubo} \Rightarrow A_1 = 6a^2 \\ \mathbf{A_2}\text{: área total do paralelepípedo} \Rightarrow \\ \Rightarrow A_2 = 2(x \cdot a) + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}a \cdot a\right) + 2 \cdot \left(x \cdot \frac{3}{4}a\right) \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow A_2 = \frac{8}{3}a^2 + \frac{3}{2}a^2 + 2a^2 \Rightarrow A_2 = \frac{37}{6}a^2$

(1)

Logo: $A_2 - A_1 = \frac{37}{6}a^2 - 6a^2 = \frac{a^2}{6}$

Alternativa *a*.

**15.** Dimensões das paredes internas do vaso:

Base: a = 11 cm − 1 cm = 10 cm;

b = 12 cm − 1 cm = 11 cm

Altura: h = 24 cm − 0,5 cm = 23,5 cm

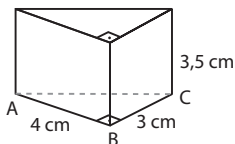
**a)** $V = a \cdot b \cdot h = (10 \text{ cm}) \cdot (11 \text{ cm}) \cdot (23,5 \text{ cm}) =$

$= 2\,585 \text{ cm}^3 = 2,585 \text{ L}$

**b)** **V'**: volume do vidro

$V' = (12 \text{ cm}) \cdot (11 \text{ cm}) \cdot (24 \text{ cm}) - V \Rightarrow$

$\Rightarrow V' = 3\,168 \text{ cm}^3 - 2\,585 \text{ cm}^3 = 583 \text{ cm}^3$

**16.** **a)** Prisma reto triangular

$\triangle ABC$ retângulo $\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow$

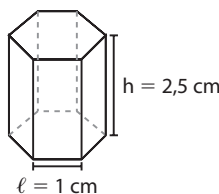
$\Rightarrow AC^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow AC = 5 \text{ cm}$

$A_\ell = 4 \cdot 3,5 + 3 \cdot 3,5 + 5 \cdot 3,5 \Rightarrow A_\ell = 42 \text{ cm}^2$

$A_b = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow A_b = 6 \text{ cm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 2 \cdot 6 + 42 \Rightarrow A_t = 54 \text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = 6 \cdot 3,5 \Rightarrow V = 21 \text{ cm}^3$

**b)** Prisma regular hexagonal

$A_\ell = 6 \cdot (1 \cdot 2,5) \Rightarrow A_\ell = 15 \text{ cm}^2$

$\mathbf{A_b}$ é a área do hexágono regular de lado $\ell$ de medida igual a 1 cm.

$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_b = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b \Rightarrow A_t = 15 + 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 3(5 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2,5 \Rightarrow V = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$

**c)** Prisma oblíquo de base quadrada

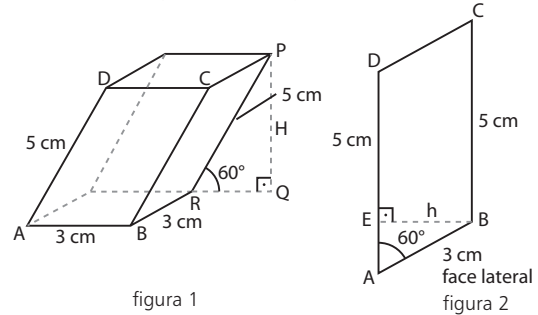



figura 1 figura 2

Figura 2:

$\triangle AEB$ retângulo $\Rightarrow$ sen 60° $= \frac{h}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$

$A_\ell = 4 \cdot (AD \cdot h) \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_\ell = 30\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Figura 1:

$A_b = 3 \cdot 3 \Rightarrow A_b = 9 \text{ cm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = (18 + 30\sqrt{3}) \text{ cm}^2 =$

$= 6(3 + 5\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

Figura 1:

$\triangle PQR$ retângulo $\Rightarrow$ sen 60° $= \frac{H}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow H = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$

$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = 9 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{45\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$

**17.** $3\ell = 12 \text{ dm} \Rightarrow \ell = 4 \text{ dm}$

$\triangle AMC$ retângulo:

$h^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{3} \text{ dm}$

**H**: altura do prisma

$H = 2h \Rightarrow H = 4\sqrt{3} \text{ dm}$

$A_b = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot h \Rightarrow A_b = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow A_b = 4\sqrt{3} \text{ dm}^2$

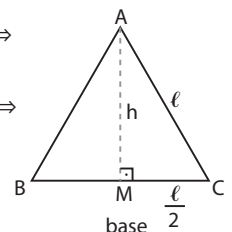
$A_\ell = 3 \cdot (\ell \cdot H) \Rightarrow A_\ell = 3 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 48\sqrt{3} \text{ dm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 8\sqrt{3} + 48\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 56\sqrt{3} \text{ dm}^2$

$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = (4\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 48 \text{ dm}^3$

**18.** **a)**

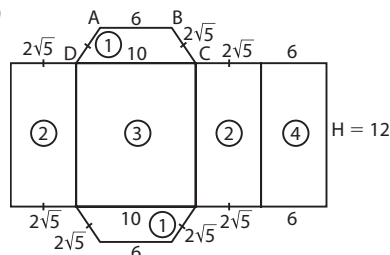



figura 1

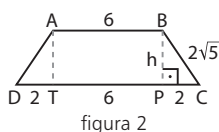



figura 2

Na figura 2 (base do prisma):

$\triangle BPC$ retângulo:

$h^2 + 4 = 20 \Rightarrow h = 4$ cm

$A_b = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h \Rightarrow A_b = \frac{1}{2}(6 + 10) \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_b = 32$ cm²

Logo: $V = A_b \cdot H \Rightarrow V = (32 \text{ cm}^2) \cdot (12 \text{ cm}) = 384 \text{ cm}^3$

**b)** $A_\ell = 2 \cdot A_{②} + A_{③} + A_{④} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 12 + 10 \cdot 12 + 6 \cdot 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 48(4 + \sqrt{5})$ cm²

Logo: $\frac{A_b}{A_\ell} = \frac{32}{48(4 + \sqrt{5})} \Rightarrow \frac{A_b}{A_\ell} = \frac{8 - 2\sqrt{5}}{33}$

**19.** $H = 8$ cm

$\overline{BD}$: diagonal do quadrado ABCD

$d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow 6\sqrt{2} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 6$ cm

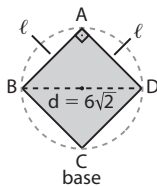
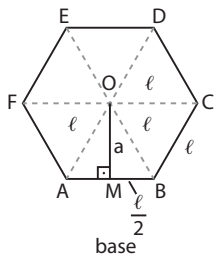
$A_b = \ell^2 \Rightarrow A_b = (6 \text{ cm})^2 = 36 \text{ cm}^2$

$A_\ell = 4 \cdot \ell \cdot H \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 4 \cdot (6 \text{ cm}) \cdot (8 \text{ cm}) = 192 \text{ cm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 72 \text{ cm}^2 + 192 \text{ cm}^2 = 264 \text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = 36 \cdot 8 \Rightarrow V = 288 \text{ cm}^3$

**20.** $H = 20$ dm; $a = 6\sqrt{3}$ dm

$\triangle AOB$ equilátero $\Rightarrow$ **M** ponto médio de $\overline{AB}$

$MB = \frac{\ell}{2}$

$\triangle OMB$ retângulo:

$\ell^2 = a^2 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow \frac{3\ell^2}{4} = (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow \ell = 12$ dm

$A_b = 6 \cdot A_{AOB} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot a\right) \Rightarrow A_b = 3 \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_b = 216\sqrt{3}$ dm²

$A_\ell = 6 \cdot \ell \cdot H \Rightarrow A_\ell = 6 \cdot 12 \cdot 20 \Rightarrow A_\ell = 1\,440$ dm²

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 432\sqrt{3} \text{ dm}^2 + 1\,440 \text{ dm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 144(10 + 3\sqrt{3})$ dm²

$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = (216\sqrt{3}) \cdot 20 \Rightarrow V = 4\,320\sqrt{3}$ dm³

**21.** $H = 4$ cm (medida da altura do porta-joias)

$x = 3$ cm (medida da aresta da base do porta-joias)

$A_\ell = 7 \cdot (x \cdot H) \Rightarrow A_\ell = 7 \cdot (3 \text{ cm}) \cdot (4 \text{ cm}) = 84 \text{ cm}^2$

Logo, a quantia adicional é $84 \cdot$ R\$ 0,15 = R\$ 12,60.

**22.** $V = 192\sqrt{3}$ m³; $A_\ell = 192$ m²

$\ell$: medida da aresta da base

**H**: medida da altura do prisma

$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_b = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \ell^2$

$A_\ell = 6 \cdot \ell \cdot H = 192 \Rightarrow \ell \cdot H = 32 \text{ m}^2$ (*)

$V = A_b \cdot H = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \ell^2 \cdot H = 192\sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 \cdot H = 128 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell(\ell H) = 128 \underset{*}{\Rightarrow} \ell \cdot 32 = 128 \Rightarrow \ell = 4$ m

Assim: $\ell \cdot H = 32 \text{ m}^2 \Rightarrow (4 \text{ m}) \cdot H = 32 \text{ m}^2 \Rightarrow H = 8$ m

**23.** $\ell$: medida da aresta da base ($\triangle$ equilátero)

**h**: medida da altura da base

**H**: medida da altura do prisma

$2p = 12 \text{ dm} \Rightarrow 3\ell = 12 \text{ dm} \Rightarrow \ell = 4$ dm

$A_b = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 4\sqrt{3}$ dm²

$H = \frac{5}{2} \cdot h \Rightarrow H = \frac{5}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{4} \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow H = 5\sqrt{3}$ dm

$A_\ell = 3 \cdot \ell \cdot H \Rightarrow A_\ell = 3 \cdot 4 \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow A_\ell = 60\sqrt{3}$ dm²

**a)** $A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = (8\sqrt{3} + 60\sqrt{3}) \text{ dm}^2 = 68\sqrt{3} \text{ dm}^2$

**b)** $V = A_b \cdot H \Rightarrow V = 4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow V = 60$ dm³

**24.** Base: é um hexágono regular de lado de medida igual a $\ell$ cm.

$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

$H = 18$ cm

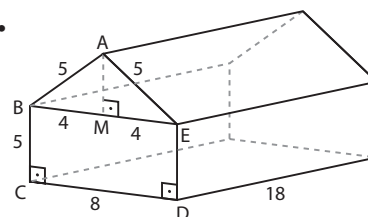
$A_\ell = 6(\ell \cdot H) \Rightarrow A_\ell = 6 \cdot 18\ell = 108\ell$

$\frac{A_b}{A_\ell} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2}\right) \cdot 3 = 108\ell \Rightarrow \ell = 8\sqrt{3}$ cm

Assim: $A_\ell = 108 \cdot 8\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 864\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{3 \cdot (8\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 5\,184\sqrt{3}$ cm³

**25.**

$\triangle ABE$ isósceles $\Rightarrow$ **M** é ponto médio de $\overline{BE} \Rightarrow ME = 4$ m

$\triangle AME$ retângulo $\Rightarrow AM^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow h = AM = 3$ m

Assim: $A_{ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot AM \Rightarrow A_{ABE} = \frac{1}{2}(8 \text{ m}) \cdot (3 \text{ m}) =$

$= 12$ m²

$A_{BCDE} = CD \cdot BC \Rightarrow A_{BCDE} = (8 \text{ m}) \cdot (5 \text{ m}) = 40 \text{ m}^2$

$A_b = A_{ABE} + A_{BCDE} = 52$ m²

$H = 18$ m

Logo: $V = A_b \cdot H \Rightarrow V = 52 \cdot 18 \Rightarrow V = 936$ m³

**26. a)** 5 faces: 1 base + 4 faces laterais $\Rightarrow$ pirâmide quadrangular

**b)** 10 faces: 1 base + 9 faces laterais $\Rightarrow$ pirâmide eneagonal

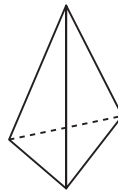
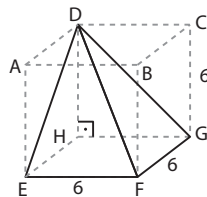
**c)** 6 arestas: 3 da base + 3 laterais $\Rightarrow$ pirâmide triangular

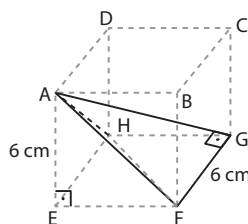
**d)** 16 arestas: 8 da base + 8 laterais $\Rightarrow$ pirâmide octogonal

**27.** Base: polígono convexo de 11 lados.
Temos:
- 11 vértices do polígono da base + 1 vértice da pirâmide = 12 vértices
- 11 arestas da base + 11 arestas laterais = 22 arestas
- 11 faces laterais + 1 base = 12 faces

**28. a)** n = número de lados do polígono da base = número de faces laterais
**$S_1$**: soma dos ângulos do polígono da base
$S_1 = (n - 2) \cdot 180°$
**$S_2$**: soma dos ângulos dos triângulos das faces laterais
$S_2 = n \cdot 180°$
$S_1 + S_2 = 20 \cdot 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow (n - 2) \cdot 180° + n \cdot 180° = 20 \cdot 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 6$
Logo, a pirâmide é hexagonal.

**b)** Da mesma forma que o item anterior, temos:
$S_1 + S_2 = 56 \cdot 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow (n - 2) \cdot 180° + n \cdot 180° = 56 \cdot 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 15$
Logo, a pirâmide é pentadecagonal.

**29.** A planificação dada corresponde a uma pirâmide de base triangular. São 4 vértices (o da pirâmide e os 3 da base), 6 arestas e 4 faces.

**30. a)** Vértice **D** e base EFGH.

$A_b = (6\text{ cm})^2 = 36\text{ cm}^2$
$DH = h = 6\text{ cm}$
$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}(36\text{ cm}^2) \cdot (6\text{ cm}) \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 72\text{ cm}^3$

**b)** Vértice **A** e base FGH.
$\triangle$FGH retângulo isósceles
$A_{FGH} = \frac{1}{2} \cdot FG \cdot GH \Rightarrow A_{FGH} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{FGH} = 18\text{ cm}^2$
$AE = h = 6\text{ cm}$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{FGH} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 \Rightarrow V = 36\text{ cm}^3$

**31.** H = 6 cm; $\ell$: medida da aresta da base
$2p = 4\ell = 8\text{ cm} \Rightarrow \ell = 2\text{ cm}$
$A_b = \ell^2 \Rightarrow A_b = (2\text{ cm})^2 \Rightarrow A_b = 4\text{ cm}^2$
$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3}(4\text{ cm}^2) \cdot (6\text{ cm}) = 8\text{ cm}^3$

**32.** Base é um losango, em que d = 6 m e D = 10 m.
$$\left.\begin{array}{l} H = 12\text{ m} \\ A_b = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d \Rightarrow A_b = \frac{1}{2} \cdot (10\text{ m}) \cdot (6\text{ m}) = 30\text{ m}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (30\text{ m}^2) \cdot (12\text{ m}) = 120\text{ m}^3$

**33.** Base do tetraedro é um triângulo equilátero de lado de medida igual a $\ell$ cm.
$2p = 12\text{ cm} \Rightarrow 3\ell = 12\text{ cm} \Rightarrow \ell = 4\text{ cm}$

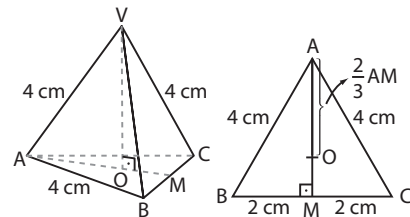



figura 1 figura 2

**a)** Como todas as faces do tetraedro são triângulos equiláteros congruentes, temos:
$A_t = \cancel{4} \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{\cancel{4}}\right) \Rightarrow A_t = (4\text{ cm})^2 \cdot \sqrt{3} = 16\sqrt{3}\text{ cm}^2$

**b)** H = VO = ?
Figura 1: $\triangle$VOA retângulo
$VO^2 + AO^2 = (4\text{ cm})^2 = 16\text{ cm}^2$ (1)
Figura 2: $\triangle$ABC equilátero
$AO = \frac{2}{3} \cdot AM \Rightarrow AO = \frac{2}{3}\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\ell\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow AO = \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$ (2)
Substituindo (2) em (1), temos:
$H^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow H = \frac{4\sqrt{6}}{3}\text{ cm}$

**c)** $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (4\sqrt{3}\text{ cm}) \cdot \left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\text{ cm}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow V = \frac{16\sqrt{2}}{3}\text{ cm}^3$

**34.** Base é um hexágono regular de 4 cm de lado.
$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = 6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3}\text{ cm}^2$
Figura 1:
$\triangle$VBC isósceles de altura $VM = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm
$\triangle$VOM retângulo $\Rightarrow h^2 + OM^2 = VM^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h^2 = (4\sqrt{6})^2 - OM^2$ (*)
$\overline{OM}$: altura do triângulo equilátero OBC
$OM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OM = \frac{4\sqrt{3}}{2}\text{ cm} = 2\sqrt{3}\text{ cm}$ (**)
Substituindo (**) em (*), temos:
$h^2 = 96 - 12 \Rightarrow h = 2\sqrt{21}\text{ cm}$

Logo: $V = \frac{1}{3}(24\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{21}) \Rightarrow V = 48\sqrt{7}$ cm³

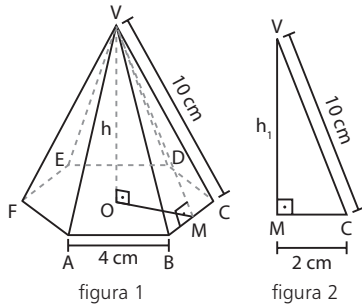



figura 1 figura 2

Figura 2:

$\triangle$VMC retângulo $\Rightarrow VM^2 + 4 = 100 \Rightarrow VM = 4\sqrt{6}$ cm

$A_{VBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot VM \Rightarrow A_{VBC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{VBC} = 8\sqrt{6}$ cm²

Logo:

$A_\ell = 6 \cdot A_{VBC} \Rightarrow A_\ell = 48\sqrt{6}$ cm²

$A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = (24\sqrt{3} + 48\sqrt{6})$ cm² $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 24\sqrt{3}(1 + 2\sqrt{2})$ cm²

**35.** H = 8 m; $a = 2\sqrt{3}$ m

**a**: medida da altura do triângulo equilátero de lado de medida $\ell$ cm

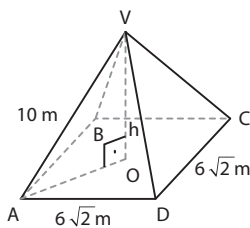
$a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\text{ m} \Rightarrow \ell = 4$ m

$\mathbf{A_1}$: área do triângulo equilátero de lado de medida $\ell = 4$ m

$A_1 = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_1 = 4\sqrt{3}$ m²

$A_b = 6 \cdot A_1 \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3}$ m²

Logo: $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 8 \Rightarrow V = 64\sqrt{3}$ m³

**36.** Na figura, temos:

$AO = \frac{AC}{2} = \frac{AD\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AO = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow AO = 6$ cm

$\triangle$VOA retângulo $\Rightarrow h^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow h = 8$ cm

Logo: $V = \frac{1}{3} \cdot (6\sqrt{2})^2 \cdot 8 \Rightarrow V = 192$ cm³

**37.** $\ell$: medida da aresta da base

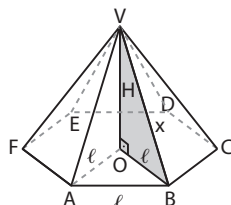
$6\ell = 24$ cm $\Rightarrow \ell = 4$ cm

**x**: medida da aresta lateral

6x = 30 cm $\Rightarrow$ x = 5 cm

$\triangle$AOB equilátero

$A_{AOB} = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{AOB} = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{AOB} = 4\sqrt{3}$ cm²

$A_b = 6 \cdot A_{AOB} \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3}$ cm²

$\triangle$VOB retângulo $\Rightarrow H^2 + \ell^2 = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H^2 = 25$ cm² $- 16$ cm² $\Rightarrow H = 3$ cm

Logo: $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3}(24\sqrt{3}) \cdot 3 \Rightarrow V = 24\sqrt{3}$ cm³

**38.** $\ell = 6$ cm

$A_b = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{36 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 9\sqrt{3}$ cm²

**H**: medida da altura do tetraedro

$H = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \Rightarrow H = \frac{6\sqrt{6}}{3} \Rightarrow H = 2\sqrt{6}$ cm

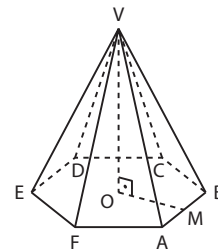
$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3}(9\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{6}) \xRightarrow[\sqrt{2} \simeq 1,4]{}$

$\Rightarrow V = 25,2$ cm³

| volume (cm³) | | massa (g) |
|---|---|---|
| 1 | —— | 2,6 |
| 25,2 | —— | x |

$\Rightarrow$

$\Rightarrow x = 25,2 \cdot 2,6$ g $= 65,52$ g

**39.** $\begin{cases} \ell\text{: medida do lado da base da pirâmide} \\ \text{VO: medida da altura da pirâmide; VO} = \ell \end{cases}$

**M**: ponto médio de $\overline{AB}$

VM: medida da altura do triângulo isósceles VAB; VM = h

OM: medida da altura do triângulo equilátero AOB

$OM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$\triangle$VOM retângulo $\Rightarrow VO^2 + OM^2 = VM^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell^2 + \frac{3\ell^2}{4} = h^2 \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{7}}{2}$

Assim, temos:

$$\begin{cases} A_{lateral} = 6 \cdot A_{VAB} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{7}}{2}\right) = \frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{7}}{2} & (1) \\ A_{base} = 6 \cdot A_{AOB} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$$

Como $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot VO \Rightarrow V = 4\sqrt{3}$ cm³, temos:

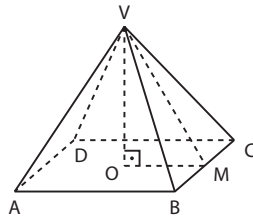
$\frac{1}{3} \cdot \frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \ell = 4\sqrt{3}$ cm³ $\Rightarrow \ell = 2$ cm

Substituindo $\ell = 2$ cm em (1) e (2), obtêm-se:

$A_\ell = 6\sqrt{7}$ cm² e $A_b = 6\sqrt{3}$ cm² $\Rightarrow A_t = (6\sqrt{7} + 6\sqrt{3}) =$

$= 6(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm²

Alternativa *b*.

**40.** $\begin{cases} \text{VO: medida da altura da pirâmide; VO} = h \\ \text{OM: medida do apótema da base; OM} = 6 \text{ cm} \\ \text{VM: medida do apótema da pirâmide; VM} = 6\sqrt{2} \text{ cm} \end{cases}$ *

$\triangle$VOM retângulo $\Rightarrow VO^2 = VM^2 - OM^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = (6\sqrt{2} \text{ cm})^2 - (6 \text{ cm})^2 = 36 \text{ cm}^2 \Rightarrow h = 6 \text{ cm}$

$OM = \frac{1}{2} \cdot AB \Rightarrow AB = 2 \cdot OM \Rightarrow AB = 2 \cdot (6 \text{ cm}) = 12 \text{ cm}$

Logo: $V = \frac{1}{3} \cdot AB^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (12 \text{ cm})^2 \cdot (6 \text{ cm}) \Rightarrow$

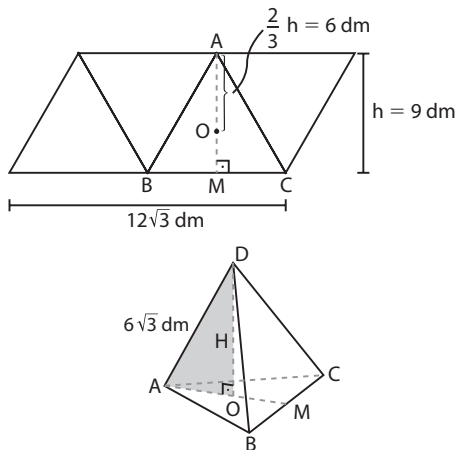
$\Rightarrow V = 288 \text{ cm}^3$

**41.** $\begin{cases} \mathbf{A_1} \text{ e } \mathbf{V_1}\text{: respectivas áreas da base e volume do prisma cuja altura mede } \mathbf{h_1} \\ \mathbf{A_2} \text{ e } \mathbf{V_2}\text{: respectivas áreas da base e volume da pirâmide cuja altura mede } \mathbf{h_2} \end{cases}$

Como $A_1 = A_2$ e $V_1 = 5 \cdot V_2$, temos:

$A_1 \cdot h_1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h_2\right) \Rightarrow h_2 = \frac{3}{5} h_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = 0{,}60h_1 = 60\%h_1$

**42.**

A área total do tetraedro é igual à área do paralelogramo que representa a planificação de sua superfície, ou seja:

$A_t = (12\sqrt{3} \text{ dm}) \cdot (9 \text{ dm}) = 108\sqrt{3} \text{ dm}^2$

H = OD: medida da altura do tetraedro

$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ dm}$

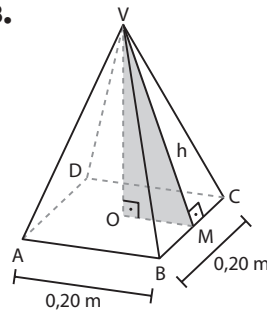
$\triangle$AOD retângulo $\Rightarrow AO^2 + OD^2 = AD^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H^2 = (6\sqrt{3})^2 - 6^2 \Rightarrow H = 6\sqrt{2} \text{ dm}$

$A_b = \frac{1}{4} \cdot A_t \Rightarrow A_b = \frac{1}{4} \cdot 108\sqrt{3} \text{ dm}^2 = 27\sqrt{3} \text{ dm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (6\sqrt{2}) \cdot (27\sqrt{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 54\sqrt{6} \text{ dm}^3$

**43.**

$\mathbf{A_1}$: área da face VBC

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}20 \cdot h = 0{,}10h$

$A_\ell = 0{,}28 \text{ m}^2 \Rightarrow 4 \cdot A_1 = 0{,}28 \text{ m}^2 \Rightarrow 0{,}40h = 0{,}28 \text{ m}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 0{,}7 \text{ m}$

$OM = \frac{AB}{2} = \frac{0{,}20}{2} \text{ m} \Rightarrow OM = 0{,}10 \text{ m}$

$\triangle$VOM retângulo

$VO^2 = h^2 - OM^2 \Rightarrow VO^2 = 0{,}49 \text{ m}^2 - 0{,}01 \text{ m}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow VO = 0{,}4\sqrt{3} \text{ m}$

ABCD quadrado $\Rightarrow A_b = (0{,}20 \text{ m})^2 = 0{,}04 \text{ m}^2$

$\mathbf{V_1}$: volume da pirâmide VABCD

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot VO \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot (0{,}04 \text{ m}^2) \cdot (0{,}4\sqrt{3} \text{ m}) =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{375} \text{ m}^3$

Logo, o volume do granito é: $V = 4 \cdot V_1 = \frac{8\sqrt{3}}{375} \text{ m}^3$

**44.** $H = 2 \text{ m}$; $A_\ell = 15 \text{ m}^2$

**x**: medida da aresta da base

**h**: medida da altura da face lateral

$A_\ell = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot xh\right) = 2xh \Rightarrow$

$\Rightarrow 2xh = 15 \Rightarrow h = \frac{15}{2x}$ *

$\triangle$VOM retângulo

$h^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + H^2 \Rightarrow$

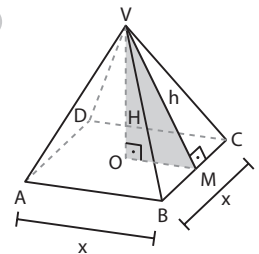
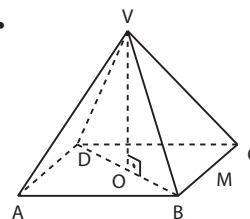
$\Rightarrow \frac{225}{4x^2} = \frac{x^2}{4} + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4 + 16x^2 - 225 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3 \text{ m}$

$A_b = x^2 \Rightarrow A_b = 9 \text{ m}^2$

Logo: $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \left(\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2\right) \text{m}^3 = 6 \text{ m}^3$

**45.**

$\begin{cases} \ell\text{: medida da aresta da pirâmide} \\ BD = \ell\sqrt{2} \Rightarrow OB = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \\ VD = VB = \ell \end{cases}$

$BD + VB + VD = 6 + 3\sqrt{2} \Rightarrow \ell\sqrt{2} + \ell + \ell = 3(2 + \sqrt{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell(2 + \sqrt{2}) = 3(2 + \sqrt{2}) \Rightarrow \ell = 3$

Assim: $OB = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ e $VB = 3$

**a)** VO: medida da altura da pirâmide; VO = h

$\triangle VOB$ retângulo $\Rightarrow VO^2 + OB^2 = VB^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 9 - \dfrac{9 \cdot 2}{4} \Rightarrow h = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

**b)** $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

$A_b = 3^2 = 9$

$\triangle VBC$ equilátero

$A_{VBC} = \dfrac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{VBC} = \dfrac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{VBC} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

$A_\ell = 4 \cdot A_{VBC} \Rightarrow A_\ell = 9\sqrt{3}$

Logo: $A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 9 + 9\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 9(1 + \sqrt{3})$

**46.** $\ell = 6$ m; $x = 3\sqrt{5}$ m

$OC = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OC = 3\sqrt{2}$ m

$\triangle VOC$ retângulo

$(3\sqrt{5})^2 = H^2 + (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H = 3\sqrt{3}$ m

**a)** $A_b = (6 \text{ m})^2 = 36 \text{ m}^2$

$\triangle VMC$ retângulo $\Rightarrow g^2 = (3\sqrt{5})^2 - 3^2 \Rightarrow g = 6$ m

$A_\ell = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\right) \text{m}^2 = 72 \text{ m}^2$

$A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 108 \text{ m}^2$

**b)** $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{3} \text{ m}^3 = 36\sqrt{3} \text{ m}^3$

**c)** $\left.\begin{array}{l}\alpha = \text{med}(V\hat{M}O)\\ \triangle VOM \text{ retângulo}\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{OM}{g} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 60°$

**47.** $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{12} = \dfrac{4}{20} \Rightarrow x = 1$ cm e $y = 2,4$ cm

**48.** Como $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{3}$, então os cilindros 1 e 2 não são semelhantes.

**49.** **x**, **y** e **z**: dimensões da nova caixa, em decímetros

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{7} = k$ (razão de semelhança linear)

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{V_1}\text{: volume da caixa original}\\ \mathbf{V_2}\text{: volume da nova caixa}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{V_2}{V_1} = k^3 \xrightarrow[V_2 = 8V_1]{}$

$\Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

Assim: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{7} = 2 \Rightarrow x = 4$ dm, $y = 10$ dm e $z = 14$ dm

Logo: $A_t = 2xy + 2xz + 2yz \Rightarrow A_t = 472 \text{ dm}^2$

**50.** $V_I = \dfrac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 20 \Rightarrow V_\ell = 960 \text{ cm}^3$

I e II: pirâmides semelhantes $\Rightarrow \dfrac{V_I}{V_{II}} = \dfrac{960}{120} = k^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 2$ (razão de semelhança linear)

$\dfrac{20}{h} = \dfrac{12}{\ell} = k = 2 \Rightarrow h = 10$ cm e $\ell = 6$ cm

**51.** $\left.\begin{array}{l}\ell_1 = 10 \text{ cm}; V_1 = 80\sqrt{3} \text{ cm}^3\\ \ell_2 = 5 \text{ cm}; V_2 = ?\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\ell_1}{\ell_2} = k = 2$

$\dfrac{V_1}{V_2} = k^3 = 8 \Rightarrow V_1 = 8 \cdot V_2 \Rightarrow 80\sqrt{3} = 8 \cdot V_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2 = 10\sqrt{3} \text{ cm}^3$

**52.** $\begin{cases}\ell = 6 \text{ dm (medida da aresta da base de } \mathbf{P_1})\\ h_1 = 12 \text{ dm (medida da altura de } \mathbf{P_1})\\ h_2 = 4 \text{ dm (medida da altura de } \mathbf{P_2})\end{cases}$

Temos: $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{1}{9}$ e $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{1}{27}$

**a)** Cálculo de $\mathbf{A_1}$, ou seja, da área da base de $\mathbf{P_1}$.

$A_1 = 6 \cdot \left(\dfrac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_1 = \dfrac{6 \cdot 36 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ dm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 = 54\sqrt{3} \text{ dm}^2$

Assim: $\dfrac{A_2}{54\sqrt{3}} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow A_2 = 6\sqrt{3} \text{ dm}^2$

**b)** Cálculo de $\mathbf{V_1}$, ou seja, do volume de $\mathbf{P_1}$.

$V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h_1 \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \cdot 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 = 216\sqrt{3} \text{ dm}^3$

Logo: $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{1}{27} \Rightarrow V_2 = \dfrac{216\sqrt{3}}{27} \Rightarrow V_2 = 8\sqrt{3} \text{ dm}^3$

**53.** $\left.\begin{array}{l}h_2 = 45 \text{ cm}\\ h_1 = 15 \text{ cm}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{h_2}{h_1} = k \Rightarrow \dfrac{45}{15} = k \Rightarrow k = 3$

**a)** $\left.\begin{array}{l}\ell_2 = 60 \text{ cm}\\ \ell_1 = ?\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\ell_2}{\ell_1} = k \Rightarrow \dfrac{60}{\ell_1} = 3 \Rightarrow \ell_1 = 20$ cm

**b)** $\dfrac{A_2}{A_1} = k^2 \Rightarrow \dfrac{A_2}{A_1} = 9$

**54.** **a)** Tronco quadrangular regular

$A_B = (2 \text{ cm})^2 = 4 \text{ cm}^2$

$A_b = (1 \text{ cm})^2 = 1 \text{ cm}^2$

$A_\ell = 4 \cdot A_{MNPQ} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 4 \cdot \left[\dfrac{1}{2} \cdot (2 + 1) \cdot 1,5\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 9 \text{ cm}^2$

Logo: $A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 14 \text{ cm}^2$

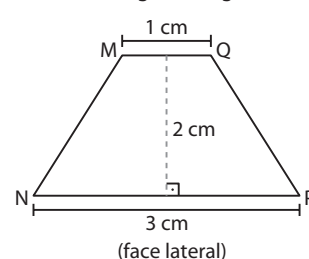
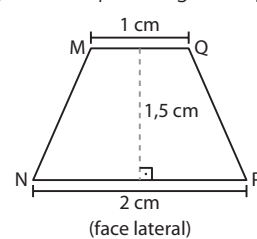
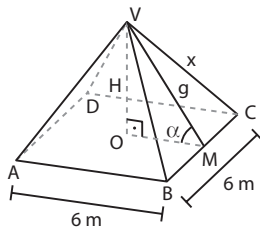
**b)** Tronco hexagonal regular

$\ell_B = 3$ cm (medida da aresta da base **B**)

$A_B = 6 \cdot \left(\dfrac{\ell_B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_B = \dfrac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

$\ell_b = 1$ cm (medida da aresta da base **b**)

$A_b = 6 \cdot \left(\dfrac{\ell_b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_b = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

$A_\ell = 6 \cdot A_{MNPQ} \Rightarrow A_\ell = 6 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (3 + 1) \cdot 2\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 24\ cm^2$

Logo: $A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = \left(15\sqrt{3} + 24\right)\ cm^2 =$
$= 3\left(5\sqrt{3} + 8\right)\ cm^2$

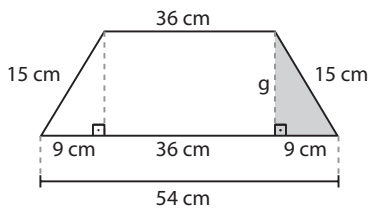
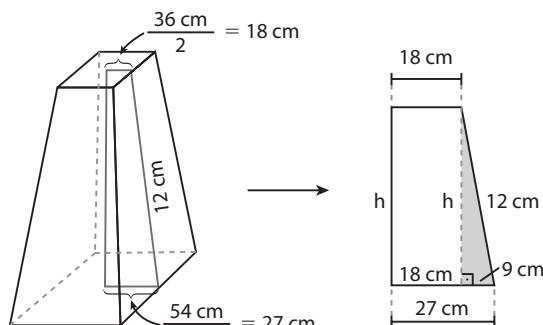
**55.** **V**: vértice da pirâmide que originou o tronco
**x**: distância entre **V** e a base menor do tronco, em centímetros
Comparando as duas pirâmides semelhantes, temos:
$\frac{12}{24} = \frac{x}{x + 27} \Rightarrow x + 27 = 2x \Rightarrow x = 27\ cm$
$\mathbf{V_1}$: volume da pirâmide maior
$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot (27 + x) \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot 576 \cdot 54 \Rightarrow$
$\Rightarrow V_1 = 10\,368\ cm^3$
$\mathbf{V_2}$: volume da pirâmide menor
$V_2 = \frac{1}{3}\,12^2 x \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 27 \Rightarrow V_2 = 1\,296\ cm^3$
Logo: $V_{tronco} = V_1 - V_2 \Rightarrow V_{tronco} = (10\,368 - 1\,296)\ cm^3 =$
$= 9\,072\ cm^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow V_{tronco} = 9{,}072\ L$

**56.** **a)** **B** e **b**: triângulos equiláteros

$$\begin{cases} A_B = \frac{12^2\sqrt{3}}{4}\ cm^2 = 36\sqrt{3}\ cm^2 \\ A_b = \frac{8^2\sqrt{3}}{4}\ cm^2 = 16\sqrt{3}\ cm^2 \end{cases}$$

$A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = \left(36\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + 180\right)\ cm^2 =$
$= \left(52\sqrt{3} + 180\right)\ cm^2$

**b)** **a**: medida do apótema do tronco
$A_\ell = 180\ cm^2 \Rightarrow 3\left[\frac{1}{2} \cdot (8 + 12) \cdot a\right] = 180 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 6\ cm$

**57.** **a)** Inicialmente, devemos encontrar a altura do trapézio (apótema do tronco) de uma face lateral:

$15^2 = 9^2 + g^2 \Rightarrow g = 12\ cm$
Vamos determinar agora a altura do tronco do cone:

$h^2 + 9^2 = 12^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{7}\ cm$

Seja **V** o vértice da pirâmide que originou o tronco; a distância de **V** à base menor do tronco é **x**. Comparando as duas pirâmides semelhantes temos:

$\frac{54}{36} = \frac{3\sqrt{7} + x}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{7} + x}{x} \Rightarrow 3x = 6\sqrt{7} + 2x \Rightarrow x = 6\sqrt{7}\ cm$

$V_1 = V_{pirâmide\ maior} = \frac{1}{3} \cdot 54^2 \cdot (h + x) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot 54^2 \cdot 9\sqrt{7} \Rightarrow V_1 = 8\,748\sqrt{7}\ cm^3$

$V_2 = V_{pirâmide\ menor} = \frac{1}{3} \cdot 36^2 \cdot x \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \cdot 36^2 \cdot 6\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2 = 2\,592\sqrt{7}\ cm^3$

$V_{tronco} = V_1 - V_2 \Rightarrow V_{tronco} = 8\,748\sqrt{7} - 2\,592\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} \Rightarrow 6\,156\sqrt{7}\ cm^3 \simeq 6\,156 \cdot 2{,}65\ cm^3 \simeq$

$\simeq 16\,313{,}4\ cm^3$; como $1\ m^3 = 10^6\ cm^3$, temos:

$V_{tronco} \simeq 0{,}016\ m^3$;

$V_{prisma} = 1\,296 \cdot 20\ cm^3 \simeq 0{,}026\ m^3$

$V_{suporte} = (0{,}026 + 0{,}016)\ m^3 = 0{,}042\ m^3$

**b)** $\mathbf{A_1}$: área do prisma a ser impermeabilizada
$A_1 = 36^2 + 4 \cdot 36 \cdot 20 \Rightarrow A_1 = 4\,176\ cm^2$
$\mathbf{A_2}$: área do tronco a ser impermeabilizada

$A_2 = 54^2 + 4 \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot (36 + 54) \cdot 12\right]}_{\text{área do trapézio}} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2 = 5\,076\ cm^2$
**A**: área total a ser impermeabilizada:
$A = A_1 + A_2 = 9\,252\ cm^2$

| área | quantidade de impermeabilizante |
|---|---|
| 1000 cm² | 400 mL |
| 9 252 cm² | x |

$\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{9\,252 \cdot 400}{1000}\ mL = 3\,700{,}8\ mL \simeq 3{,}70\ L$
**C**: custo aproximado da pintura
C = 3,70 · R\$ 28,00 = R\$ 103,60

**58.** $\ell_B = 5\ dm$; $\ell_b = 3\ dm$; $a = 10\ dm$
$A_\ell = 5 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (5 + 3) \cdot 10\right] \Rightarrow A_\ell = 200\ dm^2$

**59.** Seja **V** o vértice da pirâmide que originou o tronco; consideremos que a distância de **V** à base menor do tronco seja **x**. Usando a semelhança entre as duas pirâmides, temos:
$\frac{12}{6} = \frac{4 + x}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 4 + x \Rightarrow$
$x = 4\ dm$
$V_{pirâmide\ maior} = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 \Rightarrow V_{pirâmide\ maior} = 384\ dm^3$
$V_{pirâmide\ menor} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 \Rightarrow V_{pirâmide\ menor} = 48\ dm^3$
$V_{tronco} = 384\ dm^3 - 48\ dm^3 = 336\ dm^3$

**60. a)** São poliedros convexos: I, II, IV, VI.
São poliedros não convexos: III e V.

**b)**

| Poliedro | V | A | F |
|---|---|---|---|
| I | 8 | 12 | 6 |
| II | 10 | 15 | 7 |
| III | 16 | 24 | 10 |
| IV | 7 | 15 | 10 |
| V | 16 | 24 | 10 |
| VI | 12 | 30 | 20 |

**c)** Todos satisfazem a relação de Euler, isto é, são eulerianos.

**61.** $A = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30$

$V - 30 + 12 = 2 \Rightarrow V = 20$

**62.** $A = \dfrac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = 90$

$V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 60$

**63.** $A = \dfrac{6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 6}{2} = 24$

$V - 24 + 13 = 2 \Rightarrow V = 13$

**64.** $V - A + F = 2 \Rightarrow 10 - 20 + F = 2 \Rightarrow F = 12$

12 faces $\begin{cases} \textbf{x} \text{ triângulos} \\ \textbf{y} \text{ quadrangulares} \end{cases}$

Sabemos que $A = \dfrac{x \cdot 3 + y \cdot 4}{2} \Rightarrow 20 = \dfrac{3x + 4y}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 4y = 40$; como $x + y = 12$, segue que

$\begin{cases} 3x + 4y = 40 \\ x + \ \ y = 12 \end{cases}$, resolvido fornece $x = 8$ e $y = 4$.

São 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.

**65. a)** Sim, pois é convexo. Observe que $V = 4$, $F = 4$ e $A = 6$.

**b)** Sim. Todas as faces são triangulares; em cada vértice concorrem 3 arestas e é euleriano.

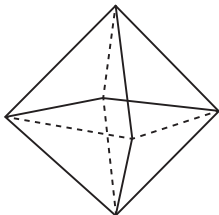
**c)** Não; a base é um triângulo retângulo, que não é um polígono regular.

**66. a)** Sim; $V = 7$, $F = 7$ e $A = 12$.

**b)** Não; uma face é hexagonal e as demais triangulares. Além disso, no vértice da pirâmide concorrem 6 arestas e em cada vértice da base concorrem 3 arestas.

**c)** Não; não é poliedro de Platão.

**67. a)** Octaedro regular; ele possui 8 faces triangulares (cada face é um triângulo equilátero).

Como $A = \dfrac{3 \cdot 8}{2} = 12$, temos $V - 12 + 8 = 2 \Rightarrow V = 6$

**b)** Sim; é poliedro de Platão e todas as faces são triângulos equiláteros congruentes.

## Desafio

**a)** O poliedro obtido possui:

- 8 faces triangulares "geradas" nos vértices do cubo original;
- 6 faces octogonais (contidas nas faces do cubo original). Assim, ao todo são 14 faces.

**b)** Sejam:

$\mathbf{V_p}$: volume do poliedro

$\mathbf{V_c}$: volume do cubo original

$\mathbf{V_{pir}}$: volume de cada pirâmide retirada

$V_p = \dfrac{5}{6} \cdot V_c \Rightarrow \underbrace{8 \cdot V_{pir}}_{\text{Soma dos volumes das 8 pirâmides retiradas}} = \dfrac{1}{6} \cdot V_c$ (*)

O volume de cada pirâmide pode ser obtido por:

1º modo: A aresta (**a**) da base da pirâmide regular triangular pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras:

$a^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow a^2 = 2x^2 \Rightarrow a = x\sqrt{2}$

A área da base é: $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{(x\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{2x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$

$= \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

A altura da pirâmide é: $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ (dado)

$V_{pir} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{x^3}{6}$

2º modo: Considerando a base um triângulo retângulo isósceles, temos:

$A_b = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot x = \dfrac{x^2}{2}$

$H = x$ (distância do vértice ao plano de base)

$V_{pir} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2}{2} \cdot x = \dfrac{x^3}{6}$

Daí: em (*):

$8 \cdot \dfrac{x^3}{6} = \dfrac{1}{6} \cdot a^3 \Rightarrow 8x^3 = a^3 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$

# CAPÍTULO 9 Corpos redondos

**1. a)** $A_\ell = 2\pi \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow A_\ell = 4\pi\ cm^2$

$A_t = A_\ell + 2\pi \cdot 1^2 \Rightarrow A_t = 6\pi\ cm^2$

$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 \Rightarrow V = 2\pi\ cm^3$

**b)** $A_\ell = 2\pi \cdot 1 \cdot 2{,}5 \Rightarrow A_\ell = 5\pi\ cm^2$

$A_t = A_\ell + 2\pi \cdot 1^2 \Rightarrow A_t = 7\pi\ cm^2$

$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2{,}5 \Rightarrow V = 2{,}5\pi\ cm^3$

**c)** $A_\ell = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 8 \cdot 15 + \underbrace{15 \cdot 16}_{\text{A seção meridiana}} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 120 \cdot (\pi + 2)\ mm^2$

$A_t = A_\ell + \pi \cdot 8^2 \Rightarrow A_t = 8 \cdot (23\pi + 30)\ mm^2$

$V = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 15 \Rightarrow V = 480\pi\ mm^3$

**2.** $r = 4$ cm

$h = 22$ cm

$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 22 \Rightarrow V = 352 \cdot \pi\ cm^3$

Como $352 \cdot \pi > 1\,000$ (considerando $\pi \simeq 3{,}1$ obtemos $1091{,}2\ cm^3$ e considerando $\pi \simeq 3{,}14$ obtemos $1105{,}28\ cm^3$), é possível armazenar mais que um litro (ou $1\,000\ cm^3$) de óleo.

**3.** $A_\ell = 250\pi\ cm^2 \Rightarrow 2\pi \cdot 10 \cdot h = 250\pi \Rightarrow h = \frac{25}{2}$ cm

$V = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{25}{2} \Rightarrow V = 1\,250\pi\ cm^3$

**4.** $d = 8\ m \Rightarrow r = 4\ m$

$h = 14\ m$

$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{22}{7} \cdot 4^2 \cdot 14 \Rightarrow V = 704\ m^3 = 704\,000\ L$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ minuto} \ — \ 160\ L \\ x \ — \ 704\,000\ L \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4\,400 \text{ minutos} =$$

$$= 73\frac{1}{3}\ h = \underbrace{3 \text{ dias}}_{72\ h} + 1 \text{ hora} + \underbrace{20 \text{ minutos}}_{\frac{1}{3}\ h}$$

Assim, o número inteiro mínimo de dias é 4.

**5.** Do sistema: $\begin{cases} 4r + 2h = 28 \\ 2\pi rh = 48\pi \end{cases}$ tem-se $\begin{cases} h = 14 - 2r & (1) \\ r = \frac{24}{h} & (2) \end{cases}$

Substituindo-se (2) em (1), tem-se: $h^2 - 14h + 48 = 0$, de soluções $h = 6$ cm ou $h = 8$ cm.

Se $h = 6$ cm, então $r = 4$ cm e $V = \pi\,(4\ cm)^2 \cdot (6\ cm) = 96\pi\ cm^3$.

Se $h = 8$ cm, então $r = 3$ cm e $V = \pi\,(3\ cm)^2 \cdot (8\ cm) = 72\pi\ cm^3$.

**6.** $A_\ell = \frac{6\pi}{5}\ m^2$; $r = 80\ cm = 0{,}8\ m$

**a)** $A_\ell = 2\pi \cdot r \cdot h = \frac{6\pi}{5} \Rightarrow r \cdot h = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}8 \cdot h = \frac{3}{5} \Rightarrow h = 0{,}75\ m = 75\ cm$

**b)** $V = \pi \cdot (0{,}8\ m)^2 \cdot (0{,}75\ m) = (3{,}14 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}75)\ m^3 = 1{,}5072\ m^3 = 1\,507{,}2\ L$

**7.** $V = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 20 \Rightarrow V = 1\,570\ cm^3$

Como a massa de $1\ cm^3$ de mercúrio é 13,6 g, então $1\,570\ cm^3$ têm massa $1\,570 \cdot 13{,}6\ g = 21\,352\ g$ de mercúrio, ou 21,352 kg.

**8.** **a)** $A_\ell = 30\pi \Rightarrow 2\pi r \cdot h = 30\pi \Rightarrow r \cdot h = 15$ (1)

$V = 45\pi \Rightarrow \pi r^2 \cdot h = 45\pi \Rightarrow r^2 \cdot h = 45$ (2)

(1) em (2) $\Rightarrow r \cdot r \cdot h = 45 \Rightarrow 15 \cdot r = 45 \Rightarrow r = 3$

Substituindo o valor de **r** em (1), temos $h = 5$ m

**b)** $A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$

$A_t = 30\pi + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_t = 48\pi\ m^2$

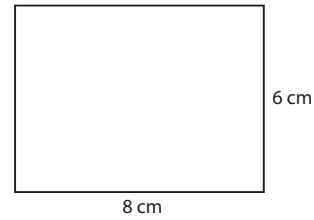
**9.** $A_t = ?$ e $V = 250\pi\ cm^3$

$V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2r \Rightarrow 250\pi = \pi \cdot 2r^3 \Rightarrow r^3 = 125 \Rightarrow r = 5\ cm$

$A_\ell = 2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 \Rightarrow A_\ell = 4\pi \cdot 5^2 \Rightarrow A_\ell = 100\pi\ cm^2$

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = 25\pi\ cm^2$

$A_t = A_\ell + 2A_b \Rightarrow A_t = 100\pi + 2 \cdot 25\pi \Rightarrow A_t = 150\pi\ cm^2$

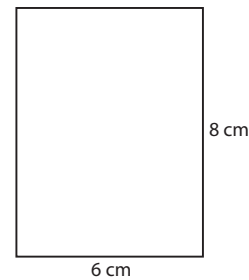
**10.** 1º caso

$8 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{4}{\pi}$ cm

$A_\ell = (8\ cm) \cdot (6\ cm) = 48\ cm^2$

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{16}{\pi} \Rightarrow A_b \simeq 5{,}16\ cm^2$

$A_t = A_\ell + 2A_b \Rightarrow A_t = 48 + 2 \cdot 5{,}16 \Rightarrow A_t = 58{,}32\ cm^2$

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = 5{,}16 \cdot 6 \Rightarrow V = 30{,}96\ cm^3$

2º caso

$6 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{3}{\pi}$ cm

$A_\ell = (6\ cm) \cdot (8\ cm) = 48\ cm^2$

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 = \frac{9}{\pi} \Rightarrow A_b \simeq 2{,}90\ cm^2$

$A_t = A_\ell + 2A_b \Rightarrow A_t = 48 + 2 \cdot 2{,}90 \Rightarrow A_t = 53{,}80\ cm^2$

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = 2{,}90 \cdot 8 \Rightarrow V = 23{,}20\ cm^3$

**11.** $d = 24\ dm = 2{,}4\ m \Rightarrow r = 1{,}2\ m$

$h = 140\ dm = 14\ m$

$V = \pi \cdot (1{,}2\ m)^2 \cdot (14\ m) = \left(\frac{22}{7} \cdot 1{,}44 \cdot 14\right) m^3 \Rightarrow V = 63{,}36\ m^3$

**12.** **a)** $\mathbf{A_1}$: área total do cubo

$A_1 = 6 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow A_t = 600\ cm^2$

Note que $h = 2r = 10$

$\mathbf{A_2}$: área total do cilindro (cilindro equilátero: $h = 2r$)

$A_\ell = 2\pi r \cdot h = \pi h^2 \Rightarrow A_\ell = \pi(10)^2 \Rightarrow A_\ell = 100\pi\ cm^2$

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi\left(\frac{10}{2}\right)^2 \Rightarrow A_b = 25\pi\ cm^2$

Portanto, a área total do cilindro é:

$A_2 = A_\ell + 2A_b \Rightarrow A_2 = 100\pi + 2 \cdot 25\pi \Rightarrow A_2 = 150\pi\ cm^2$

Logo, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{600}{150\pi} = \frac{4}{\pi}$

**b)** $\mathbf{V_1}$: volume do cubo

$V_1 = (10\ cm)^3 = 1\,000\ cm^3$

$\mathbf{V_2}$: volume do cilindro

$V_2 = A_b \cdot h \Rightarrow V_2 = 25\pi \cdot 10 \Rightarrow V_2 = 250\pi\ cm^3$

**13.** O volume, em $cm^3$, de café que pode ser servido na garrafa térmica é $\pi \cdot 5^2 \cdot 18 = \pi \cdot 25 \cdot 18 = 450\pi$.
O volume, em $cm^3$, de café que pode ser servido em um copinho plástico é, no máximo, $\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$.

**a)** Como $30 \cdot (16\pi\ cm^3) = 480\pi\ cm^3 > 450\pi\ cm^3$, não haverá café suficiente para todos.

**b)** A área total da superfície de um copinho plástico é:

$$\underbrace{(\pi \cdot 2^2)}_{\text{área de uma base}}\ cm^2 + \underbrace{(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4)}_{\text{área da superfície lateral}}\ cm^2 = 20\pi\ cm^2$$

Com o acréscimo de 25% de plástico, a quantidade de material plástico usado na confecção de um copinho é $(1{,}25 \cdot 20\pi)\ cm^2 = 25\pi\ cm^2 \simeq (25 \cdot 3{,}1)\ cm^2 = 77{,}5\ cm^2$
Para fabricar 1500 desses copinhos, são gastos $1500 \cdot (77{,}5\ cm^2) = 116\,250\ cm^2$. Como $1\ m^2 = 10\,000\ cm^2$, temos um gasto de $11{,}625\ m^2$. O custo desse material é $11{,}625 \cdot 8{,}50$ reais $\simeq 98{,}81$ reais; com o acréscimo de 30%, o valor a ser pago nessa encomenda é de $1{,}3 \cdot 98{,}81$ reais $= 128{,}45$ reais.

**14. a)** Prisma: $\begin{cases} h = 10\ cm \\ A_b = (18\ cm)^2 = 324\ cm^2 \\ V_1 = A_b \cdot h \end{cases}$

$V_1 = (324\ cm^2) \cdot (10\ cm) = 3\,240\ cm^3$

Cilindro: $\begin{cases} h = 10\ cm;\ r = 2{,}8\ cm \\ A_b = \pi r^2 = \dfrac{22}{7} \cdot (2{,}8\ cm)^2 = 24{,}640\ cm^2 \\ V_2 = A_b \cdot h \end{cases}$

$V_2 = (24{,}640\ cm^2) \cdot (10\ cm) = 246{,}40\ cm^3$
O volume da peça é: $V_1 - V_2 = 2\,993{,}60\ cm^3$

**b)** **m**: massa da madeira

$$\left.\begin{array}{lcl} 1\ cm^3 & \text{———} & 0{,}93\ g \\ 2\,993{,}60\ cm^3 & \text{———} & m \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m = 0{,}93 \cdot 2\,993{,}60\ g = 2\,784{,}048\ g \simeq 2{,}784\ kg$

**15.** $V = 3{,}14 \cdot (0{,}5)^2 \cdot 2 \Rightarrow V = 1{,}57\ m^3$
Se o volume do tambor é $1{,}57\ m^3$, sua capacidade é de 1 570 litros e o volume de álcool será 157 litros.

**16. a)** Em $\mathbf{C_1}$, temos $2\pi r = 8$ cm e $h = 12$ cm. Assim:

$$r = \frac{4}{\pi}\ cm \text{ e } V_{C_1} = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot 12 \Rightarrow V_{C_1} = \frac{192}{\pi}\ cm^3$$

Em $\mathbf{C_2}$, temos $2\pi r = 12$ e $h = 8$ cm. Daí:

$$r = \frac{6}{\pi}\ cm \text{ e } V_{C_2} = \pi \cdot \left(\frac{6}{\pi}\right)^2 \cdot 8 \Rightarrow V_{C_2} = \frac{288}{\pi}\ cm^3$$

O maior volume é o de $\mathbf{C_2}$.

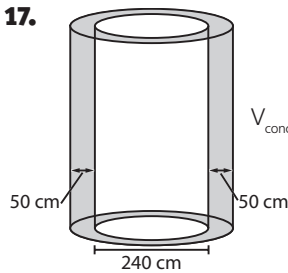
**b)** Na construção de $\mathbf{C_1}$ são gastos:

$$\left[\underbrace{2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2}_{2 \cdot A_b} + \underbrace{8 \cdot 12}_{A_\ell}\right] cm^2 = \left(\frac{32}{\pi} + 96\right) cm^2$$

Na construção de $\mathbf{C_2}$ são gastos:

$$\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{6}{\pi}\right)^2 + 8 \cdot 12\right] cm^2 = \left(\frac{72}{\pi} + 96\right) cm^2$$

Assim, na construção de $\mathbf{C_1}$ gasta-se menos material.

**17.**

$V_{concreto} = 449{,}5\ m^3 = 449{,}5 \cdot 10^6\ cm^3$

O volume de concreto usado na construção da torre é igual à diferença entre os volumes de dois cilindros:
$\pi \cdot (120 + 50)^2 \cdot h - \pi \cdot 120^2 \cdot h =$
$= \pi \cdot 170^2 \cdot h - \pi \cdot 120^2 \cdot h = \pi \cdot h \cdot (170^2 - 120^2) =$
$= \pi \cdot h \cdot (170 + 120) \cdot (170 - 120) = \pi \cdot h \cdot 290 \cdot 50 =$
$= 14\,500\pi \cdot h = 44\,950 \cdot h$

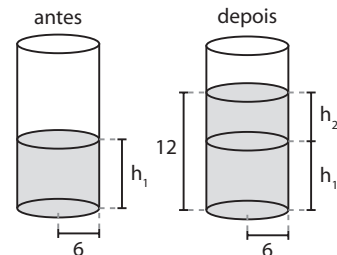
Daí: $44\,950 \cdot h = 449{,}5 \cdot 10^6 \Rightarrow h = \dfrac{449{,}5 \cdot 10^6}{449{,}5 \cdot 10^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 10^4\ cm = 10^2\ m = 100\ m$

**18.** $V_{grande} = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 \Rightarrow V_{grande} = 300\pi\ cm^3$
$V_{médio} = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 \Rightarrow V_{médio} = 90\pi\ cm^3$
Se o copo médio custar x reais, o preço de 1 $cm^3$ de caldo será $\dfrac{x}{90\pi}$ reais; o copo grande custará 3x reais e o preço de 1 $cm^3$ de caldo será $\dfrac{3x}{300\pi}$ reais. Como $\dfrac{x}{90\pi} > \dfrac{x}{100\pi}$, o copo grande é mais vantajoso.
Outro modo: Comprando-se o copo grande, paga-se o triplo do que se pagaria pelo copo médio mas consome-se mais que o triplo de caldo de cana ($300 > 3 \cdot 90$) do que seria consumido no médio.

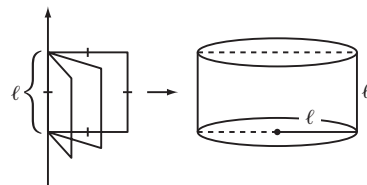
**19.**

antes | depois

12; $h_1$; $h_2$; 6; 6

O volume das pedras é $16 \cdot (3\ cm)^3 = 432\ cm^3$, que é o volume do cilindro de altura $\mathbf{h_2}$ e raio 6 cm.
$\pi \cdot r^2 \cdot h_2 = 432\ cm^3$

$$h_2 = \frac{12}{\pi} \xrightarrow[\pi = 3]{} h_2 = 4\ cm$$

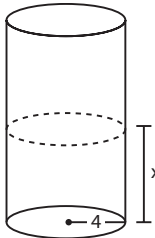
Como $h_1 + h_2 = 12$ cm, então $h_1 = 8$ cm.

**20.**

Se o lado do quadrado mede $\ell$ cm, a seção meridiana é um retângulo de base de medida $2\ell$ cm e altura de medida $\ell$ cm.
$2\ell \cdot \ell = 50 \Rightarrow \ell = 5$ cm

**21.** O volume do sólido obtido é igual à diferença entre os volumes de dois cilindros: um com raio igual a 7 e altura igual a 2 e o outro com raio igual a 3 e altura igual a 2.

$V = \pi \cdot 7^2 \cdot 2 - \pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 98\pi - 18\pi \Rightarrow$

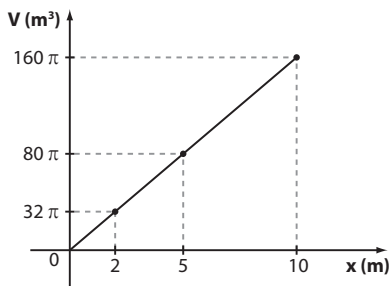
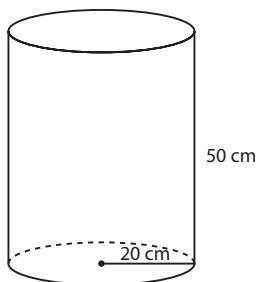
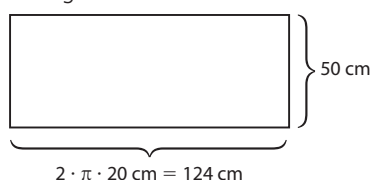
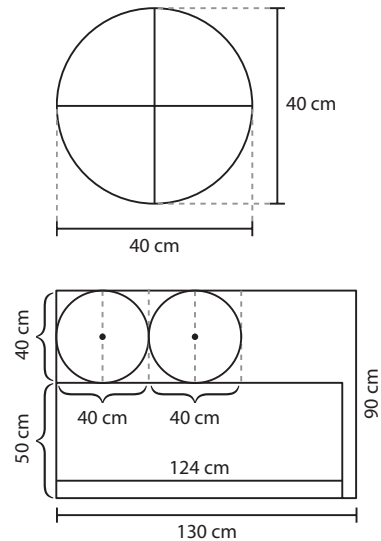
$\Rightarrow V = 80\pi$ u.v.

**22. a)** Quando o nível da água no tanque atinge a altura **x**, o volume de água no tanque (em $m^3$) é:

$V = \pi \cdot 4^2 \cdot x$ (volume de um cilindro com $r = 4$ e $h = x$), isto é, $V(x) = 16\pi \cdot x$

Como $A_b = 16\pi$ $m^2$ é constante, temos:

$$\frac{V(x)}{x} = 16\pi = k$$

e desse modo V(x) e **x** são grandezas diretamente proporcionais. Observe que, para uma altura 2x, o volume de água no tanque é $16\pi \cdot 2x$, que é o dobro do volume de água quando a altura é **x**.

**b)** Temos a função linear $y = 16\pi \cdot x$, sendo **y** o volume de água, em $m^3$, e **x** a altura da água em metros, no reservatório.

**23. a)**

Ao planificarmos a superfície lateral do cilindro obtemos o retângulo abaixo:

Cada círculo das bases tem diâmetro medindo 40 cm.

O esquema acima mostra uma possível maneira de se fazer cortes no tecido a fim de revestir as bases circulares e a superfície lateral do cilindro.

**b)** A área do retalho de tecido é $(130 \text{ cm}) \cdot (90 \text{ cm}) =$ $= 11\,700 \text{ cm}^2$

A área do retângulo cortado para revestir a superfície lateral do cilindro é $(124 \text{ cm}) \cdot (50 \text{ cm}) = 6\,200 \text{ cm}^2$

A área de cada círculo cortado para revestir uma base do cilindro é $\pi \cdot (20 \text{ cm})^2 = 1240 \text{ cm}^2$

A área do retalho que vai sobrar é:

$(11\,700 - 6\,200 - 2 \cdot 1\,240) \text{ cm}^2 = 3\,020 \text{ cm}^2$

**24. a)** Como $V = A_b \cdot h$ e $\mathbf{A_b}$ é fixo, **V** e **h** são diretamente proporcionais. Assim, a altura do combustível é $\frac{5}{8} \cdot 9$ m $= 5{,}625$ m.

**b)** $2\,400$ L $= 2{,}4$ $m^3$

Como $V = A_b \cdot h$, temos: $2{,}4 = \pi \cdot 4^2 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{2{,}4}{3 \cdot 16} \Rightarrow h = 0{,}05$ m $= 5$ cm

O nível se elevará em 5 cm.

**c)** Devemos calcular $\frac{3}{8} \cdot V = \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 9 = 162$

Ou seja, 162 $m^3$ = 162 000 L

**25.** $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 5 \Rightarrow V = \frac{80\pi}{3}$ $cm^3$

**26.** $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 6 = 128\pi \Rightarrow r^2 = 64$ $cm^2$

A área da base é $\pi r^2 = 64\pi$ $cm^2$.

**27.** $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 - 20^2 = 225 \Rightarrow r = 15$ dm

$A_t = \pi \cdot 15 \cdot (25 + 15) \Rightarrow A_t = 600\pi$ $dm^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 225 \cdot 20 \Rightarrow V = 1\,500\pi$ $dm^3$

**28.** r = 2 cm

h = 6 cm

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}1 \cdot 2^2 \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 24{,}8$ $cm^3$ (por cone)

Para fabricar 2 500 cones, são necessários
$2\,500 \cdot (24{,}8 \text{ cm}^3) = 62\,000 \text{ cm}^3$ de cacau. Assim:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cm}^3 \text{ ——— } 1{,}05 \text{ g} \\ 62\,000 \text{ cm}^3 \text{ ——— } x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 65\,100 \text{ g} = 65{,}1 \text{ kg}$$

**29.** **a)** $g = 2r = 22$ cm

$22^2 = h^2 + 11^2 \Rightarrow h = 11\sqrt{3}$ cm

$A_\ell = \pi \cdot 11 \cdot 22 \Rightarrow A_\ell = 242\pi \text{ cm}^2$

$A_t = \pi \cdot 11 \cdot (22 + 11) \Rightarrow A_t = 363\pi \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 11^2 \cdot 11\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{1\,331\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

**b)** $g^2 = 35^2 + 10^2 \Rightarrow g = 5\sqrt{53}$ cm

$A_\ell = \pi \cdot 10 \cdot 5\sqrt{53} \Rightarrow A_\ell = 50\pi\sqrt{53} \text{ cm}^2$

$A_t = \pi \cdot 10 \cdot \left(5\sqrt{53} + 10\right) \Rightarrow A_t = 50\pi \cdot \left(\sqrt{53} + 2\right) \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 35 \Rightarrow V = \frac{3\,500\pi}{3} \text{ cm}^3$

**c)** $g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g = 5$ cm

$A_\ell = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4}_{\text{área da seção meridiana}} + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = \left(\frac{24 + 15\pi}{2}\right) \text{cm}^2$

$A_t = A_\ell + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_t = 12(\pi + 1) \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 \Rightarrow V = 6\pi \text{ cm}^3$

**30.** Recipiente:

$r = 0{,}20 \text{ m} = 20$ cm

$h = 0{,}80 \text{ m} = 80$ cm

$V = \pi \cdot 20^2 \cdot 80 \Rightarrow V = 32\,000\pi \text{ cm}^3$

Copo:

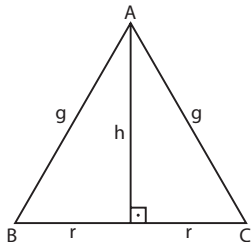
$r = 4$ cm

$h = 18$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 18 \Rightarrow V = 96\pi \text{ cm}^3$

Número de copos: $\frac{32\,000\pi \text{ cm}^3}{96\pi \text{ cm}^3} = 333{,}33...$

Assim, o número mínimo pedido é 334.

**31.**

No $\triangle ABC$, $A = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow rh = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{12}{5}$ cm

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 28{,}8\pi \text{ cm}^3$

**32.** $V_{ci} = \pi \cdot 4^2 \cdot 12 \Rightarrow V_{ci} = 192\pi \text{ cm}^3$

$V_{co} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 32\pi \text{ cm}^3$

Como são 2 cones idênticos, o volume é $64\pi \text{ cm}^3$.

A diferença é de $128\pi \text{ cm}^3$.

**33.** $\left.\begin{array}{l} 360° \text{ — } 2\pi \cdot 18 \text{ cm} \\ \alpha \text{ — } 2\pi \cdot 3 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 60°$

**34.** **a)** $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 9 \Rightarrow V = 432\pi \text{ dm}^3$

**b)** $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 \Rightarrow V = 324\pi \text{ dm}^3$

**35.** O comprimento da circunferência que contém o arco $\widehat{AB}$ é:

$3 \cdot \left(\frac{10\pi}{3} \text{ cm}\right) = 10\pi$ cm

Daí $10\pi = 2\pi \cdot g \Rightarrow g = 5$ cm

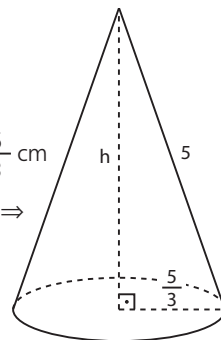
Como $2\pi r = \frac{10\pi}{3}$, obtemos $r = \frac{5}{3}$ cm

$5^2 = h^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow 25 - \frac{25}{9} = h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = \frac{200}{9} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{10\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{250\pi\sqrt{2}}{81} \text{ cm}^3$

**36.** De $100\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 12$, tem-se $r = 5$ cm.

De $g^2 = r^2 + h^2$, temos: $g^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow g = 13$ cm

$A_\ell = \pi rg \Rightarrow A_\ell = 65\pi \text{ cm}^2$

**37.** O semicírculo tem raio 28 cm e comprimento $28\pi$ cm. O cone tem geratriz de 28 cm e raio da base 14 cm, pois $2\pi r = 28\pi$.

**a)** De $g^2 = h^2 + r^2$, tem-se $h = 14\sqrt{3}$ cm.

**b)** Cada folha permite recortar 2 semicírculos, portanto serão usadas 60 folhas, no mínimo.

A área da folha é $56^2 \text{ cm}^2 = 3\,136 \text{ cm}^2$.

A área do círculo é $\pi \cdot (28 \text{ cm})^2 = 784\pi \text{ cm}^2 =$
$= 2\,352 \text{ cm}^2$.

A diferença, por folha, é de $784 \text{ cm}^2$ e no total de 60 folhas serão $47\,040 \text{ cm}^2$, ou $4{,}704 \text{ m}^2$.

**38.** De $g^2 = h^2 + r^2$, temos: $\left(\sqrt{53}\right)^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow h = 7$ cm.

O volume de cada taça, em $\text{cm}^3$, é $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 7$.

O volume das 600 taças será $17\,600 \text{ cm}^3$, que correspondem a 17,6 litros.

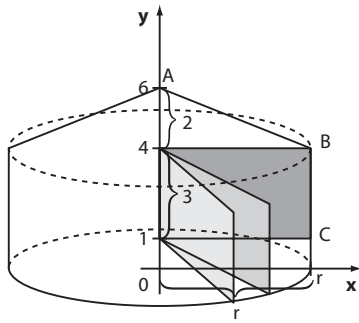
**39.** De $g^2 = r^2 + (1{,}5)^2$ e $g + r = 4{,}5$

$$\begin{cases} g^2 - r^2 = 1{,}5^2 \Leftrightarrow (g + r) \cdot (g - r) = 2{,}25 \quad (1) \\ g + r = 4{,}5 \quad (2) \end{cases}$$

(2) em (1) $\Rightarrow 4{,}5 \cdot (g - r) = 2{,}25 \Rightarrow g - r = \frac{1}{2}$ (3)

(2) e (3) $\Rightarrow r = 2$ m e $g = 2{,}5$ m

A área lateral é $\pi \cdot (2 \text{ m}) \cdot (2{,}5 \text{ m}) = 5\pi \text{ m}^2$.

**40.**

O sólido obtido é um cilindro encimado por um cone cuja base é congruente à base do cilindro.

Seja **r** a abscissa de **C**:

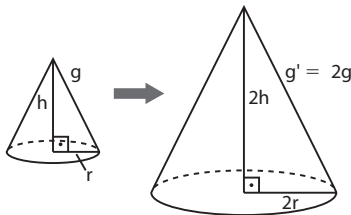
$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot 3$

$V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 2$

Daí $3\pi r^2 + \dfrac{2\pi r^2}{3} = \dfrac{275\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 11\pi r^2 = 275\pi \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$

A abscissa de **C** é 5.

**41.**

Como $(g')^2 = (2h)^2 + (2r)^2 = 4 \cdot \underbrace{(h^2 + r^2)}_{g^2}$, temos que $g' = 2 \cdot g$

**a)** $A_b = \pi r^2$ $\qquad A'_b = \pi \cdot (2r)^2 = 4\pi r^2$

$A_\ell = \pi rg$ $\qquad A'_\ell = \pi \cdot (2r) \cdot (2g) = 4\pi rg$

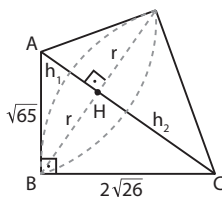
$A_t = A_b + A_\ell$ $\qquad A'_t = A'_b + A'_\ell = 4 \cdot \underbrace{(A_b + A_\ell)}_{A_t}$

Assim, a área fica multiplicada por 4.

**b)** $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ $\qquad V' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot (2r)^2 \cdot 2h$

$V' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 8r^2 \cdot h = 8 \cdot \underbrace{\dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot h}_{V}$

Assim, o volume fica multiplicado por 8.

**42.**

Girando-se o $\triangle ABC$ em torno da hipotenusa $\overline{AC}$, têm-se 2 cones, com raio da base $\overline{BH}$, um deles de altura $\overline{AH}$ e geratriz $\overline{AB}$ e outro com geratriz $\overline{BC}$ e altura $\overline{HC}$.

$(h_1 + h_2)^2 = (\sqrt{65})^2 + (2\sqrt{26})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 + h_2 = 13 \Rightarrow h_2 = 13 - h_1$

Do sistema: $\begin{cases} (\sqrt{65})^2 = h_1^2 + r^2 \\ (2\sqrt{26})^2 = r^2 + (13 - h_1)^2 \end{cases}$

obtêm-se $h_1 = 5$ cm e $h_2 = 8$ cm.

Assim: $r^2 = 40$ cm²

$V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40 \cdot 5 + \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40 \cdot 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{520\pi}{3}$ cm³

**43.** $A_t = \pi r \cdot (g + r) = 54\pi \Rightarrow r \cdot (g + r) = 54 \xrightarrow[g = 2r]{}$

$\Rightarrow r \cdot 3r = 54 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$ m

$h^2 + (3\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{6}$ m

**44. a)** Sejam:

$\mathbf{h_1}$: medida da altura do cone

$\mathbf{h_2}$: medida da altura do cilindro

$h_1 + h_2 = 15$ ①

$V_{cone} + V_{cilindro} = 325\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot h_1 + \pi \cdot 5^2 \cdot h_2 = 325\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 25\pi \cdot \left(\dfrac{h_1}{3} + h_2\right) = 325\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{h_1}{3} + h_2 = 13$ ②

① em ② $\Rightarrow \dfrac{h_1}{3} + 15 - h_1 = 13 \Rightarrow \dfrac{2h_1}{3} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = 3$ m e $h_2 = 12$ m

A altura do cone mede 3 m.

**b)** $A_{silo} = A_{b\ (cilindro)} + A_{\ell\ (cilindro)} + A_{\ell\ (cone)}$ (*)

No cone, temos $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{34}$ m $\simeq 5{,}8$ m

$A_{b\ (cilindro)} = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A_{b\ (cilindro)} = 25\pi$ m²

$A_{\ell\ (cilindro)} = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 \Rightarrow A_{\ell\ (cilindro)} = 120\pi$ m²

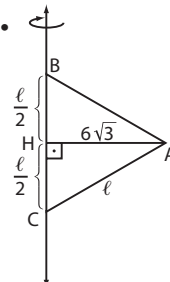
$A_{\ell\ (cone)} = \pi \cdot 5 \cdot 5{,}8 \Rightarrow A_{\ell\ (cone)} = 29\pi$ m²

Em (*), $A_{silo} = 25\pi + 120\pi + 29\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{silo} = 174\pi$ m² $= 174 \cdot 3{,}1$ m² $= 539{,}40$ m²

O custo de fabricação é $539{,}4 \cdot 200$ reais =

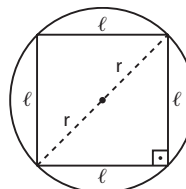
= 107 880 reais.

**45.**

Ao girar o $\triangle ABC$ em torno do lado $\overline{BC}$, obtêm-se dois cones de altura $\overline{BH} \equiv \overline{HC}$ e raio da base $\overline{AH}$, de medida $6\sqrt{3}$ cm.

$\overline{AH}$: altura do $\triangle ABC$

$\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 12$ cm

Logo, $V = 2 \cdot \left[\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot \dfrac{12}{2}\right] \Rightarrow V = 432\pi$ cm³

**46.** Sejam **r** e **h** as medidas do raio da base do cone e da altura do cone, respectivamente (**h** também é a medida da altura da pirâmide), e $\ell$ a medida da aresta da base da pirâmide.

$(2r)^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4r^2 = 2\ell^2 \Rightarrow \ell^2 = 2r^2 \Rightarrow \ell = r \cdot \sqrt{2}$

$V_{cone} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

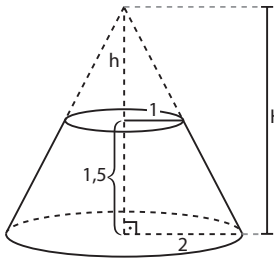
$V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot h \Rightarrow V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot (r\sqrt{2})^2 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot 2r^2 \cdot h$

A razão pedida é: $\dfrac{\dfrac{1}{3} \cdot 2r^2 \cdot h}{\dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h} = \dfrac{2}{\pi}$

**47.** 1º modo: $V = \frac{\pi \cdot 1{,}5}{3} \cdot (4 + 2 + 1) \Rightarrow V = \frac{7\pi}{2}$ cm³

2º modo:

Podemos obter o volume do tronco sem a fórmula:

$\frac{2}{1} = \frac{H}{h} \Rightarrow H = 2h$

$h + 1{,}5 = H$

$h + 1{,}5 = 2h \Rightarrow h = 1{,}5$ cm

$H = 3$ cm

$V_{cone\ maior} = \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 3\right) cm^3 = 4\pi\ cm^3$

$V_{cone\ menor} = \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1{,}5\right) cm^3 = 0{,}5\pi\ cm^3$

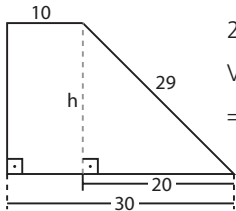
$V_{tronco} = 4\pi\ cm^3 - 0{,}5\pi\ cm^3 = \frac{7\pi}{2}\ cm^3$

Esse procedimento pode ser usado na resolução de todos os exercícios que envolvam o volume do tronco.

$g^2 = 1^2 + (1{,}5)^2 \Rightarrow g = \frac{\sqrt{13}}{2}$ cm

$A_t = \pi \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot (2 + 1) + \pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = \pi\left(5 + \frac{3\sqrt{13}}{2}\right) cm^2$

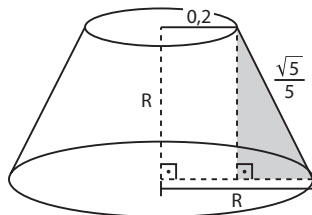
**48.**

$29^2 = h^2 + 20^2 \Rightarrow h = 21$ cm

$V = \pi \cdot \frac{21}{3} \cdot (30^2 + 30 \cdot 10 + 10^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 9100\pi\ cm^3$

**49.** $A_{\ell(cilindro)} = 2\pi r \cdot h \Rightarrow A_{\ell(cilindro)} =$

$= 2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4\ m^2 = 0{,}16\pi\ m^2 = \frac{4\pi}{25}\ m^2$

No triângulo sombreado:

$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = R^2 + (R - 0{,}2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{5} = R^2 + R^2 - \frac{2}{5}R + \frac{1}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow 25R^2 - 5R - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{2}{5} = 0{,}4$ m

- $A_{\ell(tronco)} = \pi \cdot g \cdot (R + r) \Rightarrow$

  $\Rightarrow A_{\ell(tronco)} = \left(\pi \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)\right) m^2 = \left(\frac{3\pi\sqrt{5}}{25}\right) m^2$

- $A_{total(coifa)} = \left(\frac{4\pi}{25} + \frac{3\pi\sqrt{5}}{25}\right) m^2 = \frac{\pi \cdot (4 + 3\sqrt{5})}{25}\ m^2$

**50.** Cada vaso de vidro tem volume igual a:

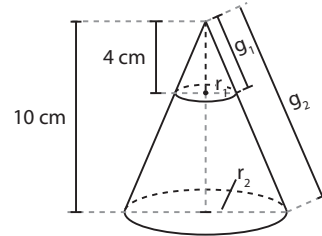
(40 cm) · (30 cm) · (20 cm) = 24 000 cm³

De $g^2 = h^2 + (R - r)^2$, tem-se que $h = 10\sqrt{15}$ cm e o outro vaso tem volume $\frac{\pi \cdot 10\sqrt{15}}{3} \cdot (30^2 + 30 \cdot 20 + 20^2) =$

= 74 100, em cm³.

Serão necessários 4 vasos, pois 3 · 24 000 =

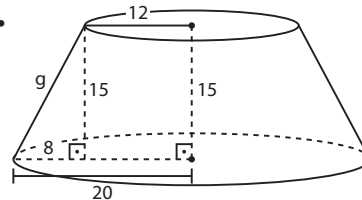
= 72 000 < 74 100.

**51.** Se a área de seção é 36π m², então $r_1 = 6$ m.

**a)** $\frac{4}{6} = \frac{10}{r_2} \Rightarrow r_2 = 15$ cm e $A_2 = \pi \cdot 15^2 \Rightarrow A_2 = 225\pi\ cm^2$

**b)** $V_1 = \frac{\pi}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 \Rightarrow V_1 = 48\pi\ cm^3$

$V_2 = \frac{\pi}{3} \cdot 15^2 \cdot 10 \Rightarrow V_2 = 750\pi\ cm^3$

**c)** Como $\frac{h_2}{h_1} = \frac{10}{4}$, segue que $\frac{g_2}{g_1} = \frac{10}{4} = 2{,}5$.

**52.**

$g^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g^2 = 289 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = 17$ cm

$A_{\ell\ (tronco)} = \pi \cdot g \cdot (R + r)$

$A_\ell = \pi \cdot 17 \cdot (20 + 12) \Rightarrow A_\ell = 1686{,}4\ cm^2 = 0{,}16864\ m^2$

Custo de fabricação de um abajur:

250 · 0,16864 + 40 = 82,16

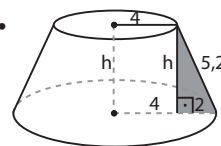
O custo de um abajur é R$ 82,16.

Custo do lote:

125 · 82,16 ⇒ 10 270,00

O custo do lote é R$ 10 270,00.

**53.** O círculo projetado de 400π dm² tem raio 20 dm. Por semelhança de triângulos, $\frac{20}{5} = \frac{d + 3}{3}$, de onde d = 9 dm e a distância pedida é d + 3 = 12, em dm.

**54.**

$A_t = 2 \cdot A_\ell \Rightarrow A_\ell + A_B + A_b = 2 \cdot A_\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow A_B + A_b = A_\ell \Rightarrow \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 4^2 = \pi \cdot g \cdot (6 + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow 52\pi = 10\pi g \Rightarrow g = \frac{52}{10}$ m = 5,2 m

$5{,}2^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow h^2 = 23{,}04 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2304}{100}} \Rightarrow h =$

= 4,8 m

**55.** $d = 12\text{ cm} \Rightarrow r = 6\text{ cm}$

$A = 4\pi \cdot (6\text{ cm})^2 = 144\pi\text{ cm}^2$

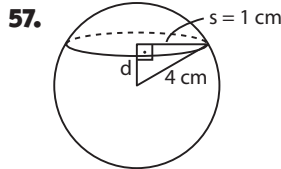
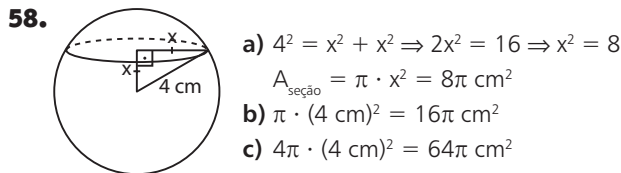
$V = \dfrac{4\pi \cdot 6^3}{3} \Rightarrow V = 288\pi\text{ cm}^3$

**56.** $4\pi r^2 = 576\pi \Rightarrow r^2 = \dfrac{576}{4} = 144 \Rightarrow r = 12\text{ cm}$

$V = \dfrac{4\pi \cdot (12\text{ cm})^3}{3} = 2\,304\pi\text{ cm}^3$

**57.**

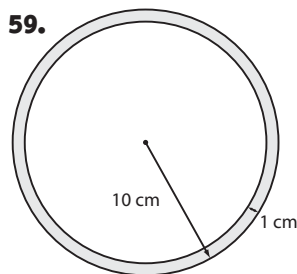
$4^2 = d^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{15}\text{ cm}$

**58.**

**a)** $4^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8$

$A_{seção} = \pi \cdot x^2 = 8\pi\text{ cm}^2$

**b)** $\pi \cdot (4\text{ cm})^2 = 16\pi\text{ cm}^2$

**c)** $4\pi \cdot (4\text{ cm})^2 = 64\pi\text{ cm}^2$

**59.**

1 dm = 10 cm

O raio da esfera oca mede 10 cm − 1 cm = 9 cm e seu volume é:

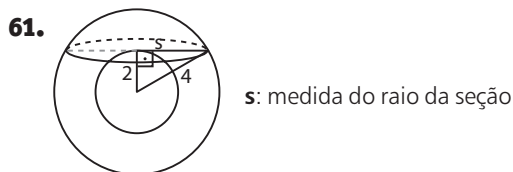
$\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (9\text{ cm})^3 = 972\pi\text{ cm}^3$

**60.** $V_{paral.} = (4\text{ m}) \cdot (2\text{ m}) \cdot (1\text{ m}) = 8\text{ m}^3$

$V_{vaso} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\pi \cdot (0{,}6\text{ m})^3}{3} = 0{,}144\pi\text{ m}^3$

número de vasos: $\dfrac{8}{0{,}144\pi} \simeq 17{,}69$

O número mínimo de vasos é 18.

**61.**

**s**: medida do raio da seção

**a)** $4^2 = 2^2 + s^2 \Rightarrow s^2 = 12\text{ cm}^2 \Rightarrow s = 2\sqrt{3}\text{ cm}$

$A_{seção} = \pi s^2 \Rightarrow A_{seção} = 12\pi\text{ cm}^2$

**b)** $2\pi s = 2\pi \cdot 2\sqrt{3}\text{ cm} = 4\pi\sqrt{3}\text{ cm}$

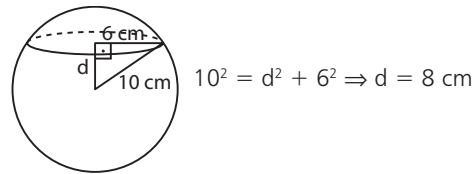
**62.** $A_{inicial} = 144\pi = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6\text{ cm}$

$A_{final} = 256\pi = 4\pi r'^2 \Rightarrow r'^2 = 64 \Rightarrow r' = 8\text{ cm}$

Desse modo, a medida do raio deve ser aumentada em 2 cm.

**63.** $A_{seção} = 36\pi \Rightarrow \pi s^2 = 36\pi \Rightarrow s = 6\text{ cm}$

$A_{sup.\ esférica} = 400\pi \Rightarrow 400\pi = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 10\text{ cm}$

$10^2 = d^2 + 6^2 \Rightarrow d = 8\text{ cm}$

**64. a)** Cilindro: $A_b + A_\ell = \pi 2^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 8 = 4\pi + 32\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow A_b + A_\ell = 36\pi\text{ m}^2$ (observe que só uma base é "contada")

Hemisfério: $\left(\dfrac{4\pi \cdot 2^2}{2}\right)\text{ m}^2 = 8\pi\text{ m}^2$

Quantidade de aço: $44\pi\text{ m}^2 = 44 \cdot 3{,}1\text{ m}^2 = 136{,}4\text{ m}^2$

**b)** $V_{recipiente} = V_{cilindro} + \dfrac{V_{esfera}}{2}$

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi = 32 \cdot 3{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cilindro} = 99{,}2\text{ m}^3$

$V_{esfera} = \dfrac{4\pi}{3} \cdot r^3 = \dfrac{4\pi}{3} \cdot 2^3 = \dfrac{32}{3} \cdot \pi \Rightarrow V_{esfera} = 33{,}0\overline{6}\text{ m}^3$

Assim, o volume do recipiente, em m³, é:

$99{,}2 + \dfrac{33{,}0\overline{6}}{2} = 115{,}7\overline{3}$

**65. a)** Seja **n** o número de esferas menores que serão fundidas. Devemos ter:

$n \cdot V_{menor} \geqslant V_{maior}$

$n \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \geqslant \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3$

$8n \geqslant 27 \Rightarrow n \geqslant \dfrac{27}{8}$, isto é, $n \geqslant 3{,}375$

Como **n** é inteiro positivo, o número mínimo de esferas menores que serão fundidas é 4.

**b)** O volume da sobra de ouro é:

$4 \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot (2\text{ cm})^3 - \dfrac{4}{3}\pi \cdot (3\text{ cm})^3 = \left(\dfrac{128\pi}{3} - 36\pi\right)\text{cm}^3 =$

$= \dfrac{20\pi}{3}\text{ cm}^3 \simeq \dfrac{20 \cdot 3}{3}\text{ cm}^3 = 20\text{ cm}^3$

Como a densidade é 19,3 g/cm³, a massa de ouro que sobra é 386 g (19,3 · 20 = 386), que será vendida ao preço, em reais, de 140 · 386 = 54 040.

**66.**



$\left(\sqrt{241}\right)^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 241 - 16 = h^2 \Rightarrow h = 15\text{ cm}$

$V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi\, 4^2 \cdot 15 \Rightarrow V_{cone} = 80\pi\text{ cm}^3$

$= 240\text{ cm}^3$

Metade da bola de sorvete está dentro do cone e seu volume é:

$v = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\pi \cdot (4\text{ cm})^3}{3} = \dfrac{128\pi}{3}\text{ cm}^3 = 128\text{ cm}^3$

O volume da parte do cone sem sorvete é:

$V_{cone} - v = 240\text{ cm}^3 - 128\text{ cm}^3 = 112\text{ cm}^3$

**67. a)** $R = 2r$

$\begin{cases} A' = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (2r)^2 = 16\pi r^2 \\ A = 4\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow A' = 4 \cdot A$

$\begin{cases} V' = \dfrac{4\pi}{3} R^3 = \dfrac{4\pi}{3} \cdot (2r)^3 = \dfrac{32\pi\, r^3}{3} \\ V = \dfrac{4\pi\, r^3}{3} \end{cases} \Rightarrow V' = 8 \cdot V$

**b)** $R = \frac{r}{3}$

$A' = 4\pi \cdot \left(\frac{r}{3}\right)^2 = 4\pi \frac{r^2}{9} = \frac{4\pi r^2}{9} = \frac{A}{9} \Rightarrow A' = \frac{A}{9}$

$V' = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{r}{3}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{r^3}{27} = \frac{1}{27} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{27} \cdot V \Rightarrow$

$\Rightarrow V' = \frac{V}{27}$

**68. a)** $V_{cone} = \frac{1}{3} \pi \cdot 10^2 \cdot 30 = 1\,000\pi \Rightarrow V_{cone} = 3\,100 \text{ cm}^3$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{27}{8} = \frac{9\pi}{2} \Rightarrow V_{esfera} = 13{,}95 \text{cm}^3$; como foram colocadas 200 bolinhas, o volume ocupado por elas é $(200 \cdot 13{,}95) \text{ cm}^3 = 2\,790 \text{ cm}^3$

$V_{\text{líquido adicionado}} = 3\,100 \text{ cm}^3 - 2\,790 \text{ cm}^3 = 310 \text{ cm}^3$

**b)** O volume de cada nova bolinha é:

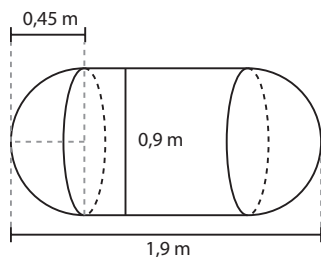
$V' = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot V$, sendo **V** o volume de cada bolinha usada na 1ª situação.

Assim, o volume de líquido, em cm³, que seria adicionado é:

$3\,100 - 200 \cdot \frac{V}{8} = 3\,100 - 25 \cdot V =$

$= 3\,100 - 25 \cdot 13{,}95 = 2\,751{,}25$

**69. a)** Observe que o raio da base do cilindro coincide com o raio da semiesfera. O comprimento, em m, do cilindro é:

$1{,}9 - 2 \cdot \frac{0{,}9}{2} = 1$

$A_{semiesfera} = \frac{4\pi R^2}{2} = 2 \cdot \pi \cdot (0{,}45)^2 = 6 \cdot 0{,}2025 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{semiesfera} = 1{,}215 \text{ m}^2$

$A_{\ell cilindro} = 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot 0{,}45 \cdot 1 = 0{,}9\pi \Rightarrow A_{\ell cilindro} = 2{,}7 \text{ m}^2$

A área da superfície do aquecedor é:

$(2 \cdot 1{,}215 + 2{,}7) \text{ m}^2 = 5{,}13 \text{ m}^2$

**b)** $V_{semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$; como são 2 semiesferas, temos:

$V_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}45)^3 = 4 \cdot \left(\frac{45}{100}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^3 =$

$= 4 \cdot \frac{9^3}{20^3} \Rightarrow V_1 = \frac{729}{2\,000} \text{ m}^3$

$V_2 = V_{cilindro} = \pi \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^2 \cdot 1 = \frac{3 \cdot 81}{400} \Rightarrow V_2 = \frac{243}{400} \text{ m}^3$

$V = V_1 + V_2 = \frac{729}{2\,000} + \frac{243}{400} = \frac{1\,944}{2\,000} \Rightarrow$

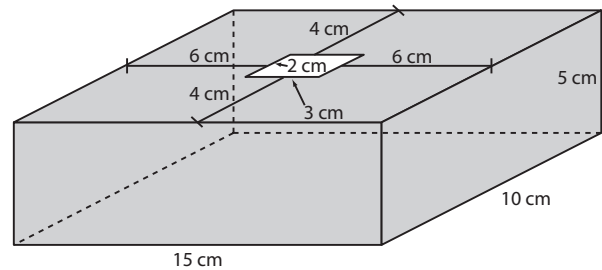
$\Rightarrow V = 0{,}972 \text{ m}^3 = 972 \text{ L}$

**70.** Devemos ter:

$\underbrace{\pi \cdot 70^2 \cdot h}_{\text{volume inicial, em cm}^3\text{, da água ao nível } \mathbf{h}} + \underbrace{\frac{4}{3}\pi \cdot 21^3}_{\text{volume da pedra, em cm}^3} = \underbrace{\pi \cdot 70^2 \cdot (h + x)}_{\text{volume final (água + pedra), em cm}^3\text{, ao nível } h + x}$

$\cancel{4\,900\pi h} + 12\,348\pi = \cancel{4\,900\pi h} + x \cdot \pi \cdot 4\,900 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{12\,348\pi}{4\,900\pi} = x \Rightarrow x = 2{,}52 \text{ cm}$

**71.** Veja como fica a caixa montada com a abertura:

A abertura por onde serão colocados os sólidos é um retângulo de dimensões $(10 - 2 \cdot 4)$ cm = 2 cm e $(15 - 2 \cdot 6)$ cm = 3 cm.

I) passa, pois o diâmetro da base mede 3 cm e sua altura é 1 cm;

II) passa, pois a aresta do cubo mede 2 cm;

III) não passa, pois o diâmetro da esfera mede 3 cm e a abertura tem dimensões $3 \times 2$;

IV) passa, basta fazer a passagem pela base retangular cujas dimensões são 2 cm e 3 cm, com a aresta de 4 cm na vertical;

V) passa; o diâmetro da base mede 2 cm e a altura é compatível.

Alternativa *c*.

**72.** Observe que a altura do cilindro mede $6 \cdot (2{,}0 \text{ cm}) = 12{,}0$ cm e o raio da base do cilindro mede $\frac{(2{,}0 \text{ cm})}{2} = 1{,}0$ cm.

Assim, o volume do cilindro é $\pi \cdot (1 \text{ cm})^2 \cdot (12 \text{ cm}) = 12\pi \text{ cm}^3$.

O volume de uma esfera é $\frac{4}{3} \pi \cdot (1 \text{ cm})^3 = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$.

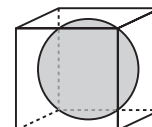
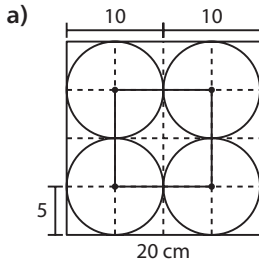
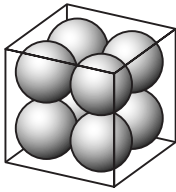
O volume de ar pedido é $\left(12\pi - 6 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) \text{cm}^2 = 4\pi \text{ cm}^3 \simeq$

$\simeq 12{,}56 \text{ cm}^3$.

**73.** Observe que o diâmetro da esfera coincide com a aresta do cubo. Essa medida é $\sqrt{196}$ cm = 14 cm.

Assim, a área da superfície esférica é $4\pi \cdot (7 \text{ cm})^2 = 196\pi \text{ cm}^2$

**74.**

**a)**

Se a aresta do cubo mede 20 cm, o diâmetro de cada esfera mede 10 cm e o raio mede 5 cm.
O quadrilátero formado é um quadrado de lado 10 cm; sua área é 100 cm².

**b)** O poliedro formado é um cubo de aresta 10 cm e o seu volume é $(10\ cm)^3 = 1\,000\ cm^3$.

**75. a)** $A_{sup.\ esférica} = 4\pi \cdot (5\ cm)^2 = 100\pi\ cm^2$

Observe que 30° equivalem a $\frac{1}{12}$ de 360°.

$A_{fuso} = \frac{1}{12} \cdot 100\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{fuso} = \frac{25\pi}{3}\ cm^2$

**b)** $A_{sup.\ esférica} = 4\pi \cdot (6\ cm)^2 = 144\pi\ cm^2$

$A_{fuso} = \frac{1}{12} \cdot 144\pi\ cm^2 = 12\pi\ cm^2$

$A_{cunha} = A_{fuso} + 2 \cdot A_{semicírculo} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{cunha} = 12\pi + 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 6^2}{2}\right) = 12\pi + 36\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{cunha} = 48\pi\ cm^2$

$V_{esfera} = \frac{4\pi}{3} \cdot (6\ cm)^3 = 288\pi\ cm^3$

$V_{cunha} = \frac{1}{12} \cdot 288\pi\ cm^3 = 24\pi\ cm^3$

**76.** $45° = \frac{1}{8} \cdot 360°$; $A_{sup.\ esférica} = 4\pi \cdot (10\ cm)^2 = 400\pi\ cm^2$

$A_{fuso} = \frac{1}{8} \cdot 400\pi\ cm^2 = 50\pi\ cm^2$

**77.** $\frac{A_{superfície\ esférica}}{A_{fuso}} = \frac{324\pi}{54\pi} = 6 \Rightarrow \alpha = 60°$, pois

$\frac{360°}{6} = 60°$

**78.** Como $\frac{10°}{360°} = \frac{1}{36}$, concluímos que o volume da esfera é $36 \cdot 1\,078\ m^3 = 38\,808\ m^3$.

Daí:

$38\,808 = \frac{4\pi \cdot r^3}{3} \Rightarrow 38\,808 \cdot 3 = 4 \cdot \frac{22}{7} r^3 \Rightarrow r^3 = 9\,261 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 21\ m$

$A_{superfície\ esférica} = 4\pi \cdot (21 m)^2 = 1\,764\pi\ m^2$

$A_{cunha} = \frac{1\,764\pi}{36} + \underbrace{\pi \cdot 21^2}_{\text{área de 2 semicírculos}} = 49\pi + 441\pi =$

$= 490 \cdot \frac{22}{7} \Rightarrow A_{cunha} = 1\,540\ m^2$

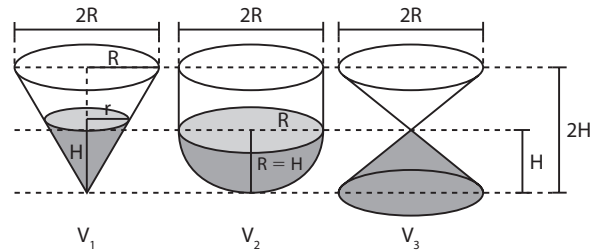
**79. a)** Cada fatia equivale a $\frac{1}{12}$ da melancia.

$A_{casca\ da\ fatia} = \frac{1}{12} \cdot 4\pi R^2\ cm^2 = \frac{\pi R^2}{3}\ cm^2$

**b)** Devemos determinar a área de uma cunha de 30° em uma esfera de raio **R**:

$A_{cunha} = A_{fuso} + \underbrace{2 \cdot \frac{\pi R^2}{2}}_{\text{2 semicírculos}} = \frac{\pi R^2}{3} + \pi R^2 = \frac{4\pi R^2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{cunha} = \frac{4\pi R^2}{3}\ cm^2$

## Desafio

$V_1$ é o volume do cone de raio **r** com líquido até a altura **H**.
Notemos que:

$$\frac{R}{r} = \frac{2H}{H} \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot H = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{4} \cdot H; \text{ como } R = H, \text{ temos:}$$

$$V_1 = \frac{\pi R^2 \cdot R}{12} = \frac{\pi R^3}{12} = \frac{1}{12} \cdot \pi R^3$$

$V_2$ é o volume de uma semiesfera:

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot \pi R^3$$

$V_3$ é o volume de um cone de raio **R** e altura H = R:

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot R = \frac{\pi R^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^3$$

Como $\frac{1}{12} < \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$, segue que $V_1 < V_3 < V_2$.

Alternativa *b*.

# CAPÍTULO 10 Análise Combinatória

## Exercícios

**1.** $5 \cdot 3 = 15$

**2.** $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

**3.** $\underset{1^a\ questão}{3} \cdot \underset{2^a\ questão}{3} \cdot \underset{3^a\ questão}{3} \cdot \ldots \cdot \underset{12^a\ questão}{3} =$

$= 3^{12} = 531\,441$ (531 441 possibilidades)

**4.** $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (60 possibilidades)

**5. a)** $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 9 \cdot 10^4 =$

$= 90\,000$ (90 000 números)

**b)** $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underset{ímpar}{\underline{5}} = 5 \cdot 9 \cdot 10^3 =$

$= 45\,000$ (45 000 números)

**c)** Devemos saber quantos números existem entre 71 266 e 99 999, incluindo-os. Temos:
$99\,999 - 71\,266 + 1 = 28\,734$ (28 734 números)

**d)** $\underline{\ 1\ } \cdot \underline{\ 9\ } \cdot \underline{\ 8\ } \cdot \underline{\ 7\ } \cdot \underline{\ 6\ } =$
$= 3\,024$ (3 024 números)

**6.** **a)** $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 = 4\,096$

**b)** $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = 2\,048$ (4: par)

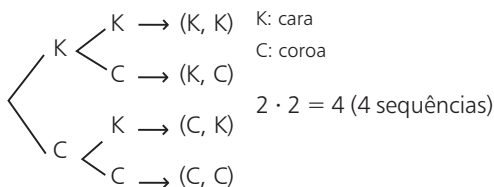
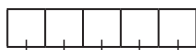
**c)** Números com algarismos distintos: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$; a porcentagem é: $\frac{1\,680}{4\,096} \simeq 0{,}4101 \simeq 41{,}01\%$

**7.** **a)**

K → K → (K, K)
K → C → (K, C)
C → K → (C, K)
C → C → (C, C)

K: cara
C: coroa

$2 \cdot 2 = 4$ (4 sequências)

**b)** 1º 2º 3º 4º

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ (16 sequências)

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ (32 sequências)

Para 10 lançamentos: $2^{10} = 1\,024$ (1 024 sequências)

**c)** Generalizando o item *b*, para **n** lançamentos temos $2^n$ sequências. Daí:
$2^n = 4^{19} \Rightarrow 2^n = (2^2)^{19} \Rightarrow n = 38$

**8.** **a)** Excluímos: 1, 9 e 6; temos: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ (840 opções de senha)

**b)** Excluímos 1, 9, 5 e 4:
$\underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 360$ (360 opções)

**c)** Excluímos 1 e 9: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680$ (1 680 opções)

**9.** **a)** $\underbrace{\underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26}}_{\text{letras}} \cdot \underbrace{\underline{10} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7}}_{\text{algarismos}} =$
$= 26^3 \cdot 5\,040 = 88\,583\,040$ (88 583 040 placas)

**b)** $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78\,624\,000$ (78 624 000 placas)

**c)** $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{usando apenas A, E, I, O, U}} \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}_{\text{usando os algarismos 0, 2, 4, 6, 8 sem repetição}} = 15\,000$ (15 000 placas)

**d)** $\underbrace{25 \cdot 25 \cdot 25}_{\text{usando todas as letras, exceto o J}} \cdot \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{usando 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6}} = 25^3 \cdot 7^4 =$
$= 37\,515\,625$ (37 515 625 placas)

**e)** Para os quatro algarismos ímpares temos as seguintes possibilidades de ordem crescente:
1 — 3 — 5 — 7 ou 1 — 3 — 5 — 9 ou 1 — 3 — 7 — 9 ou 1 — 5 — 7 — 9 ou 3 — 5 — 7 — 9
Para cada uma dessas cinco possibilidades, o número de placas possíveis é:
$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 26^3 = 17\,576$
Assim, o número de placas distintas procurado é:
$5 \cdot 17\,576 = 87\,880$

**10.** **a)** $\underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 6$

**b)** $\underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 60$

**c)** $\underset{\neq 0}{\underline{\ 4\ }} \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 48$

**d)** Há dois casos para considerar:
1º) números da forma (par, ímpar, par):
$4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ (80 possibilidades) (4: sem o zero)
2º) números da forma (ímpar, par, ímpar):
$5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ (100 possibilidades)
Assim, ao todo, podem ser formados 180 números ($80 + 100 = 180$).

**11.** **a)** Números pares que terminam por 0:
$\underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 7\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 42$
Números pares que terminam por 2, 4 e 6:
$\underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 7\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 126$
Ao todo, são 168 números ($42 + 126 = 168$).

**b)** Números pares que terminam por 0:
$\underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 30$
Números pares que terminam por 2, 4 ou 6:
$\underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 75$
Ao todo, há 105 números ($30 + 75 = 105$).

**c)** Números que terminam por 0:
$\underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 120$
Números que terminam por 5:
$\underset{\neq 0,\ \neq 5}{\underline{\ 5\ }} \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underset{\text{só pode ser 5}}{\underline{\ 1\ }} = 100$
Temos, ao todo, 220 números ($120 + 100 = 220$).

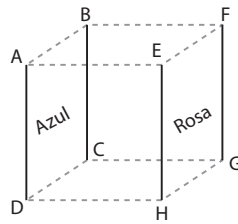
**12.**
32 rapazes (**R**): $\frac{3}{8} \cdot 32 = 12$ sabem dançar; 20 não sabem
40 moças (**M**): $0{,}8 \cdot 40 = 32$ sabem dançar; 8 não sabem

**a)** Devemos formar uma sequência do tipo (R, M) em que **R** pode ser escolhido de 20 modos distintos e **M** de 8 maneiras distintas. Pelo PFC, o número de sequências é: $20 \cdot 8 = 160$.

**b)** Há dois casos:
1º) O rapaz sabe dançar e a moça não:
$12 \cdot 8 = 96$ (96 pares)
2º) A moça sabe dançar e o rapaz não:
$32 \cdot 20 = 640$ (640 pares)
Assim há, ao todo, 736 opções de pares ($96 + 640 = 736$).

**13.** 1º modo:

Total de possibilidades para pintar as 4 paredes sem restrição: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Número de possibilidades com as paredes azul e rosa de frente uma para outra:

O resultado procurado é, portanto, $24 - 4 - 4 = 16$.

2º modo:

Pintando a face ABCD de azul, temos:

- face EFGH: 2 opções (verde ou branco)
- face ADEH: 2 opções (rosa ou a cor *não* usada em EFGH)
- face BCFG: 1 opção

Temos: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ (4 maneiras)

Como qualquer uma das outras três faces pode ser pintada de azul, o resultado, por analogia, é $4 \cdot 4 = 16$.

Alternativa *b*.

**14. a)** $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

**b)** $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

**15.** O Recruta Zero pode colocar sua carta em 3 "destinos" possíveis; o 2º soldado também tem 3 opções de envio e assim por diante.

Assim, o resultado procurado é $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$.

**16.** Sejam: $\begin{cases} \mathbf{s}\text{: número de saias} \\ \mathbf{p}\text{: número de pares de sapato} \end{cases}$

número de combinações para se vestir:

$10 \cdot s \cdot p = 420 \Rightarrow s \cdot p = 42$

Devemos encontrar os possíveis valores naturais de **s** e **p** que satisfazem essa equação, lembrando que $s \neq 1$ e $p \neq 1$.

| s | p |
|---|---|
| 2 | 21 |
| 3 | 14 |
| 6 | 7 |
| 7 | 6 |
| 14 | 3 |
| 21 | 2 |

**17.** Temos 5 algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7 e 9.

- Com um algarismo, temos 5 números.
- Com dois algarismos, temos 25 números ($5 \cdot 5 = 25$).
- Com três algarismos, temos 125 números ($5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$).

Como $5 + 25 + 125 = 155$, o 156º número é 1 111 e assim o 157º número é 1 113.

Alternativa *d*.

**18. a)** Se a conexão for em São Paulo:

$\underline{4} \cdot \underline{5} = 20$

(4: Brasília-São Paulo; 5: São Paulo-Buenos Aires)

Se a conexão for no Rio de Janeiro:

$\underline{4} \cdot \underline{3} = 12$

Se a conexão for em Curitiba: $\underline{2} \cdot \underline{4} = 8$

Total: $20 + 12 + 8 = 40$

**b)** Conexão em São Paulo: 4 opções (**A**, **B**, **C** ou **D**)

Conexão no Rio de Janeiro: 2 opções (**B** ou **C**)

Conexão em Curitiba: 2 opções (**A** ou **B**)

Total: $4 + 2 + 2 = 8$.

**19.** Como $x = \frac{a + b}{2}$, sabemos que **x** resultará inteiro se o numerador $a + b$ for par. Para que a soma resulte par, podem ocorrer:

1º) **a** é par e **b** é par: **a** pode ser escolhido de 2 maneiras e **b** também, num total de 4 possibilidades ($2 \cdot 2 = 4$).

2º) **a** é ímpar e **b** é ímpar: **a** pode ser escolhido de 3 maneiras, o mesmo ocorrendo com **b**, num total de 9 possibilidades ($3 \cdot 3 = 9$).

Assim, o resultado procurado é: $4 + 9 = 13$.

**20. a)** $\underline{1} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 81$

(1: só pode ser "·")

**b)**

2 símbolos: $\underline{3} \cdot \underline{3} = 9$

3 símbolos: $\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 27$

4 símbolos: $\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 81$

total: 117

**c)** $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6$

**d)** Com exatamente três "·":

8 possibilidades.

Com os quatro "·" só há uma única sequência, totalizando 9 casos possíveis ($8 + 1 = 9$).

**21. a)** $2 \cdot 4 = 8$ (8 opções distintas)

(2: transporte; 4: hotel)

**b)** $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ (16 opções distintas)

(2: transporte; 4: hotel; 2: seguro)

**22. a)** Falsa; usando cor 1 em **A**, em **B** devemos usar cor 2 e em **C** cor 3; em **D** podemos usar novamente a cor 1. Assim, o número mínimo de cores é 3.

**b)** Verdadeira; iniciando com: **A**: 4 opções; **B**: 3 opções; **C**: 2 opções e **D**: 1 opção. Pelo PFC, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (24 possibilidades).

**c)** Falsa; iniciando com **A**: 4 opções; **B**: 3 opções; **C**: 2 opções e **D**: 2 opções (pode ser igual à cor usada em A ou pode ser uma 4ª cor). Temos: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ (48 possibilidades).

**d)** Verdadeira; iniciando com **A**: 5 opções; **B**: 4 opções; **C**: 3 opções e **D**: 1 opção. Temos: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ (60 possibilidades).

**e)** Verdadeira; veja item *a*.

**23.** Podemos ter:

1º) **A → B → D**: $3 \cdot 2 = 6$ (6 possibilidades)
2º) **A → C → D**: $4 \cdot 3 = 12$ (12 possibilidades)
3º) **A → B → C → D**: $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ (36 possibilidades)
4º) **A → C → B → D**: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ (32 possibilidades)
Ao todo existem 86 opções distintas ($6 + 12 + 36 + 32 = 86$).

**24. a)**

| 120 | 2 |
|---|---|
| 60 | 2 |
| 30 | 2 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Um divisor de 120 é da forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ em que $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$ e $c \in \{0, 1\}$. Assim, podemos fazer 16 escolhas distintas ($4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$); 120 possui 16 divisores positivos.

**b)** $3\,780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
O número de divisores positivos é $3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 48$

**c)** $48 = 2^4 \cdot 3$; $15 = 3 \cdot 5$
$48^5 \cdot 15^6 = (2^4 \cdot 3)^5 \cdot (3 \cdot 5)^6 = 2^{20} \cdot 3^5 \cdot 3^6 \cdot 5^6 = 2^{20} \cdot 3^{11} \cdot 5^6$
O número de divisores positivos é $21 \cdot 12 \cdot 7 = 1\,764$.

**25. a)** $1\,125 = 3^2 \cdot 5^3$
$1\,125 \cdot 2^n = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 2^n$; esse número possui:
$3 \cdot 4 \cdot (n + 1)$ divisores positivos, isto é:
$12 \cdot (n + 1) = 84 \Rightarrow n = 6$

**b)**
$$\begin{cases} 2 = 1 \cdot 2 \\ 4 = 2^2 \\ 6 = 2 \cdot 3 \\ 8 = 2^3 \\ 10 = 2 \cdot 5 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 14 = 2 \cdot 7 \\ 16 = 2^4 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 20 = 2^2 \cdot 5 \end{cases}$$

O produto $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 18 \cdot 20$ é igual a:
$2 \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 2^3 \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 7) \cdot 2^4 \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot (2^2 \cdot 5) = 2^{18} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$
O número de divisores positivos é:
$19 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 570$

**26. a)** $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

**b)** $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 320$

**c)** Vamos supor que em cada uma das "extremidades" seja usada a cor $\mathbf{C_1}$; para o 2º retângulo há 4 opções de escolha e para o 3º retângulo há 3 opções de escolha. Teremos 12 possibilidades ($1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$).

Se a cor usada nas extremidades fosse $\mathbf{C_2}$, teríamos, pelo mesmo raciocínio, 12 possibilidades e assim por diante. Como há 5 cores disponíveis, temos 60 possibilidades distintas ($5 \cdot 12 = 60$).

**27.** 1ª etapa

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$ (5 040 opções)

2ª etapa

$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 67\,600$ (67 600 opções)

É importante observar que o número de possibilidades para a 2ª etapa refere-se apenas à tentativa correta, e não para todas as 5 040 tentativas. Assim, o número máximo de tentativas é: $5\,040 + 67\,600 = 72\,640$

$$\begin{cases} 1 \text{ tentativa} \text{ — } 30 \text{ s} \\ 72\,640 \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x = 2\,179\,200 \text{ s}$$

Como 1 h contém 3 600 s, teríamos $\frac{2\,179\,200}{3\,600}$ h $= 605{,}33...$ h, ou seja, 605 horas e 20 minutos.

**28. a)** 720
**b)** 24
**c)** $1 + 1 = 2$
**d)** $6 - 2 = 4$
**e)** $5\,040 - 120 = 4\,920$
**f)** $5 \cdot 6 = 30$

**29. a)** $\frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$

**b)** $\frac{\cancel{9!}}{10 \cdot \cancel{9!}} = \frac{1}{10}$

**c)** $\frac{\cancel{3!}}{4 \cdot \cancel{3!}} + \frac{\cancel{4!}}{5 \cdot \cancel{4!}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$

**d)** $\frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2} = 21$

**e)** $\frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!} \cdot 2} = 190$

**f)** $\frac{8 \cdot \cancel{7!} \cdot \cancel{6!}}{\cancel{7!} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}} = \frac{8}{7}$

**30. a)** $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9! + 9!}{10 \cdot 9!} = \frac{\cancel{9!}\,(110 + 1)}{10 \cdot \cancel{9!}} = \frac{111}{10}$

**b)** $17 \cdot 16! - 17 \cdot 16! = 0$

**c)** $\frac{40 \cdot 39! - 39!}{41 \cdot 40 \cdot 39!} = \frac{\cancel{39!}\,(40 - 1)}{41 \cdot 40 \cdot \cancel{39!}} = \frac{39}{1\,640}$

**d)** $\frac{\cancel{85!} \cdot 85 \cdot 84 \cdot \cancel{83!}}{86 \cdot \cancel{85!} \cdot \cancel{83!}} = \frac{85 \cdot 84}{86} = \frac{3\,570}{43}$

**31. a)** $a = 2$ e $b = 3 \Rightarrow 5! \neq 2! + 3! = 2 + 6 = 8$ **(F)**
**b)** $a = 3$ e $b = 2 \Rightarrow 1! \neq 3! - 2! = 6 - 2 = 4$ **(F)**
**c)** $a = 3 \Rightarrow 6! \neq 2 \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$ **(F)**
**d)** $(a!)^2 = a! \cdot a!$ **(V)**
**e)** $a = 3$ e $b = 2 \Rightarrow 6! \neq 3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$ **(F)**

**32. a)** $\frac{(n + 2) \cdot \cancel{(n + 1)!}}{\cancel{(n + 1)!}} = n + 2$

**b)** $\frac{\cancel{(n - 3)!}}{(n - 2) \cdot \cancel{(n - 3)!}} = \frac{1}{n - 2}$

**c)** $\frac{(n + 1) \cdot n! + n!}{n!} = \frac{\cancel{n!}\,(n + 1 + 1)}{\cancel{n!}} = n + 2$

**d)** $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! - (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-1) \cdot (n-2)! + (n-2)!} =$

$= \dfrac{\cancel{(n-2)!} \cdot (n^2 - n - n + 1)}{\cancel{(n-2)!} \cdot (n - 1 + 1)} = \dfrac{(n-1)^2}{n}$

**33. a)** $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 6 \Rightarrow \dfrac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + 3n - 4 = 0$ ⟨ $n = 1$ ou $n = -4$ não convém

$S = \{1\}$

**b)** $n! = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 5;\ S = \{5\}$

**c)** $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - n - 42 = 0$ ⟨ $n = 7$ ou $n = -6$ não convém

$S = \{7\}$

**d)** $\dfrac{(n+2) \cdot (n+1)! - (n+1)!}{n!} = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(n+2-1) \cdot (n+1)!}{n!} = 25 \Rightarrow \dfrac{(n+1)^2 \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + 2n - 24 = 0$ ⟨ $n = 4$ ou $n = -6$ não convém

$S = \{4\}$

**e)** Como $0! = 1$ e $1! = 1$, podemos ter:

$(n - 5 = 0 \Rightarrow n = 5)$ ou $(n - 5 = 1 \Rightarrow n = 6)$

$S = \{5, 6\}$

**f)** Seja $n! = m$; segue a equação do 2º grau:

$m^2 - 100m - 2400 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 120$ ou $m = -20$ (não serve)

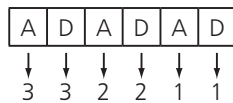
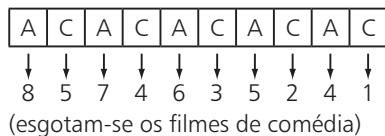
Logo, $n! = 120 \Rightarrow n = 5$

$S = \{5\}$

**34.** Considerando **A** filme de ação, **C** filme de comédia e **D** filme de drama, devemos ter:

| A | C | A | C | A | C | A | C | A | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 8 | 5 | 7 | 4 | 6 | 3 | 5 | 2 | 4 | 1 |

(esgotam-se os filmes de comédia)

| A | D | A | D | A | D |
|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

(esgotam-se todos os lançamentos)

O número de maneiras é:

$8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 =$
$= 8! \cdot 5! \cdot 3!$

Alternativa *b*.

**35. a)** $P_3 = 3! = 6$
**b)** $P_4 = 4! = 24$
**c)** $P_6 = 6! = 720$
**d)** $P_9 = 9! = 362\,880$
**e)** $P_5 = 5! = 120$
**f)** $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$

**36.** $P_4 = 4! = 24$ ou, pelo PFC, $\underbrace{4}_{1º} \cdot \underbrace{3}_{2º} \cdot \underbrace{2}_{3º} \cdot \underbrace{1}_{4º} = 24$

**37. a)** $P_9 = 9! = 362\,880$

**b)** $\underset{\text{vogal}}{4}\ \underbrace{_\ _\ _\ _\ _\ _\ _\ _}_{P_8} = 4 \cdot 8! =$

$= 161\,280$

**c)** $\underset{\text{consoante}}{5}\ \underbrace{_\ _\ _\ _\ _\ _\ _}_{P_7}\ \underset{\text{consoante}}{4} =$

$= 5 \cdot 4 \cdot 7! = 20 \cdot 7! = 100\,800$

**d)** [CON] [Q] [U] [I] [S] [T] [A] → 7 blocos

$P_7 = 7! = 5040$

**e)** Do total de anagramas possíveis, metade tem a letra **C** antes da letra **A** e a outra metade tem o contrário. A resposta é 181 440.

**f)** [CON] [QUIS] [TA]

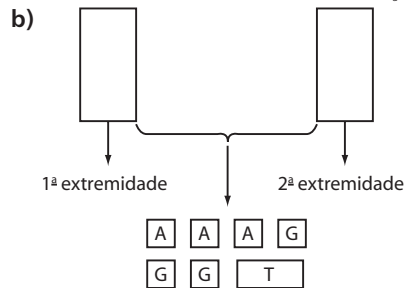
- 3 blocos: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- dentro de cada bloco: $P_3 \cdot P_4 \cdot P_2 = 288$

O total pedido é: $6 \cdot 288 = 1\,728$

**38. a)** Devemos permutar 5 cidades; $P_5 = 5! = 120$

**b)** ___ ___ ___ ___ Petrolina: $P_4 = 4! = 24$

**39. a)** Consideremos os 5 livros de Álgebra como um só livro ($\mathbf{L_1}$), os 3 de Geometria como um só livro ($\mathbf{L_2}$) e os 2 de Trigonometria como um só livro ($\mathbf{L_3}$). Devemos, então, permutar $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$ e $\mathbf{L_3}$, em um total de 6 configurações ($P_3 = 3! = 6$). Mas, para cada uma dessas configurações, devemos permutar os livros em $\mathbf{L_1}$, os livros em $\mathbf{L_2}$ e os livros em $\mathbf{L_3}$, totalizando: $6 \cdot \underbrace{5!}_{P_5} \cdot \underbrace{3!}_{P_3} \cdot \underbrace{2!}_{P_2} = 8640$

**b)**

1ª extremidade: 5 opções

2ª extremidade: 4 opções

"miolo": Devemos permutar 7 blocos e, além disso, permutar dentro do bloco de Trigonometria: $7! \cdot 2$

O resultado procurado é, portanto: $5 \cdot 4 \cdot 7! \cdot 2 =$
$= 201\,600$ (201 600 modos)

**40. a)** 7 semanas

**b)** $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ (5 040 ordens distintas)

**c)** [moças] [rapazes]

Temos: $\underbrace{P_3 \cdot P_4}_{\text{"dentro" dos blocos}} = 6 \cdot 24 = 144$ (144 maneiras)

**d)** Devemos obrigatoriamente iniciar por rapaz. Temos:

R – M – R – M – R – M – R
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$ (144 modos distintos)

**41.** Total de anagramas (sem restrições): $P_6 = 6! = 720$

Número de anagramas em que as vogais estão juntas:

| Q | vogais | J |

$\underbrace{P_3}_{\text{entre}} \cdot \underbrace{P_4}_{\text{dentro}} = 6 \cdot 24 = 144$

A diferença $720 - 144 = 576$ fornece o número de anagramas em que as vogais não aparecem todas juntas.

**42. a)** $n! = 24 \Rightarrow n = 4$; $S = \{4\}$

**b)** $\frac{n!}{(n-2)!} = 506 \Rightarrow n(n-1) = 506 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - n - 506 = 0 \xRightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 23$; $S = \{23\}$

**43. a)** Começando por **A** existem 120 anagramas ($5! = 120$).

Começando por **O** existem 120 anagramas.

Começando por **P** existem 120 anagramas.

Assim, o primeiro anagrama que começa por **R** é precedido de 360 anagramas ($120 + 120 + 120 = 360$) e sua posição é a 361ª.

**b)** Começando por **A**, há 120 anagramas ($P_5 = 5! = 120$).

Começando por **O**, há 120 anagramas ($P_5 = 5! = 120$).

Começando por PA, há 24 anagramas ($P_4 = 4! = 24$).

Começando por PO, há 24 anagramas ($P_4 = 4! = 24$).

Começando por PRAO, há 2 anagramas ($P_2 = 2$).

Começando por PRAS, há 2 anagramas ($P_2 = 2$).

Assim, o anagrama PRATOS é precedido de 292 anagramas ($120 + 120 + 24 + 24 + 2 + 2 = 292$), e sua posição é a 293ª.

**c)**
- Da 1ª à 120ª posição temos os anagramas que começam por **A**.
- Da 121ª à 240ª posição temos os anagramas que começam por **O**.
- Da 241ª à 360ª posição temos os anagramas que começam por **P**.
- Da 361ª à 480ª posição temos os anagramas que começam por **R**.

Começando por SA temos 24 anagramas ($P_4 = 4! = 24$), posição 481ª até a 504ª. As últimas posições (que começam por SAT) são:

504ª → SATRPO
503ª → SATROP
502ª → SATPRO
501ª → SATPOR
500ª → SATORP
499ª → SATOPR

Logo, o anagrama procurado é SATORP.

**44. a)** B __ __ __ __ __: $P_5 = 5! = 120$

**b)** B __ __ __ __ L: $P_4 = 4! = 24$

**c)** Começam por **B**:

B __ __ __ __ __: $P_5 = 120$

Terminam por **L**:

__ __ __ __ __ L: $P_5 = 120$

Começam por **B** e terminam por **L**:

B __ __ __ __ L : $P_4 = 24$

O número de anagramas que começam por **B** ou terminam por **L** é: $120 + 120 - 24 = 216$

**45.** Para cada elemento de **A** há 4 opções de "ligação": **p**, **q**, **r**, **s**.

Temos, portanto: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ (256 funções)

**46.** $\underset{\text{presidente}}{10} \cdot \underset{\text{vice}}{9} = 90$ ou $A_{10,\,2} = \frac{10!}{8!} = 90$

**47. a)** $\underbrace{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}_{\text{letras}} \cdot \underbrace{10 \cdot 9}_{\text{algarismos}}$

$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 9 = 32\,292\,000$

ou $A_{26,\,4} \cdot A_{10,\,2} = \frac{26!}{22!} \cdot \frac{10!}{8!} = 32\,292\,000$

**b)** $\overbrace{A_{21,\,4}}^{\text{consoantes}} \cdot \overbrace{A_{4,\,2}}^{\text{algarismos}}$

$143\,640 \cdot 12 = 1\,723\,680$

**48. a)** $10 \cdot 9 \cdot 8$ ou $A_{10,\,3} = \frac{10!}{7!} = 720$

**b)** $\underset{\text{Natal}}{1} \cdot \underset{2^{\circ}}{9} \cdot \underset{3^{\circ}}{8} = 9 \cdot 8 = 72$ ou $A_{9,\,2} = \frac{9!}{7!} = 72$

**c)** $9 \cdot 8 \cdot 7 = 72 \cdot 7 = 504$ ou $A_{9,\,3} = \frac{9!}{6!} = 504$

**49.** Como **A** e **B** se enfrentam duas vezes, isto é, $\underbrace{(A, B)}_{\text{campo de A}} \neq \underbrace{(B, A)}_{\text{campo de B}}$, o número total de jogos é:

$A_{15,\,2} = \frac{15!}{13!} = 15 \cdot 14 = 210$

A final ocorrerá em 2 jogos, totalizando 212 jogos.

**50.** Financeiro: 2 opções

Presidente: 7 opções (exclui-se o escolhido para diretor financeiro)

Vice: 6 opções

Total: $2 \cdot 7 \cdot 6 = 84$

**51.** 1ª parte: $P_3 = 3! = 6$ (6 opções distintas de respostas)

2ª parte: $A_{7,\,2} = \frac{7!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$ (42 opções distintas de respostas)

Total: $6 \cdot 42 = 252$ (252 maneiras distintas)

**52. a)** $A_{8,\,3} = \frac{8!}{5!} = 336$ ou $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

**b)** $A_{5,\,3} = \frac{5!}{2!} = 60$ ou $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

**c)** Vamos supor que o nadador brasileiro receba medalha de ouro. Para distribuir as duas outras medalhas existem 42 opções ($A_{7,\,2} = 7 \cdot 6 = 42$). Como o nadador brasileiro pode receber também a medalha de prata ou de bronze, o resultado pedido é $3 \cdot 42 = 126$.

**d)** Podemos ter:
- 1º e 2º colocados europeus e 3º colocado norte-americano:

$\underset{1^{\circ}}{5} \cdot \underset{2^{\circ}}{4} \cdot \underset{3^{\circ}}{2} = 40$

ou

- 1º e 3º colocados europeus e 2º colocado norte-americano:

$5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$ (1º, 2º, 3º)

ou

- 1º colocado norte-americano e 2º, 3º colocados europeus:

$2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ (1º, 2º, 3º)

ou

- 3 primeiros colocados europeus:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (1º, 2º, 3º)

Ao todo, há 180 possibilidades (40 + 40 + 40 + 60 = = 180).

**53.** Vamos separar em dois casos:

1º caso: a vaga do futebol será preenchida por um dos dois garotos que só jogam futebol.

Temos: $\underbrace{2}_{\text{futebol}} \cdot \underbrace{A_{8,\,2}}_{\text{vôlei e basquete}} = 2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$

2º caso: a vaga do futebol será preenchida por um dos 8 atletas que jogam os três esportes.

Temos: $\underbrace{8}_{\text{futebol}} \cdot \underbrace{A_{7,\,2}}_{\text{vôlei e basquete}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

O resultado procurado é 112 + 336 = 448.

**54. a)** Para fixar ideias, imagine que o colega **X** tenha de fazer todas as possíveis escolhas de um "batedor" e outro "defensor" entre seus 5 amigos. O número de opções dele é $A_{5,\,2} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ (20 pares ordenados de forma (B, D) em que **B** é "batedor" e **D** é "defensor"). Para os demais colegas, o raciocínio é análogo, totalizando 120 cobranças ($6 \cdot 20 = 120$).

**b)** $A_{6,\,2} = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$ (30 cobranças).

**55. a)** Trata-se de escolher, ordenadamente, dois entre os 11 lugares disponíveis (observe que $\boxed{A}\boxed{B} \neq \boxed{B}\boxed{A}$, isto é, há duas maneiras distintas de as pessoas se acomodarem em duas determinadas poltronas).

Temos: $11 \cdot 10 = A_{11,\,2} = 110$ (110 possibilidades)

**b)** Há apenas 3 pares de poltronas em que um ficará ao lado do outro. Levando-se em conta que, para cada par, eles poderão trocar de lugar entre si, temos: $3 \cdot 2 = 6$ (6 possibilidades)

**c)** Há dois casos:

- Eles sentam na fileira "mais abaixo":
$5 \cdot 4 = A_{5,\,2} = 20$ (20 maneiras)
- Eles sentam na fileira "mais acima":
$6 \cdot 5 = A_{6,\,2} = 30$ (30 maneiras)

Assim, ao todo, existem 50 opções distintas.

**56. a)** $A_{26,\,3} \cdot A_{26,\,2} = \frac{26!}{23!} \cdot \frac{26!}{24!} = 10\,140\,000$

**b)** Da caixa **A** devem ser retirados, em qualquer ordem, o ás de ouros, o ás de paus e um rei (ouros ou paus). O número de possibilidades é

$\underbrace{2}_{\text{são 2 reis possíveis}} \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{número de ordens}} = 12$

Da caixa **B** devem ser retirados o ás de espadas e o de copas, num total de $2 \cdot 1$, ou seja, 2 possibilidades (ordens).

O número de sequências pedido é $12 \cdot 2 = 24$.

**c)** Caixa **A**: ás de ouros + ás de paus + carta qualquer. Temos:

$\underbrace{24}_{\text{número de cartas}} \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{número de ordens}} = 144$

Caixa **B**: ás de espadas + ás de copas. Temos 2 possibilidades (ordens).

O total é $144 \cdot 2 = 288$

**57.** $C_{9,\,4} = \frac{9!}{4!\,5!} = 126$

**58. a)** Trata-se de escolher, sem importar a ordem, 3 dentre os 5 cursos; $C_{5,\,3} = 10$

Sem fórmula:

$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 60$ (60 escolhas "ordenadas");

$\frac{60}{P_3} = \frac{60}{3!} = 10$ (10 escolhas "não ordenadas").

**b)** Trata-se de escolher 2 entre os 4 cursos que restaram:

$C_{4,\,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$ ou $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

**59.** Igual. Veja:

- número de duplas: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (ou $C_{6,\,2}$)
- número de quartetos: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} = 15$ (ou $C_{6,\,4}$)

Comparando a quantidade de duplas e trios, temos:

- quantidade de duplas: 15
- quantidade de trios: $C_{6,\,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$

Assim, a quantidade de duplas é menor que a de trios.

**60. a)** Sem fórmula: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$

ou $C_{10,\,3} = \binom{10}{3} = 120$

**b)** Sem fórmula: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252$ ou

$C_{10,\,5} = \binom{10}{5} = 252$

**c)** O número de segmentos que podem ser formados com extremidades em dois desses dez pontos é $C_{10,\,2} = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Desses 45 segmentos, devemos excluir 10, que representam os lados do decágono.

Assim, a diferença $45 - 10 = 35$ fornece o número de diagonais do decágono.

**61.** Médicos: $\binom{10}{4} = \dfrac{10!}{4!\,6!} = \dfrac{5040}{24} = 210$

Para cada um dos 210 grupos de médicos, o número de equipes de enfermeiros que podem ser formadas é: $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{2!\,4!} = 15$. Totalizando 3150 juntas médicas ($210 \cdot 15 = 3150$).

**62.** Vamos resolver de dois modos diferentes.

1º modo:

- 1 estrangeiro e 4 brasileiros: $3 \cdot C_{7,4} = 3 \cdot \dfrac{7!}{4!\,3!} = 105$
- 2 estrangeiros e 3 brasileiros: $C_{3,2} \cdot C_{7,3} = 3 \cdot 35 = 105$
- 3 estrangeiros e 2 brasileiros: $1 \cdot C_{7,2} = 21$

O número total de maneiras de escolher os cincos pesquisadores é $105 + 105 + 21 = 231$.

2º modo:

- Número total de grupos de 5 pesquisadores quaisquer: $C_{10,5} = 252$
- Número de grupos formados só por brasileiros: $C_{7,5} = 21$

A diferença $252 - 21 = 231$ fornece os casos em que há pelo menos um estrangeiro.

**63.** a) $\binom{52}{4} = \dfrac{52!}{4!\,48!} = 270725$

b) Devemos escolher 4 dentre as 13 cartas de copas que o baralho possui. Temos:

$C_{13,4} = \binom{13}{4} = 715$ (715 opções)

c) 1 modo apenas, pois há, ao todo, 4 ases.

**64.** a) Para escolher o rei, temos 4 possibilidades; para cada uma dessas opções, existem 4 maneiras de se escolher a rainha, totalizando 16 opções ($4 \cdot 4 = 16$).

b) $C_{13,2} = \dfrac{13!}{2!\,11!} = \dfrac{13 \cdot 12}{2} = 78$

c) Para escolher a carta de copas, há 13 opções; para cada uma dessas opções, existem 13 opções de escolha de carta de ouros, totalizando $13 \cdot 13 = 169$.

d) Há 4 ases no baralho, dos quais 2 devem ser escolhidos. O número de possibilidades é: $\dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (ou $C_{4,2} = 6$)

e) Vamos imaginar, para fixar ideias, que sejam escolhidas uma carta de ouros e outra de paus.

$$\underset{\text{ouro}}{13} \cdot \underset{\text{paus}}{13} = 169 \text{ (169 pares de cartas)}$$

Agora, é preciso saber de quantas formas os dois naipes podem ser escolhidos: há $C_{4,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ opções (ouros e paus; ouros e espadas; ouros e copas; paus e espadas; paus e copas; copas e espadas).

Assim, o resultado pedido é $169 \cdot 6 = 1014$.

**65.** a) $\underbrace{C_{13,3}}_{\text{3 cartas de paus}} \cdot \underbrace{C_{13,2}}_{\text{2 cartas de espadas}} = 286 \cdot 78 = 22308$

b) $C_{51,4}$, pois devemos escolher 4 cartas entre as 51 restantes: $C_{51,4} = 249900$

c) Para escolher os 2 valetes, há $C_{4,2} = 6$ opções; para cada uma das possibilidades anteriores, devemos escolher 3 cartas entre as 48 que não são valetes. Isso pode ser feito de 17296 modos distintos ($C_{48,3} = 17296$). A resposta procurada é, portanto, $6 \cdot 17296 = 103776$.

d) Podemos ter três ou quatro valetes.

- Com 3 valetes há $\underset{\text{escolha dos valetes}}{C_{4,3}} \cdot \underset{\text{escolha das outras cartas}}{C_{48,2}} = 4 \cdot 1128 = 4512$
- Com 4 valetes há 48 opções ($1 \cdot 48 = 48$). O quarteto de valetes pode aparecer com qualquer uma das outras 48 cartas.

Ao todo, existem 4560 opções ($4512 + 48 = 4560$).

**66.** a) $C_{9,3} = \dfrac{9!}{3!\,6!} = 84$

b) Resta escolher 2 entre as outras capitais; temos 28 possibilidades ($C_{8,2} = 28$).

c) Incluindo Fortaleza e São Luís, há 7 opções distintas. Sem visitar essas capitais, o número de possibilidades é $C_{7,3} = 35$.

A resposta procurada é, portanto, $7 + 35 = 42$.

**67.** Pães: $C_{4,2} = 6$ opções

Queijo: 3 opções

Frutas: $C_{3,2} = 3$ opções

Geleia: $C_{5,2} = 10$ opções

Torta doce: 4 opções

O resultado procurado é: $6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 4 = 2160$

**68.** a) 1º modo: os triângulos construídos podem ter:

2 vértices em **r** e 1 vértice em **s**:

$C_{5,2} \cdot 4 = 40$

ou

1 vértice em **r** e 2 vértices em **s**:

$5 \cdot C_{4,2} = 30$

Totalizando 70 triângulos ($40 + 30 = 70$)

2º modo: do total de combinações possíveis, excluímos aquelas que não determinam triângulos, quando os 3 pontos escolhidos estão alinhados.

Temos, então: $C_{9,3} - \underbrace{C_{5,3}}_{\text{3 pontos em r}} - \underbrace{C_{4,3}}_{\text{3 pontos em s}} = 84 - 10 - 4 = 70$ (70 triângulos)

b) É preciso escolher, sem importar a ordem, 2 pontos em **r** e 2 pontos em **s**. Isso pode ser feito de:

$\left(\dfrac{5 \cdot 4}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{4 \cdot 3}{2}\right)$ maneiras, isto é, 60 maneiras distintas.

$$C_{5,2} \cdot C_{4,2}$$

**69.** • Possibilidades para escolher os jogos de cama:

$\binom{7}{2} = 21;$

• Possibilidades para escolher os jogos de banho:

$\binom{8}{4} = 70$ possibilidades;

• Possibilidades para escolher os jogos de mesa:

$\binom{n}{2}$ possibilidades.

Assim,

$$21 \cdot 70 \cdot \binom{n}{2} = 66\,150 \Rightarrow \binom{n}{2} = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = 45 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \xRightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 10$$

**70. a)** Cada um dá 49 apertos de mão; como são 50 pessoas na reunião, haveria $49 \cdot 50$ saudações. De acordo com esse raciocínio, cada aperto de mão foi contado duas vezes; o resultado é, portanto, $\frac{50 \cdot 49}{2} = C_{50,\,2} = 1225$.

**b)** $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = C_{n,\,2} = \binom{n}{2}$

**c)** $\frac{n(n-1)}{2} = 741 \Rightarrow n^2 - n - 1\,482 = 0 \overset{n>0}{\Rightarrow} n = 39$

**71.** • O número de maneiras de premiar dois entre os cinco é $C_{5,\,2} = 10$, a saber: {A, B}, {A, C}, {A, D}, {A, E}, {B, C}, {B, D}, {B, E}, {C, D}, {C, E} e {D, E}.

• Cada medalha distribuída a cada um dos dois premiados pode ser ouro, prata ou bronze, totalizando 9 possibilidades ($3 \cdot 3 = 9$), a saber: (ouro, ouro), (ouro, prata), (ouro, bronze), (prata, ouro), (prata, prata), (prata, bronze), (bronze, ouro), (bronze, prata) e (bronze, bronze).

Pelo PFC, o resultado é $10 \cdot 9 = 90$.

Alternativa *d*.

**72.**

| presidente | | vice | | tesoureiro | | conselheiros | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ | |
| 14 | · | 13 | · | 12 | · | $C_{11,\,4}$ | = |

$\underbrace{14 \cdot 13 \cdot 12}_{A_{14,\,3}}$

$= 2\,184 \cdot 330 = 720\,720$

**73.** Com números diferentes, a quantidade de peças é: $C_{7,\,2} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ (observe que [• | ••] é igual a [•• | •]).

Com números iguais, são mais 7 peças: [ | ], [• | •], [•• | ••], etc.

Assim, o jogo de dominó tem 28 peças ($21 + 7 = 28$).

**74. a)** Trata-se de saber a quantidade de "grupos" de seis salas entre as 45 existentes.

$$C_{45,\,6} = \frac{45!}{6!\,39!} = 8\,145\,060$$

**b)** Podemos ter: 1º e 2º andares; 1º e 3º andares; ....; 14º e 15º andares.

Trata-se de escolher, sem importar a ordem, dois dos quinze andares: $C_{15,\,2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$.

**c)** Observe um certo andar com duas salas acesas. Podemos ter:

| | | |
|---|---|---|
| x | x | |
| x | | x |
| | x | x |

"x" significa sala acesa

Vamos determinar, inicialmente, a quantidade de "grupos" formados por três dentre os quinze andares:

$C_{15,\,3} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{6} = 455$ (455 possibilidades)

Cada possibilidade é um subconjunto de 3 andares, por exemplo, 1º, 2º e 3º andares. Cada um desses andares apresenta 3 possibilidades de ter duas salas acesas (veja acima).

Assim, o total procurado é $455 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 12\,285$.

**75.** • Maneiras distintas que a escolha dos produtos pode ser feita: $\binom{15}{10}$

• Maneiras distintas que o produto $\mathbf{P_1}$ pode ser comprado dos fornecedores: $\binom{5}{2} = 10$

• Maneiras distintas que o produto produto $\mathbf{P_2}$ pode ser comprado: $\binom{5}{2} = 10$

E assim por diante, até o produto $\mathbf{P_{10}}$.

Pelo princípio multiplicativo, o resultado é:

$$\binom{15}{10} \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot ... \cdot 10}_{10 \text{ fatores}} = 10^{10} \cdot \binom{15}{10}$$

**76.** Temos as seguintes opções de compra:

• 5 livros de R$ 10,00 cada: $C_{10,\,5} = 252$ (252 possibilidades)

• 2 livros de R$ 15,00 cada e 2 livros de R$ 10,00 cada: $C_{20,\,2} \cdot C_{10,\,2} = 190 \cdot 45 = 8\,550$ (8 550 possibilidades)

• 2 livros de R$ 15,00 cada e 1 livro de R$ 20,00: $C_{20,\,2} \cdot 15 = 190 \cdot 15 = 2\,850$ (2 850 possibilidades)

• 3 livros de R$ 10,00 cada e 1 livro de R$ 20,00: $C_{10,\,3} \cdot 15 = 120 \cdot 15 = 1\,800$ (1 800 possibilidades)

• 1 livro de R$ 10,00 e 2 livros de R$ 20,00 cada: $10 \cdot C_{15,\,2} = 10 \cdot 105 = 1\,050$ (1 050 possibilidades)

Reunindo as opções de escolha dos livros, segue a resposta:

$252 + 8\,550 + 2\,850 + 1\,800 + 1\,050 = 14\,502$

**77. a)** $P_7^{(2)} = \frac{7!}{2!} = 2\,520$

**b)** $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$

**c)** $P_4^{(2)} = \frac{4!}{2!} = 12$

**d)** $P_6^{(3)} = \dfrac{6!}{3!} = 120$

**e)** $P_8^{(3)} = \dfrac{8!}{3!} = 6720$

**f)** $P_{10}^{(2,\,2,\,3)} = \dfrac{10!}{2!\,2!\,3!} = 151\,200$

**g)** $P_9^{(3,\,2)} = \dfrac{9!}{3!\,2!} = 30\,240$

**h)** $P_{10}^{(2,\,4)} = \dfrac{10!}{2!\,4!} = 75\,600$

**i)** $P_{13}^{(2,\,2,\,2,\,2)} = \dfrac{13!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 389\,188\,800$

**78. a)** 1 única possibilidade.

**b)** $P_4^{(3)} = \dfrac{4!}{3!} = 4$, a saber: 2224; 2242; 2422; 4222

**c)** $P_4^{(2)} = \dfrac{4!}{2!} = 12$

**79.** $P_{10}^{(3,\,2,\,4)} = \dfrac{10!}{3!\,2!\,4!} = 12\,600$

**80. a)** $P_9^{(3,\,2,\,2)} = \dfrac{9!}{3!\,2!\,2!} = 15\,120$

**b)** $P_8^{(2,\,2,\,2)} = \dfrac{8!}{2!\,2!\,2!} = 5040$

**c)** Número de anagramas que começam por **I**:

I __ __ __ __ __ __ __ __

P R R A A A I T ← em qualquer ordem.

$P_8^{(2,\,3)} = \dfrac{8!}{2!\,3!} = 3360$

No item *b*, calculamos o número de anagramas que começam por **A**.

Juntando os dois casos, temos: 8400 anagramas (3360 + 5040 = 8400) que começam por vogal.

**d)** É preciso analisar 4 casos:

I __ __ __ __ __ __ __ I →
(3A, 2R, 1P, 1T)

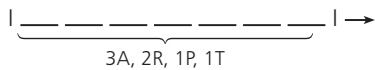
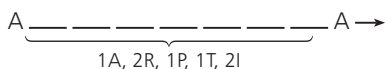
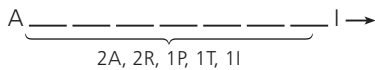
$P_7^{(3,\,2)} = \dfrac{7!}{3!\,2!} = 420$

A __ __ __ __ __ __ __ A →
(1A, 2R, 1P, 1T, 2I)

→ $P_7^{(2,\,2)} = \dfrac{7!}{2!\,2!} = 1260$

I __ __ __ __ __ __ __ A →
(1A, 2R, 1P, 1T, 1I)

→ $P_7^{(2,\,2)} = \dfrac{7!}{2!\,2!} = 1260$

A __ __ __ __ __ __ __ I →
(2A, 2R, 1P, 1T, 1I)

→ $P_7^{(2,2)} = \dfrac{7!}{2!\,2!} = 1260$

O número de anagramas possíveis é: $420 + 3 \cdot 1260 = 4200$

**81.** Total de letras: $n + 2$

$P_{n+2}^{(2,\,n)} = 21 \Rightarrow \dfrac{(n+2)!}{2!\,n!} = 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+2)(n+1) = 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + 3n - 40 = 0 \Rightarrow n = 5$

**82. a)** Há 5 casos a considerar:

1ª) soma 7: 15 sequências
$$\begin{cases} (1, 2, 4) \Rightarrow P_3 = 6 \\ (1, 3, 3) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \\ (1, 5, 1) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \\ (2, 2, 3) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \end{cases}$$

2ª) soma 6: 10 sequências
$$\begin{cases} (1, 1, 4) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \\ (1, 2, 3) \Rightarrow P_3 = 3! = 6 \\ (2, 2, 2) \Rightarrow 1 \end{cases}$$

3ª) soma 5: 6 sequências
$$\begin{cases} (1, 1, 3) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \\ (1, 2, 2) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \end{cases}$$

4ª) soma 4: $(1, 1, 2) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3$

5ª) soma 3: $(1, 1, 1) \Rightarrow 1$

O total é:

$15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$

**b)** Soma 14:
$$\begin{cases} (4, 4, 6) \Rightarrow P_3^{(2)} = \dfrac{3!}{2!} = 3 \text{ (3 sequências)} \\ (4, 5, 5) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \text{ (3 sequências)} \\ (5, 6, 3) \Rightarrow P_3 = 3! = 6 \text{ (6 sequências)} \\ (6, 6, 2) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \text{ (3 sequências)} \end{cases}$$

Soma 15:
$$\begin{cases} (5, 5, 5) \Rightarrow 1 \text{ sequência} \\ (5, 6, 4) \Rightarrow P_3 = 3! = 6 \text{ (6 sequências)} \\ (6, 6, 3) \Rightarrow P_3^{(2)} = \dfrac{3!}{2!} = 3 \text{ (3 sequências)} \end{cases}$$

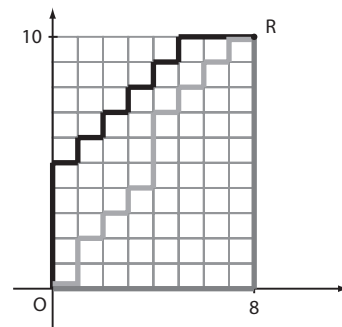
Soma 16:
$$\begin{cases} (6, 6, 4) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \text{ (3 sequências)} \\ (5, 6, 5) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3 \text{ (3 sequências)} \end{cases}$$

Soma 17: $(6, 6, 5) \Rightarrow P_3^{(2)} = 3$ (3 sequências)

Soma 18: $(6, 6, 6) \Rightarrow 1$ sequência

Assim, temos 35 possibilidades ($15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$).

**83.** Sejam **E**: esquerda e **B**: baixo

Observe alguns caminhos possíveis de **R** a **O**.

(E, B, E, B, E, B, E, B, B, B, E, B, E, B, E, B, B, E)
(B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, E, E, E, E, E, E, E, E)
(E, E, E, B, E, B, E, B, E, B, E, B, E, E, E, E, E, E)
⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Cada caminho é uma sequência de 18 letras, das quais 10 são **B** e 8 são **E**. Um caminho difere dos demais pela ordem em que essas 18 letras aparecem.

O total de caminhos é:

$P_{18}^{(10,\,8)} = \dfrac{18!}{10!\,8!} = 43\,758$

## Desafio

Se todos os professores devem fazer ao menos uma apresentação, podemos ter:

1º caso: O professor $P_1$ faz 2 apresentações, o professor $P_2$ faz uma e o professor $P_3$ faz uma.

Temos:

- número de apresentações para $P_1$: $\binom{4}{2} = 6$;
- definidas as apresentações para $P_1$, para $P_2$ há 2 opções e para $P_3$ uma única, totalizando:

$6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ (12 possibilidades)

2º caso: $P_2$ faz duas, $P_1$ faz uma e $P_3$ faz uma.

Analogamente ao 1º caso, temos 12 possibilidades.

3º caso: $P_3$ faz duas, $P_1$ faz uma e $P_2$ faz uma: temos também 12 possibilidades.

Reunindo os três casos, encontramos 36 possibilidades ($3 \cdot 12 = 36$).

# Probabilidade

## Exercícios

**1.** **a)** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**b)** $E_1 = \{3, 6\}$

**c)** $E_2 = \{1, 4, 6\}$

**2.** $\Omega$ = {Sul, Sudeste, Centro-Oeste, Norte, Nordeste}

**3.** Sendo **K** cara e **C** coroa, temos:

**a)** $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$

**b)** $E = \{(K, K), (K, C), (C, K)\}$

**4.** **a)** $E = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ ($1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, ..., $64 = 2^6$)

**b)** Como $\Omega$ tem 100 elementos e **E** tem 7 elementos, o número de elementos de $\overline{E}$ é $100 - 7 = 93$.

**5.** **a)** $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$ (36 sequências)

**b)** $E_1 = \{(3, 1), (3, 2), ..., (3, 6)\}$; $n(E_1) = 6$.

**c)** Lembremos que um produto de dois naturais é ímpar quando ambos forem ímpares:

$\underset{\uparrow \text{ 1,3 ou 5}}{3} \cdot \underset{\uparrow \text{ 1,3 ou 5}}{3} = 9$; $n(E_2) = 9$

**d)** $E_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\}$; $n(E_3) = 15$.

**6.** $\overline{E} = \{\underbrace{(4, 6), (6, 4), (5, 5)}_{\text{soma 10}}, \underbrace{(5, 6), (6, 5)}_{\text{soma 11}}, \underbrace{(6, 6)}_{\text{soma 12}}\}$

**7.** Os elementos de **E** são sequências de três números em que podem ocorrer: 2 números iguais e 1 diferente ou 3 números diferentes. Observe que só não "interessam" sequências nas quais os 3 números são iguais. Assim, $\overline{E} = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$

**8.** **a)** 32 opções distintas

**b)** $\binom{32}{2} = \frac{32!}{2!\,30!} = 496$

**c)** $\binom{32}{3} = \frac{32!}{3!\,29!} = 4\,960$

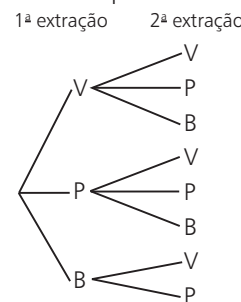
**9.** Para escolher o rapaz, há 17 opções; para cada rapaz escolhido, a moça poderá ser escolhida de 15 maneiras distintas, totalizando 255 possibilidades ($17 \cdot 15 = 255$).

$n(E) = 255$

**10.** $\Omega = \{(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6), (C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)\}$

Observe que $n(\Omega) = \underset{\uparrow \text{ moeda}}{2} \cdot \underset{\uparrow \text{ dado}}{6} = 12$

**11.** Sejam **V** vermelho, **P** preto e **B** branca.

Podemos construir um diagrama de árvore para representar as possibilidades:

As sequências são: (V, V), (V, P), (V, B), (P, V), (P, P), (P, B), (B, V) e (B, P).

**12.** Se a segunda extração é feita com reposição da 1ª bola retirada, temos a inclusão da sequência (B, B) em relação às possibilidades do exercício anterior e assim:

$\Omega = \{(V, V), (V, P), (V, B), (P, V), (P, P), (P, B), (B, V), (B, P), (B, B)\}$

**13.** $\Omega = \{1, 2, ..., 100\}$

**a)** $E = \{18\}$; $p(E) = \frac{1}{100} = 1\%$

**b)** $E = \{57\}$; $p(E) = \frac{1}{100}$

**c)** $E = \{64, 65, 66, ..., 100\}$

$n(E) = 37$; $p(E) = \frac{37}{100} = 37\%$

**d)** $E = \{10, 11, ..., 99\}$

$n(E) = 90$; $p(E) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} = 90\%$

**e)** $E = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

$p(E) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 10\%$

**14.** $\Omega = \{a, e, i, o, u, b, c, d, f, g\}$

**a)** $E = \{e\}$; $p(E) = \frac{1}{10}$

**b)** $E = \{c\}$; $p(E) = \frac{1}{10}$

**c)** $E = \varnothing$; $p(E) = 0$

**d)** $E = \{b, c, d, f, g\}$; $p(E) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

**15.** $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$

**a)** $E = \{\underbrace{(1, 2), (1, 3), ..., (1, 6)}_{\text{1 só no 1º lançamento}}; \underbrace{(2, 1); (3, 1); ...; (6, 1)}_{\text{1 só no 2º lançamento}}; \underbrace{(1, 1)}_{\text{1 em ambos}}\}$

$p(E) = \frac{11}{36}$

**b)** $E = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

$p(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

**c)** $E = \{(1, 1), (2, 2) ..., (6, 6)\}$

$p(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \Rightarrow p(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

**d)** $E = \{\underbrace{(1, 4), (2, 5), (4, 1), (5, 2), (3, 6), (6, 3)}_{\text{diferença igual a 3}},$

$\underbrace{(1, 5), (5, 1), (2, 6), (6, 2)}_{\text{diferença igual a 4}}, \underbrace{(1, 6), (6, 1)}_{\text{diferença igual a 5}}\}$

$n(E) = 12; p(E) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

**16.** Das 5 regiões mencionadas no estudo, Centro-Oeste, Norte e Nordeste possuíam menos de 50% de domicílios com computador e a probabilidade pedida é $\frac{3}{5} = 60\%$.

**17.** $n(\Omega) = 52$

**a)** $E = \{7 \text{ copas}\}; p(E) = \frac{1}{52}$

**b)** Há 13 cartas de ouros no baralho; a probabilidade pedida é $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

**c)** 51 cartas do baralho não são o "valete de espadas", e a probabilidade é $\frac{51}{52}$.

**d)** Sobram 13 cartas de espadas e 13 cartas de paus, totalizando 26 casos favoráveis; $p = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

**18. a)** $a = 94 - (55 + 17) = 22$

$e = a + 49 = 22 + 49 = 71$

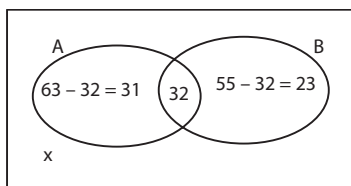
$c = 200 - 94 = 106$

$b + 49 + 26 = 106 \Rightarrow b = 31$

$d = 17 + b = 17 + 31 = 48$

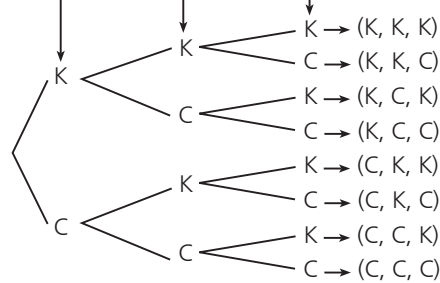
**b)** Há 31 mulheres que não consomem carne; $p = \frac{31}{200}$.

**c)** $\frac{81}{200}$

**19.** Imaginando um universo com 100 pessoas, temos:

$x = 100 - (31 + 32 + 23) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 14; \frac{14}{100} = 14\%$

**20.** $p = \frac{9}{20} = 0,45$

**21.**

$n(\Omega) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$E = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K)\}$

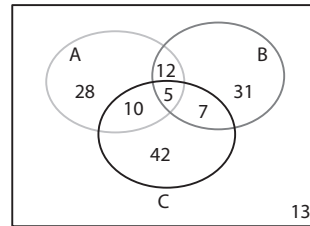
$p(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 50\%$

**22.** Podemos ter:

78 ___ ou ___ 78

(10 opções) (10 opções)

$n(\Omega) = 20; E = \{178\}; p(E) = \frac{1}{20} = 5\%$

**23.** Observemos o diagrama:

O número de alunos que fizeram a prova foi:

$28 + 31 + 42 + 12 + 10 + 7 + 5 + 13 = 148$

**a)** O número de alunos que acertaram pelo menos duas questões foi $12 + 5 + 7 + 10 = 34$. A probabilidade pedida é, então, $\frac{34}{148} = \frac{17}{74}$.

**b)** O número de alunos que acertaram exatamente uma questão é $(28 + 31 + 42 = 101)$, e a probabilidade é $\frac{101}{148}$.

**24.** Seja **x** o número total de funcionários;

+5 anos: $0,4 \cdot x$ → $0,6 \cdot 0,4x = 0,24x$ → homens; $0,4 \cdot 0,4x = 0,16x$ → mulheres

−5 anos: $0,6 \cdot x$

$p = \frac{0,16x}{x} = 0,16 = 16\%$

**25.** $p(C) = 4 \cdot p(k)$

Como $p(C) + p(k) = 1$, então: $4p(k) + p(k) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(k) = \frac{1}{5} = 20\%$ e $p(C) = \frac{4}{5} = 80\%$

**26.** De cada 5 lançamentos, dois resultam faces ímpares e três pares.

**a)** $p(\text{ímpar}) = \frac{2}{5}$

$p(1) = p(3) = p(5) = \frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{15}$

**b)** $p(\text{par}) = \frac{3}{5}$

$p(2) = p(4) = p(6) = \frac{3}{5} : 3 = \frac{1}{5}$

**27.** 1º modo:
Devemos ter $\Delta \geqslant 0$, ou seja:
$9 - 4 \cdot 1 \cdot c \geqslant 0 \Rightarrow -4c \geqslant -9 \Rightarrow$
$\Rightarrow c \leqslant \frac{9}{4} \Rightarrow c \leqslant 2{,}25$
As possibilidades são $-1$, 0, 1 ou 2.
$p = \frac{4}{5} = 0{,}80 = 80\%$
2º modo:
É possível fazer por tentativas, substituindo, em cada caso, o valor de c e calculando o discriminante ($\Delta$).

**28. a)** Se $a - 2 \neq 0$, isto é, $a \neq 2$, temos que $x = \frac{4}{a-2}$ é solução única.
Nesse caso, $E = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $p(E) = \frac{9}{10}$.
**b)** Se $a - 2 = 0$, isto é, $a = 2$, temos $0 \cdot x = 4 \Rightarrow \nexists x$ que satisfaça.
Logo, $E = \{2\}$ e $p(E) = \frac{1}{10}$.
**c)** $E = \{0, 1, 3, 4, 6\}$; $p(E) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

**29.** $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 100\}$
$\log_3 m$ resultará em um número inteiro quando **m** for uma potência de base 3, a saber:
$$\left.\begin{array}{l} m = 3^0 = 1 \text{ (pois } \log_3 1 = 0) \\ m = 3^1 = 3 \text{ (pois } \log_3 3 = 1) \\ m = 3^2 = 9 \text{ (pois } \log_3 9 = 2) \\ m = 3^3 = 27 \text{ (pois } \log_3 27 = 3) \\ m = 3^4 = 81 \text{ (pois } \log_3 81 = 4) \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{5}{100} = 5\%$$

**30.** O número total de bolas é: $x + 3x + 3 = 4x + 3$, das quais 3x são pretas.
Devemos ter: $\frac{3x}{4x+3} > 0{,}7$
Como $4x + 3 > 0$, pois **x** é inteiro positivo, podemos multiplicar os dois membros por $4x + 3$:
$(4x + 3) \cdot \frac{3x}{4x+3} > (4x + 3) \cdot 0{,}7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x > 2{,}8x + 2{,}1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}2x > 2{,}1 \Rightarrow x > 10{,}5$
O menor valor inteiro de **x** que serve é $x = 11$.

**31.**
- A área do terreno é $(500 \text{ m}) \cdot (300 \text{ m}) = 150\,000 \text{ m}^2$;
- O diâmetro da base do reservatório de água mede $500 \text{ m} - (250 \text{ m} + 100 \text{ m}) = 150 \text{ m}$;
  a área da base do reservatório de água é $\pi \cdot (75 \text{ m})^2 \simeq$
  $\simeq 3 \cdot 5625 \text{ m}^2 = 16\,875 \text{ m}^2$

Assim, a probabilidade de o tesouro ter sido escondido abaixo da região limitada pelo reservatório de água é $\frac{16\,875}{150\,000} = \frac{9}{80}$, e a probabilidade de o tesouro não ter sido escondido abaixo do lago é
$1 - \frac{9}{80} = \frac{71}{80} = 0{,}8875 = 88{,}75\%$.

**32.** $n(\Omega) = P_4 = 4! = 24$; um desses anagramas é ROMA, e a probabilidade pedida é $\frac{1}{24}$.

**33.** $n(\Omega) = P_7 = 7! = 5\,040$
Começando e terminando por vogal:
$$\underline{3} \cdot \underbrace{_ \cdot _ \cdot _ \cdot _ \cdot _}_{P_5} \cdot \underline{2} = 6 \cdot 5!$$
$p = \frac{6 \cdot 5!}{7!} = \frac{6 \cdot 5!}{7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{1}{7}$

**34.** $n(\Omega) = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$
$n(E) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$
$p(E) = \frac{648}{900} = \frac{18}{25}$

**35. a)** Número total de palíndromos:
$$\underset{\neq 0}{\underline{9}} \cdot \underline{10} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{igual} \\ \text{ao 2º}}}{\underline{1}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{igual} \\ \text{ao 1º}}}{\underline{1}} = 90$$
Total de números de 4 algarismos:
$\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 9\,000$
$p = \frac{90}{9000} = \frac{1}{100} = 1\%$
**b)** Total de números de 5 algarismos:
$\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}$
Total de palíndromos: $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1}$
$p = \frac{9 \cdot 10^2}{9 \cdot 10^4} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 1\%$

**36. a)** São 12 múltiplos de 5 entre 1 e 60, assim:
$p = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$
**b)** Tirando 2 bolas múltiplas de 5:
$p = \frac{C_{12,\,2}}{C_{60,\,2}} = \frac{11}{295}$

**37. a)** $n(\Omega) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45$
$n(E) = \binom{5}{2} = 10$, pois devem ser escolhidas duas sedes entre as 5 cidades do Nordeste.
$p(E) = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$
**b)** $n(E) = \binom{7}{2}$, pois excluímos, entre as dez, as três cidades do Sudeste.
Daí: $p(E) = \frac{\binom{7}{2}}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

**38. a)** Número de senhas possíveis:
$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{algarismos}} \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{letras}} = 10^8$$
**b)** $\frac{1}{10^8} = 0{,}000001\%$
**c)** Número de senhas "favoráveis":
$$\underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{algarismos}} \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{letras}} = 120 \cdot 6 = 720$$
A probabilidade pedida é: $\frac{720}{10^8} = 0{,}00072\%$

**d)** Número de senhas "favoráveis":

$\underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}_{\text{algarismos}} \cdot \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}_{\text{letras}} = 21\,772\,800$

A probabilidade pedida é: $\frac{21\,772\,800}{10^8} \simeq$

$\simeq 0{,}2178 = 21{,}78\%$

**39. a)** $n(\Omega) = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ (45 grupos não ordenados de dois países)

$n(E) = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ (10 grupos não ordenados de países escolhidos entre: Rússia, Venezuela, Brasil, Chile e Grécia)

A probabilidade pedida é $\frac{10}{45} = \frac{2}{9}$.

**b)** Dos 10 países, 7 têm percentuais menores que 20% e 3 têm percentuais maiores que 20%.

Vamos resolver de dois modos diferentes.

1º modo: Podemos ter 1 ou os 2 países com percentual maior que 20%.

- Com 1 maior e 1 menor temos 21 casos ($3 \cdot 7 = 21$).
- Com os 2 maiores que 20% temos 3 casos ($C_{3,2} = 3$).

Ao todo, há 24 casos favoráveis e a probabilidade é:

$\frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

2º modo:

Seja **A** o evento em que ambos os países sorteados tenham percentual menor que 20%.

$p(A) = \frac{C_{7,2}}{45} = \frac{\frac{7 \cdot 6}{2}}{45} = \frac{7}{15}$

A probabilidade pedida é $1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$.

**40.** O número total de escolhas possíveis é $C_{9,2} = 36$.

**a)** Para escolher 2 pontos entre os 5 de **r**, podemos proceder de 10 maneiras distintas ($C_{5,2} = 10$), e a probabilidade é, então, $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

**b)** Podemos escolher 2 pontos entre os 4 de **s** de 6 maneiras distintas ($C_{4,2} = 6$), e a probabilidade é $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

**c)** A probabilidade é $\frac{5 \cdot 4}{36} = \frac{5}{9}$.

**41.** Podemos escolher 3 pontos quaisquer entre os 9 fornecidos de 84 maneiras distintas ($C_{9,3} = 84$); $n(\Omega) = 84$.

Será formado um triângulo se escolhermos:

$\underbrace{(2 \text{ pontos de } \mathbf{r} \text{ e } 1 \text{ ponto de } \mathbf{s})}_{C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 40}$

ou $\underbrace{(1 \text{ ponto de } \mathbf{r} \text{ e } 2 \text{ pontos de } \mathbf{s})}_{C_{5,1} \cdot C_{4,2} = 30}$

Logo, existem 70 maneiras distintas ($40 + 30 = 70$) de formarmos triângulo. A probabilidade em questão é $\frac{70}{84} = \frac{5}{6} \simeq 83{,}3\%$.

**42. a)** $n(\Omega) = \binom{52}{3} = \frac{52!}{3!\,49!} = 22\,100$;

Existem 22 100 "grupos" de 3 cartas, entre os quais apenas um é formado pelo dez de ouros, sete de copas e ás de paus. Assim, a probabilidade é $\frac{1}{22\,100}$.

**b)** Número de casos favoráveis: $\binom{51}{2} = 1\,275$, pois, se uma das cartas já está definida, resta escolher duas entre as outras 51.

$p = \frac{1275}{22\,100} = \frac{3}{52}$

**c)** O número de possibilidades de extrairmos 3 cartas de espadas é $\binom{13}{3} = 286$, e a probabilidade pedida é: $\frac{286}{22\,100} = \frac{11}{850}$.

**43.** $n(\Omega) = P_6 = 6! = 720$

**a)** [HHH] [MMM]

$\underbrace{P_2}_{\text{entre}} \cdot \underbrace{P_3 \cdot P_3}_{\text{dentro}} = 2! \cdot 3! \cdot 3! = 72$ (72 opções)

$p = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$

**b)** [$H_1M_1$] [$H_2M_2$] [$H_3M_3$]

$\underbrace{P_3}_{\text{entre}} \cdot \underbrace{P_2 \cdot P_2 \cdot P_2}_{\text{dentro}} = 6 \cdot 8 = 48$

$p = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$

**44.** $n(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

**a)** Devemos contar o número de sequências formadas por: 3, 3, 6.

Temos: $P_3^{(2)} = \frac{3!}{2!} = 3$ (3 sequências)

Logo, $p = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

**b)** Devemos contar o número de sequências formadas por 1, 2 e 3, que é igual a:

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ (ou $P_3 = 6$)

Logo, $p = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

**45.** $n(\Omega) = C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Das 10 possibilidades acima, 5 delas representam lados do pentágono. Assim, as outras $10 - 5 = 5$ representam diagonais.

A probabilidade pedida é $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\%$.

**46.** $n(\Omega) = 7 \cdot 7 = 49$ (7: valor de **x**; 7: valor de **y**)

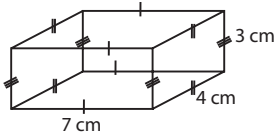
**a)** Observe que $M^t = \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & -3 \end{pmatrix}$;

Desse modo, $M = M^t$ se $x = y$, isto é, os dois números sorteados devem ser iguais. Há 7 casos favoráveis: $(-3, -3), (-2, -2), \ldots, (3, 3)$. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{7}{49} = \frac{1}{7}$.

**b)** $\det M = 2 \cdot (-3) - xy$
$\det M = -6 - xy;$
Vamos analisar os casos em que $\det M = 0$:
$-6 - x \cdot y = 0 \Rightarrow x \cdot y = -6$
Podemos ter:

| x | y |
|---|---|
| −3 | 2 |
| −2 | 3 |
| 2 | −3 |
| 3 | −2 |

Assim, das 49 possibilidades de escolha de **x** e **y**, $49 - 4 = 45$ não anulam o determinante.
Logo, $p = \frac{45}{49}$.

**47.** 


São 12 arestas ao todo: 4 medem 7 cm, 4 medem 4 cm e 4 medem 3 cm.
Podemos selecionar duas arestas ao acaso de 66 maneiras distintas $\left(\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66\right)$.
Desses 66 pares (subconjuntos de 2 arestas), $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ são formados por arestas que medem 7 cm cada uma; 6 que medem 4 cm cada uma e 6 que medem 3 cm cada uma.
Assim há 18 casos favoráveis ($3 \cdot 6 = 18$) e a probabilidade é $\frac{18}{66} = \frac{3}{11}$.

**48.** O número de maneiras distintas de se escolher 3 cartões é $\binom{6}{3} = 20$.
O participante não receberá prêmio algum se escolher 3 dentre os 4 cartões não premiados. Isso pode ocorrer de $\binom{4}{3} = 4$ maneiras distintas e a probabilidade pedida é $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

**49.** • O condomínio possui 180 apartamentos ($3 \cdot 15 \cdot 4 = 180$).
$n(\Omega) = \binom{180}{2} = \frac{180 \cdot 179}{2} = 16\,110$
• Vamos determinar n(E):
Para escolhermos dois apartamentos em um mesmo andar, de um certo bloco, temos 6 possibilidades $\left(\frac{4 \cdot 3}{2} = \binom{4}{2} = 6\right)$. Assim, neste bloco, teríamos 90 opções ($15 \cdot 6 = 90$).
Como são 3 blocos, segue que $n(E) = 3 \cdot 90 = 270$ e a probabilidade pedida é $\frac{270}{16\,110} \simeq 0{,}01676 = 1{,}67\%$.

**50.** **A**: múltiplo de 2; $A = \{2, 4, 6\}$
**B**: múltiplo de 3; $B = \{3, 6\}$
$A \cap B$: múltiplo de 2 e 3 ao mesmo tempo; $A \cap B = \{6\}$.
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

**51.** $p = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$
↑ sair um valete; ↑ sair uma carta de ouros; ↑ sair o valete de ouros

**52.** $\Omega = \{(1, 1), (1, 2) \ldots, (6, 6)\}$
$A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\}$; $p(A) = \frac{3}{36}$
$B = \Omega - \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\} \Rightarrow p(B) = \frac{30}{36}$
$A \cap B = \{(4, 6), (6, 4)\}$; $p(A \cap B) = \frac{2}{36}$
Daí, $p(A \cup B) = \frac{3}{36} + \frac{30}{36} - \frac{2}{36} = \frac{31}{36}$.

**53.** $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$
**a)** **A**: primo: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$
**B**: maior que 10: $\{11, 12, \ldots, 30\}$
$A \cap B = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$
$p(A \cup B) = \frac{10}{30} + \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$
**b)** **A**: múltiplo de 7: $A = \{7, 14, 21, 28\}$
**B**: múltiplo de 5: $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$
$A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$
**c)** **A**: quadrado perfeito; $A = \{1, 4, 9, 16, 25\}$
**B**: divisor de 36 e menor que 30; $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$
$A \cap B = \{1, 4, 9\}$
$p(A \cup B) = \frac{5}{30} + \frac{8}{30} - \frac{3}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

**54.** **a)** $A \cap B = \varnothing$; $p(A \cap B) = 0$
Daí, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) \Rightarrow 0{,}75 = 0{,}35 + p(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow p(B) = 0{,}4$
**b)** $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}75 = 0{,}29 + p(B) - 0{,}09 \Rightarrow p(B) = 0{,}55$

**55.** **a)** p = p(mulher) + p(sup. completo) − p(mulher e sup. completo)
$p = \frac{80}{120} + \frac{75}{120} - \frac{53}{120} \Rightarrow$
$\Rightarrow p = \frac{102}{120} = \frac{17}{20}$
**b)** $p = \frac{18}{120} = \frac{3}{20}$

**56.** **A**: chove 5 dias ou mais
$A = \{5, 6, 7, \ldots, 31\}$; $p(A) = 0{,}33$
**B**: chove 5 dias ou menos
$B = \{5, 4, 3, 2, 1, 0\}$; $p(B) = 0{,}81$
$A \cap B$: chove exatamente 5 dias; $A \cap B = \{5\}$
$A \cup B = \Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 31\}$ (evento certo)
Daí $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}00 = 0{,}33 + 0{,}81 - p(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow p(A \cap B) = 1{,}14 - 1{,}00 \Rightarrow$
$\Rightarrow p(A \cap B) = 0{,}14 = 14\%$

**57.** Com a informação dada, $\Omega' = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, (a, e, i: vogal, vogal, vogal)

e a probabilidade pedida é $\frac{3}{10} = 30\%$.

**58. a)** $\Omega' = \{(1, 1), (2, 2), ..., (6, 6)\}$
$E = \Omega'$ e $p(E) = 1 = 100\%$

**b)** $\Omega' = \Omega - \{(1, 1), (2, 2) ..., (6, 6)\}$; $n(\Omega') = 36 - 6 = 30$
**E**: soma dos pontos é 8:
$E = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3)\} \subset \Omega'$
$p(E) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} = 0{,}1333... = 13{,}\overline{3}\%$

**59. a)** $\Omega' = \{2, 4, 6\}$
$E = \{2\}$
$p(E) = \frac{1}{3}$

**b)** $\Omega' = \{2, 4, 6\}$
$E = \varnothing$ (os únicos divisores de 5 são 1 e 5, que não pertencem a $\Omega'$.)
Assim, $p(E) = 0$.

**60. a)** Devemos excluir 4 valetes e 4 damas para obter espaço amostral reduzido $\Omega'$.
$n(\Omega') = 52 - 8 = 44$
Daí, uma dessas 44 cartas é o rei de ouros, e a probabilidade pedida é $\frac{1}{44}$.

**b)** Excluímos as 13 cartas de ouros para a construção de $\Omega'$ e $n(\Omega') = 52 - 13 = 39$.
Dentre essas 39 cartas, há $39 - 13 = 26$, que não são de copas, e a probabilidade é $\frac{26}{39} = \frac{2}{3}$.

**c)** $n(\Omega') = 13$ (13 cartas de copas)
Dentre essas 13 cartas de copas, uma é o rei, e a probabilidade é $\frac{1}{13}$.

**d)** $n(\Omega') = 52 - 13 = 39$; dessas 39 cartas, uma é o valete de espadas e outra é o valete de ouros (2 casos favoráveis).
$p = \frac{2}{39}$

**e)** $n(\Omega') = 39$
Dessas 39 cartas, há 13 de ouros e 3 reis (já excluímos o rei de copas). Mas não podemos esquecer que o rei de ouros foi contado duas vezes:
$p = \frac{13 + 3 - 1}{39} = \frac{15}{39} = \frac{5}{13}$

**61.** $n(\Omega')$: número de filas em que o casal não está em sequência
$n(\Omega') = \underbrace{P_6}_{\text{total}} - \underbrace{P_2 \cdot P_5}_{\text{casal junto}} = 720 - 240 = 480$

n(E): número de filas em que as extremidades são ocupadas pelo casal:

$\underset{\text{início}}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underset{\text{final}}{1} = 2 \cdot P_4 = 48$

$p(E) = \frac{48}{480} = 0{,}10 = 10\%$

**62.**
- Número de moças: $600 - 380 = 220$
- Número de moças que estão cursando o Ensino Médio: $220 - 105 = 115$
- Número de rapazes que já concluíram o Ensino Médio: $380 - 200 = 180$

Reunindo as informações em uma tabela obtemos:

| | Rapazes | Moças | Total |
|---|---|---|---|
| **Cursando o E.M.** | 200 | 115 | 315 |
| **Já concluíram o E.M.** | 180 | 105 | 285 |
| **Total** | 380 | 220 | 600 |

**a)** $p = \frac{180}{285} = \frac{12}{19}$

**b)** $p = \frac{115}{220} = \frac{23}{44}$

**63. a)** $n(\Omega) = C_{6,\,4} = 15$
$n(E) = C_{5,\,3} = 10$, pois, incluindo a coxinha, é preciso escolher 3 dentre os 5 tipos de petiscos restantes.
$p(E) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

**b)** $n(\Omega') = C_{4,\,2} = 6$, pois, como o cliente já incluiu coxinha e empadinha, falta escolher 2 dentre os 4 petiscos restantes.
$n(E) = 3$, pois incluindo-se também o pastel é preciso escolher apenas 1 petisco entre os 3 restantes.
Logo, $p(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$.

**c)** $n(\Omega') = C_{5,\,4} = 5$, pois ele deverá escolher os 4 petiscos entre 5 disponíveis (coxinha não será incluído).
$n(E) = 1$, pois, excluindo-se também empadinha, é preciso escolher 4 dentre as 4 opções disponíveis; isto só pode ser feito de uma única maneira.
$p(E) = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

**64. a)** $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$

**b)** $\left(\frac{13}{52}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

**65.** Como temos independência entre os eventos, escrevemos:
$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$
($\frac{1}{2}$: probabilidade de ocorrer coroa; $\frac{3}{6}$: probabilidade de ocorrer um número primo: 2, 3 e 5 são primos)

**66. a)** O total de brindes é $12 + 15 = 27$
$p = \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26} = \frac{22}{117} \simeq 0{,}188$

**b)** $p = \underbrace{\frac{12}{27} \cdot \frac{15}{26}}_{} + \underbrace{\frac{15}{27} \cdot \frac{12}{26}}_{} = 2 \cdot \frac{12 \cdot 15}{27 \cdot 26}$

probabilidade de o 1º sorteio ser para menino e o 2º sorteio ser para menina — probabilidade de o 1º sorteio ser para menina e o 2º sorteio ser para menino

$p = \frac{20}{39} \simeq 0{,}5128$

**67.** **a)** $p = \frac{12}{27} \cdot \frac{12}{27} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81} \simeq 0{,}1975$

**b)** $p = \frac{12}{27} \cdot \frac{15}{27} + \frac{12}{27} \cdot \frac{15}{27} = 2 \cdot \frac{12 \cdot 15}{27^2} =$

$= \frac{40}{81} \simeq 0{,}4938$

**68.** **a)** $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$

**b)** Podemos ter:

- 2 palmitos e 1 queijo:

$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 = \frac{3}{40}$

(3: número de ordens distintas de se ter 2 palmitos e 1 queijo)

- 2 palmitos e 1 carne:

$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot 3 = \frac{1}{10}$

(3: ordens)

A probabilidade pedida é, portanto:

$\frac{3}{40} + \frac{1}{10} = \frac{7}{40}$

**c)** A probabilidade de sair um de palmito, um de carne e um de queijo, nessa ordem, é:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{20}$$

Em outra ordem, digamos queijo, palmito e carne, a probabilidade é a mesma:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{20}$$

Como há 6 ordens distintas ($P_3 = 3! = 6$) para retirada de um pastel de cada sabor, a probabilidade pedida é $6 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}30$.

**69.** **a)** $0{,}18 \cdot 0{,}12 = 0{,}0216 = 2{,}16\%$

**b)** $0{,}82 \cdot 0{,}88 = 0{,}7216 = 72{,}16\%$

**c)** 1º modo:

1 − p(ninguém queimar) $= 1 - 0{,}7216 = 0{,}2784 =$
$= 27{,}84\%$

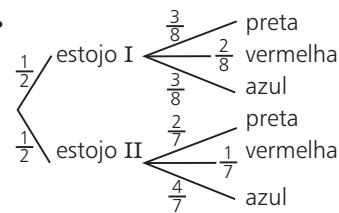
2º modo:

p = p(**A** queimar e **B** não) + p(**B** queimar e **A** não) +
+ p(**A** e **B** queimarem) ⇒

$\Rightarrow p = 0{,}18 \cdot 0{,}88 + 0{,}12 \cdot 0{,}82 + 0{,}18 \cdot 0{,}12 \Rightarrow$

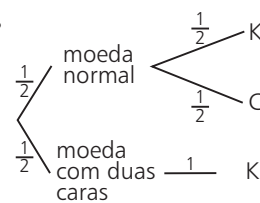
$\Rightarrow p = 0{,}1584 + 0{,}0984 + 0{,}0216 = 0{,}2784 =$
$= 27{,}84\%$

**70.**

estojo I ($\frac{1}{2}$): preta ($\frac{3}{8}$), vermelha ($\frac{2}{8}$), azul ($\frac{3}{8}$)
estojo II ($\frac{1}{2}$): preta ($\frac{2}{7}$), vermelha ($\frac{1}{7}$), azul ($\frac{4}{7}$)

p = p(estojo I e caneta azul) + p(estojo II e caneta azul) ⇒

$\Rightarrow p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{16} + \frac{2}{7} = \frac{21 + 32}{112} = \frac{53}{112}$

**71.**

moeda normal ($\frac{1}{2}$): K ($\frac{1}{2}$), C ($\frac{1}{2}$)
moeda com duas caras ($\frac{1}{2}$): K (1)

$p(K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

**72.** Sejam p(s) e p(d) as probabilidades de chover no sábado e no domingo, respectivamente.

Temos: $\begin{cases} p(\bar{s}) \cdot p(\bar{d}) = \frac{17}{25} & (1) \\ p(d) = \frac{1}{5} & (2) \end{cases}$

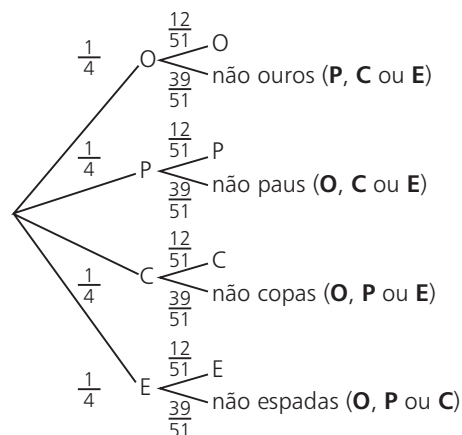
Por (2): $p(\bar{d}) = \frac{4}{5}$; em (1) temos: $p(\bar{s}) \cdot \frac{4}{5} = \frac{17}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow p(\bar{s}) = \frac{17}{20} \Rightarrow p(s) = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$

Logo, $p(s \cap d) = p(s) \cdot p(d) = \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{100} = 3\%$

**73.** Vamos resolver de três modos diferentes.

1º modo:

Sejam **O**: ouros; **P**: paus; **C**: copas e **E**: espadas

Temos:

p = p(O ∩ não ouros) + p(P ∩ não paus) +
+ p(C ∩ não copas) + p(E ∩ não espadas) ⇒

$\Rightarrow p = \frac{1}{4} \cdot \frac{39}{51} + \frac{1}{4} \cdot \frac{39}{51} + \frac{1}{4} \cdot \frac{39}{51} + \frac{1}{4} \cdot \frac{39}{51} \Rightarrow$

$\Rightarrow p = \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{39}{51} = \frac{39}{51} = \frac{13}{17}$

2º modo:

$p = 1 \cdot \frac{39}{51} = \frac{39}{51} = \frac{13}{17}$

1: prob. de sair uma carta qualquer (evento certo)

$\frac{39}{51}$: prob. de sair uma carta de naipe diferente do naipe da 1ª carta

3º modo:

$n(\Omega) = C_{52, 2} = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$

Para determinar n(E), inicialmente contamos o número de pares de naipes possíveis, a saber: $C_{4, 2} = 6$ ({paus, ouros}, {paus, espadas}, {paus, copas}, {ouros, espadas}, {ouros, copas}, {espadas, copas}).

Para cada tipo de par, as cartas podem ser escolhidas de 169 maneiras ($13 \cdot 13 = 169$).

Assim, $n(E) = 6 \cdot 169$ e $p(E) = \frac{6 \cdot 169}{1326} = \frac{13}{17}$.

**74.** **a)**

- $\frac{10}{15}$ → $C_1$
  - 0,04 → defeito
  - 0,96 → sem defeito
- $\frac{5}{15}$ → $C_2$
  - 0,01 → defeito
  - 0,99 → sem defeito

$p(C_1 \cap \text{sem defeito}) = \frac{10}{15} \cdot 0{,}96 = 0{,}64 = 64\%$

**b)** $p = p(C_1 \cap \text{defeito}) + p(C_2 \cap \text{defeito}) \Rightarrow$

$\Rightarrow p = \frac{10}{15} \cdot 0{,}04 + \frac{5}{15} \cdot 0{,}01 = \frac{0{,}45}{15} = 0{,}03 = 3\%$

## Desafio

**a)** Vamos determinar inicialmente o número de maneiras distintas de se "apresentar" uma tela de acesso nesse sistema:

□ □ □ □ □

1º botão: $\frac{10 \cdot 9}{2}$ (dividimos por 2, pois os algarismos nesse botão são apresentados em ordem crescente);

2º botão: Como já foram escolhidos 2 algarismos, temos $\frac{8 \cdot 7}{2}$ opções distintas (análogo ao 1º botão);

3º botão: $\frac{6 \cdot 5}{2}$;

4º botão: $\frac{4 \cdot 3}{2}$;

5º botão: $\frac{2 \cdot 1}{2}$

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{10!}{2^5} = 113\,400$

Como há apenas um caso favorável (o da configuração mostrada no enunciado), a probabilidade pedida é $\frac{1}{113\,400}$.

**b)** É preciso acertar os 6 botões.

$p = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5^6} = 0{,}0064\%$